Bericht zur Prüfung im Oktober 2001 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Klaus Allerdissen* (Düsseldorf) und
Hans-Jochen Bartels (Mannheim)

Am 13.10.2001 wurde in Bad Neuenahr die sechste Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 114 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 106 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der vier Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden.

Aufgabe 1 (35 Punkte)

In einem Altersbereich $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ seien die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten $\bar{q}_{x_1}, \bar{q}_{x_2}, \dots, \bar{q}_{x_n}$ ermittelt worden. Diese sollen mit einem Polynom zweiten Grades $f(x) = ax^2 + bx + c$ unter Anwendung des Kriteriums der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden. Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a, b und c auf.

Lösung:

Das Kriterium der kleinsten Quadrate stellt eine gute Anpassung an die rohen Werte sicher durch die Forderung, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{q}_{x_i} - f(x_i, a, b, c))^2 \to \min$$

$$\text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} (\bar{q}_{x_i} - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \to \min$$

Eine notwendige Bedingung zur Erfüllung dieser Forderung besteht darin, dass die ersten partiellen Ableitungen nach a, b und c zu Null werden. Das bedeutet

$$-2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{q}_{x_i} - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i^2 = 0,$$

$$-2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{q}_{x_i} - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot x_i = 0 \qquad \text{und}$$

$$-2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{q}_{x_i} - ax_i^2 - bx_i - c) = 0.$$

Damit erhält man das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von a, b und c:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_{x_i} x_i^2 = 0$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_{x_i} x_i = 0$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot c - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_{x_i} = 0$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

a) Grenzen Sie den Rohüberschuss und den Jahresüberschuss eines Lebensversicherungsunternehmens voneinander ab.
b) Welchen Hinweis geben die Bilanz und die Gewinn- und Verlustrechnung eines Lebensversicherers auf die vorzugsweise praktizierte Überschussverwendungsart (Bonussystem, verzinsliche Ansammlung)?
c) Der Vorstand eines Lebensversicherers beschließe, die Überschussbeteilung für die VN im Jahr 2002 in unveränderter Höhe zu deklarieren, die Direktgutschrift aber mit Wirkung von 2002 abzuschaffen. Welche Auswirkung hätte dies im Jahr 2002 auf die Entwicklung der Rückstellung für Beitragsrückerstattung?

Lösung:

a) Der Jahresüberschuss ergibt sich wie üblich als Differenz aller Ertrags- und Aufwandspositionen eines Geschäftsjahres; die Zuführung zur RfB ist dabei schon als Aufwandsposten (Aufwendungen für Beitragsrückerstattung) in Abzug gebracht worden. Addiert man diese Aufwendungen für Beitragsrückerstattung wieder zum Jahresüberschuss hinzu, so ergibt sich der Rohüberschuss des Geschäftsjahres.
b) Die GuV-Position „Beiträge aus der Brutto-RfB" gibt an, wie hoch die Summe der aus der RfB entnommenen Überschussanteile ist, die als Einmalbeitrag zur Bildung einer zusätzlichen Bonussumme verwendet worden sind. Ein hoher ausgewiesener Wert in dieser Position deutet daher darauf hin, dass das Bonussystem in dem betrachteten LVU eine wichtige Rolle spielt. Dagegen deutet vieles auf die verzinsliche Ansammlung als bevorzugte Gewinnverwendungsart hin, wenn die Beiträge aus der RfB gering sind, dafür aber hohe Verbindlichkeiten aus dem selbst abgeschlossenen Versicherungsgeschäft gegenüber Versicherungsnehmern auf der Passivseite der Bilanz ausgewiesen werden, da diese insbesondere die angesammelten Überschussguthaben aus der verzinslichen Ansammlung enthalten.
c) Die Beträge, die bis einschließlich 2001 als Direktgutschrift direkt zu Lasten des Geschäftsjahres den Verträgen der Versicherungsnehmer gutgeschrieben worden sind und (quasi) den Zinsaufwand des Versicherers erhöht haben, müssen in 2002 der RfB entnommen werden. Daher muss Ende 2001 im Wege der Vorausdeklaration für 2002 ein entsprechend höherer Betrag in der gebundenen RfB reserviert werden. Dies kann nur zu Lasten der freien RfB geschehen, da die Direktgutschrift in 2001 noch finanziert werden musste und diese Mittel daher Ende 2001 nicht für die Zuführung zur RfB bereitstehen. Mit anderen Worten: Die Abschaffung der Direktgutschrift führt zu einer Verschiebung innerhalb der RfB, die gebundene RfB steigt, die freie RfB sinkt. In 2002 wird das Ergebnis des Versicherers dann nicht mehr durch die Direktgutschrift belastet, entsprechend höher kann Ende 2002 die Zuführung zur RfB ausfallen. Die veränderte Gewichtung von gebundener und freier RfB bleibt aber erhalten.

Aufgabe 3 (60 Punkte)

a) Warum gibt der Jahresabschluss nach HGB keine Auskunft über den Wert eines Lebensversicherungsunternehmens?
b) Was versteht man unter dem embedded value?
c) Bitte geben Sie den grundsätzlichen Bewertungsansatz für den PVFP(t) nachvollziehbar an. (PVFT: = Present Value of Future Profits)
d) Was ist der added value?
e) Welche prinzipiellen Annahmen werden für die Berechnung des embedded value getroffen?
f) Wie ist der Return on Equity (RoE) zu definieren, wenn man den Modellansatz des embedded value zugrunde legt?

Lösung:

Zu a) – Der Wert eines Unternehmens wird auch durch die künftig aus dem Versicherungsbestand zu erzielenden Gewinne bestimmt.
– Die Bewertungsansätze nach HGB (Niederstwertprinzip) spiegeln nicht den Marktwert der Aktiva wieder.
– Das Vorsichtsprinzip der Passivseite bringt einen hohen Ausweis von liabilities, die unter dem Erwartungswertkalkül zu Erträgen führen.

Zu b) Bestandswert + Wert der freien Eigenmittel

Zu c) $PVFP(t) = \sum_{j=t+1}^{\omega} JEW_j \cdot (1 + rdr)^{-(j-t)}$,

wobei JEW ausschüttbarer handelsrechtlicher Jahresüberschuss und rdr = Risikodiskontrate

zu d) embedded value(t − 1) + embedded value(t) + Bilanzgewinn

zu e) – going concern Prinzip
– best estimate Annahmen
– Beachtung der rechtlichen Rahmenbedingungen

zu f) RoE = added value(t)/embedded value(t − 1)

Aufgabe 4 (60 Punkte)

Es bezeichne $x = x(t) = x(t, \omega)$ den Preis einer Aktie. Man betrachte europäische Put- bzw. Call-Optionen auf diese Aktie mit jeweils demselben Ausübungspreis c sowie Ausübungszeitpunkt T.

(i) Man erläutere die sogenannte Put-Call-Relation:

$$P(x, t) + x(t) = e^{-r(T-t)}c + C(x, t),$$

hierbei bezeichnen $P(x, t)$ und $C(x, t)$ jeweils den Preis der Put-Option bzw. den Call-Preis zum Zeitpunkt $t < T$.

(ii) In dem Black-Scholes-Modell wird für die Entwicklung des Aktienpreises eine geometrische Brownsche Bewegung unterstellt, es gelte etwa $x(t) = x(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\nu^2\right)t + \nu B(t)}$ mit konstanten Drift- und Volatilitätsparametern μ, ν. Der Preis einer Europäischen Call-Option berechnet sich in dem Black-Scholes-Modell zu $C(x, t) = x \cdot N(d_1) - c \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$, hierbei sind

$$d_1 = \frac{\ln(x/c) + \left(r + \frac{1}{2} \cdot \nu^2\right) \cdot (T - t)}{\nu \cdot \sqrt{T - t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(x/c) + \left(r - \frac{1}{2} \cdot \nu^2\right) \cdot (T - t)}{\nu \cdot \sqrt{T - t}},$$

und N(.) ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Man berechne für den Fall $\ln(x/c) + r(T - t) > 0$ den Grenzwert von $C(x, t)$ für beliebig kleine Volatilitäten $\nu \to 0$.
Stimmt der sich ergebende Grenzwert mit dem fairen Preis überein, der sich in einem deterministischen Modell $x(t) = x(0)e^{\mu t}$ für den Wert einer Call-Option mit den oben genannten Daten ergibt?
Warum muß dann in einem funktionierenden Markt ohnehin die Gleichung $\mu = r$ gelten?

Lösung:

(i) Man betrachtet zwei Portfolios:
Portfolio 1: 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis c zum Ausübungszeitpunkt T;

Portfolio 2: 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis c und Ausübungszeitpunkt T + einen Barbetrag in Höhe von $e^{-r(T-t)}c$ zum Zeitpunkt t, bzw. den Barbetrag c zum Zeitpunkt T (Aufzinsung mit exponentiellem Aufzinsungsfaktor).
Wegen der im Seminar besprochenen Identität $x(T) + P(x, T) = c + C(x, T)$ ist der Wert der beiden Portfolios zum Zeitpunkt T gleich. Da zwischen den Zeitpunkten t und T keine Ein- oder Auszahlungen erfolgen und es in einem funktionierenden Markt keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt, muss der Wert beider Portfolios zu Beginn, d.h. zum Zeitpunkt t auch gleich sein. Hieraus ergibt sich die behauptete Put-Call-Relation.

(ii) Es gilt offensichtlich $C(x, t) \to xN(\infty) - ce^{-r(T-t)}N(\infty) = x - ce^{-r(T-t)}$, auf der anderen Seite ergibt sich als fairer Preis der Option zur Zeit t im Falle der Volatilität 0 der auf den Zeitpunkt t abdiskontierte Wert der Option zum Ablaufzeitpunkt T, d.h.

$$e^{-r(T-t)}(x(T) - c)^+ = e^{-r(T-t)}\mathrm{Max}((x(T) - c, 0), \quad \text{und wegen } \; x(t) = e^{-\mu(T-t)}x(T)$$

ergibt sich nur dann die Übereinstimmung beider Formeln, wenn $\mu = r$ gilt.
In einem funktionierenden Markt, der keine Arbitrage-Möglichkeiten zulässt, können auf der anderen Seite ohnehin nicht zwei Finanzpapiere existieren mit unterschiedlicher deterministischer Verzinsungsrate, d.h. es muss unter der No-Arbitrage-Bedingung ohnehin die Relation $\mu = r$ gelten.