Bericht zur Prüfung im Oktober 2002 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Klaus Allerdissen* (Düsseldorf) und *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)

Am 19. 10. 2002 wurde in Bad Neuenahr die siebte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 104 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 92 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Eine (rohe) Sterbetafel soll mit dem Sterbegesetz von Wittstein

$$q_x = a^{-(\omega - x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n} = f(x;a,n,m)$$

ausgeglichen werden ($x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq \omega$), wobei ω das Schlussalter der Sterbetafel bezeichne. Die Parameter $a > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ seien bereits bestimmt worden. Wie muss dann $m > 0$ in Abhängigkeit von ω festgelegt werden, damit die ausgeglichene Sterblichkeit im Alter 11 minimal wird? Welcher Wert ergibt sich konkret für m bei $\omega = 100$?

(Hinweis: Sie können ohne Nachweis unterstellen, dass $f(x;a,n,m) = q_x$ im Definitionsbereich genau ein relatives Minimum besitzt.)

Lösung

Aus

$$q_x = a^{-(\omega - x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n} \text{ folgt, dass}$$

$$\frac{dq_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-\ln(a)\cdot(\omega - x)^n} + \frac{1}{m} e^{-\ln(a)\cdot(mx)^n}\right) =$$

$$\ln(a) \cdot n \cdot (\omega - x)^{n-1} \cdot a^{-(\omega - x)^n} - \ln(a) \cdot n \cdot m \cdot (mx)^{n-1} \cdot \frac{1}{m} a^{-(mx)^n} =$$

$$n \cdot \ln(a) \cdot [(\omega - x)^{n-1} \cdot a^{-(\omega - x)^n} - (m \cdot x)^{n-1} \cdot a^{-(mx)^n}]$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwerts $\frac{dq_x}{dx} = 0$ bedingt, dass

$$(\omega - x)^{n-1} \cdot a^{-(\omega - x)^n} = (m \cdot x)^{n-1} \cdot a^{-(mx)^n}.$$

Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt für

$$m \cdot x = \omega - x, \quad \text{d.h. für} \quad x = \frac{\omega}{m+1}.$$

Aufgrund der Voraussetzungen hat die Ausgleichsfunktion damit ein Minimum an dieser Stelle. Da dieses Minimum gerade an der Stelle $x = 11$ angenommen werden soll, folgt für m, dass

$$m = \frac{\omega - 11}{11}.$$

Für $\omega = 100$ folgt schließlich, dass $m = 8{,}0909$ gesetzt werden muss.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

a) Erläutern Sie das Finanzierungsverfahren der gesetzlichen Rentenversicherung und geben Sie die wesentlichen Einnahme- und Ausgabepositionen an.

b) Welches waren die wesentlichen Ziele der Rentenreform 2000/01? (Antwort bitte in Stichworten)

c) Der Beitragssatz zur gesetzlichen Rentenversicherung steige im Jahr 2003 auf 19,3% (nach 19,1% in 2001 und 2002). Weiter werde unterstellt, dass die beitragspflichtigen Bruttoeinkommen von 2001 auf 2002 und von 2002 auf 2003 jeweils um 2,5% ansteigen. Seit dem 01. 07. 2002 beträgt der aktuelle Rentenwert 25,86 €.

i) Wann wirkt sich der Anstieg des Beitragssatzes auf die Anpassung der laufenden Renten aus?

ii) Wie hoch ist die „Eckrente“ (Standardaltersrente bei Rentenbeginn im Alter 65 mit 45 Entgeltpunkten) am 01. 07. 2002, am 01. 07. 2003 und am 01. 07. 2004?

(Hinweis: Der Altersversorgungsanteil AVA beträgt 0,0% vor 2002, 0,5% in 2002, 1,0% in 2003 und 1,5% in 2004.)

Lösung

a) Finanzierung im Umlageverfahren:

„In der Rentenversicherung werden die Ausgaben eines Kalenderjahres durch die Einnahmen des gleichen Kalenderjahres und, soweit erforderlich, durch Entnahmen aus der Schwankungsreserve gedeckt.“ (§ 153 Abs. 1 SGB VI).

Die Schwankungsreserve muss mindestens 0,8 Monatsausgaben betragen.

Wesentliche Einnahmen:

- Rentenversicherungsbeiträge
- Bundeszuschuss
- Zusätzliche Bundeszuschüsse

Wesentliche Ausgaben:

- Rentenausgaben
- Beiträge zur Kranken- und Pflegeversicherung der Rentner

b) *Ziele der Reform:*

- Beitragssatz bis 2020 unter 20% halten, bis 2030 unter 22%
- Gleichzeitig Beibehaltung des Ziels der Lebensstandardsicherung; das Nettorentenniveau (für den Eckrentner) soll nicht unter 67% absinken
- Teilweise Abwendung von der Umlagefinanzierung, die nur auf dem nationalen Lohneinkommen basiert; Einstieg in eine partielle Kapitaldeckung, Anreize für die Verwendung von bis zu 4% der Bruttolöhne zur Altersvorsorge.

c) Allgemein wird der jährlich neu zu bestimmende aktuelle Rentenwert in der Zeit vom 01. Juli 2001 bis zum 01. Juli 2010 nach der folgenden Formel ermittelt:

$$AR_t = AR_{t-1} \times \frac{BE_{t-1}}{BE_{t-2}} \times \frac{100\% - AVA_{t-1} - RVB_{t-1}}{100\% - AVA_{t-2} - RVB_{t-2}}$$

Dabei sind:

AR = aktueller Rentenwert,

BE = Bruttolohn- und -gehaltssumme je durchschnittlich beschäftigtem Arbeitnehmer,

RVB = durchschnittlicher Beitragssatz in der Rentenversicherung der Arbeiter und der Angestellten

AVA = Altersvorsorgeanteil

im jeweiligen Kalenderjahr.

i) Nach obiger Gleichung wirkt sich der Anstieg des Beitragssatzes von 2002 auf 2003 erst am 01. 07. 2004 aus.

ii) Eckrente ab 01. 07. 2002: $45 \cdot 25{,}86\,€ = 1163{,}70\,€$

$$\text{Eckrente ab 01. 07. 2003: } 45 \cdot 25{,}86 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1 - 0,005 - 0,191}{1 - 0,191}\,€ = 45 \cdot 26{,}34\,€ = 1185{,}30\,€$$

$$\text{Eckrente ab 01. 07. 2004: } 45 \cdot 26{,}34 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1 - 0,01 - 0,193}{1 - 0,005 - 0,191}\,€ = 45 \cdot 26{,}76\,€ = 1204{,}20\,€.$$

Aufgabe 3 (60 Punkte)

S_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ bezeichne die Schadenhöhe der i-ten Police eines kleinen Lebensversicherungsbestandes. Die Risiken werden als stochastisch unabhängig vorausgesetzt. Die drei möglichen Schadenhöhen in dem betrachteten Jahr seien:

(a) $S_i = 0$, falls die versicherte Person mit dem Alter x den Ablauf des Jahres erlebt,
(b) $S_i = 100$, falls die Police gekündigt wird,
(c) $S_i = 1000$, falls die versicherte Person stirbt.

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit sei $q_{1,x} = 0{,}002$, die Stornowahrscheinlichkeit sei $q_{2,x} = 0{,}15$, und es gelte für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit $p_x = 1 - q_{1,x} - q_{2,x}$.

(I) Mittels Normalapproximation berechne man näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schadensumme der zehn stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Policen $S = S_1 + \ldots + S_{10}$ den Wert 300 übersteigt.

(II) Wie hoch ist die Netto-Prämie für einen Stop-Loss-Vertrag mit Selbstbehalt $c = 300$ für die obige Schadensumme S unter der Annahme, dass S normalverteilt ist?

(III) Anleitung zu (II): Verwende folgende allgemeine Formel für die Netto-Prämie $E[(S-c)^+]$ eines Stop-Loss-Vertrages mit Selbstbehalt c unter der Voraussetzung, dass die kumulierte Schadensumme S eines Versicherungsbestandes näherungsweise normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Varianz σ^2:

$$(*) \quad E[(S-c)^+] = (\mu - c) N\left(\frac{\mu - c}{\sigma}\right) + \sigma \cdot \varphi\left(\frac{\mu - c}{\sigma}\right),$$

dabei bezeichnen N die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und φ die zugehörige Dichtefunktion, d.h. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(IV) Man beweise die Formel (*).

Lösung

Zu (I):

Es ist $E[S_i] = 1000 \cdot (0{,}002) + 100 \cdot (0{,}15) = 17$ und $VAR[S_i] = 1000^2 \cdot (0{,}002) + 100^2 \cdot (0{,}15) - 17^2 = 3211$. Daher ist $E[S] = 10\, E[S_i] = 170$, $VAR[S] = 10\, VAR[S_i] = 32110$, und man hat

$P(S > 300) = 1 - N((300 - 170)/\sqrt{32110}) = 1 - N(0{,}725476) \approx 1 - 0{,}76265 = 0{,}23735.$

Zu (II):

Aufgrund der angegebenen Formel hat man mit $\frac{\mu - c}{\sigma} = -0{,}72547625$ für den ersten Term auf der rechten Seite der Formel (*): $-130 \cdot 0{,}23425 \approx -30{,}452$ und für den zweiten Term ergibt sich der Wert $0{,}3066\,\sigma$, insgesamt also $54{,}949779 - 30{,}452 \approx 24{,}50$.

Zu (III): (Beweis der Formel (*))

Es ist

$$p(c) := E[(S-c)^+] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} (x-c) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma x + \mu - c) e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma \cdot dx$$

$$= \sigma \int_k^{\infty} (x-k)\varphi(x) dx \quad \text{mit} \quad k := \frac{c-\mu}{\sigma}$$

und φ die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung.

Wegen $x \cdot \varphi(x) = -\varphi'(x)$ ist $\sigma \int_k^{\infty} x\varphi(x)dx = -\sigma(\varphi(\infty) - \varphi(k)) = \sigma\varphi(k)$ und $-\sigma \int_k^{\infty} k\varphi(x)dx$ berechnet sich zu $(\mu - c)(1 - N(k)) = (\mu - c)N(-k)$, und genau das beweist die Behauptung.

Aufgabe 4 (60 Punkte)

1. Der Begriff der natürlichen Gewinnbeteiligung ist nicht eindeutig definiert. Im Rahmen dieser Aufgabe wollen wir hierunter allgemein und unpräzise ein profit-sharing verstehen, das den Kunden in angemessener Weise am Geschäftserfolg (Zins, Sterblichkeit, Kosten) beteiligt.
   - Ist ein so beschriebenes (faires) Gewinnbeteiligungssystem mit dem Prinzip der Schlussgewinnbeteiligung verträglich? Bitte erläutern Sie Ihre Auffassung.
   - Schlussgewinnbeteiligung und Kapitalanlagepolitik stehen in einem engen Zusammenhang. Bitte beschreiben Sie Aspekte dieses grundsätzlichen Wirkungszusammenhang, die Sie für wichtig halten.
2. In Deutschland werden traditionell den Versicherungsnehmern Rückkaufswerte in nominaler Höhe garantiert.

   Bitte geben Sie ein Beispiel dafür an, dass hierdurch ein vermeidbares Risiko für das Versicherungsunternehmen induziert wird, und stellen Sie eine konkrete Kapitalmarktentwicklung dar, unter der sich das Risiko realisiert.

   Welche gesetzlich zulässige Möglichkeit besteht, dieses Risiko zu vermeiden?

Lösung

Für die Musterlösung seien in Stichworten Aspekte angegeben, die in unterschiedlicher Zusammenstellung und Gewichtung für eine Diskussion des finanzmathematischen Charakters der Schlussgewinnbeteiligung erheblich sind:

1. Der Schlussgewinnanteilfonds stellt Risikokapital (RBC) dar. Der Fonds dient zur Bedeckung der Solvabilitätsanforderung.
2. Ein faires Gewinnbeteiligungssystem heißt auch, dass die Kunden an den Chancen und Risiken der Kapitalmärkte in der Leistungsentwicklung ihrer Versicherungsverträge partizipieren. Es besteht nicht nur ein Ertrags-, sondern auch ein Verlustrisiko und das Defaultrisiko.
3. Die wesentlichen Kapitalmarktrisiken sind hier das Volatilitätsrisiko und das Defaultrisiko.
4. Die Rechnungslegung erfordert eine jährliche Bewertung von Aktiva und Passiva. Das Atmen von Aktivseite und Passivseite ist nicht gleichmäßig. Die Finanzierung (Bewertung) der Deckungsrückstellung (incl. gutgeschriebener Gewinnanteile) erfolgt pro rata temporis und stellt ein starkes lock-in Prinzip dar. In Jahren mit unterperformantem Kapitalmarkt wird eine Schwankungsreserve gebraucht. Dies kann in der deutschen Rechnungslegung nur die Schlussgewinnbeteiligung sein, wenn nicht auf das EK zurückgegriffen werden soll.
5. Die Volatilität der Aktivseite ist eine Funktion der strategischen Asset-Allokation. Eine Erhöhung des Aktienanteils führt einerseits zu einem erhöhten Rentideerwartungswert, andererseits zu einer erhöhten Volatilität. Hier können als risikosteuernde Maßnahmen geprüft werden:

- Absenkung der Garantieleistungen (Zinsgarantie des Rechnungszinses)
- Absenkung der Gewinngutschriften (lfd. Gewinnbeteiligung) und Erhöhung der Schlussgewinnbeteiligung.

Die Garantie nominaler Rückkaufswerte ist gesetzlich nicht gefordert. Nach § 176 VVG ist dem Kunden der Zeitwert zu garantieren.

Ein Fallbeispiel lässt sich durch eine Einmalprämienversicherung mit stark steigenden Zinsen an den Anleihemärkten (Marktwertreduktion von Bonds, die zur Kapitalanlage unterlegt werden) und gleichzeitig fallenden Aktienkursen beschreiben.

Bei stark steigenden Zinsen steigt das Rückkaufsrisiko (Arbitrageprozess). Ein nominaler Rückkaufswert führt zu Verlusten beim Versicherer. Dies wird bei Auszahlung des Zeitwertes im Rückkaufsfall vermieden.