Bericht zur Prüfung im Oktober 2000 über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen)

Jürgen Strobel (Köln), *Klaus Allerdissen* (Overath) und *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)

Am 14. 10. 2000 wurde in Bad Neuenahr die fünfte Prüfung über Mathematik der Lebensversicherung (Spezialwissen) nach der Prüfungsordnung der DAV mit insgesamt 99 Teilnehmerinnen und Teilnehmern durchgeführt. Mit dem Bestehen dieser Klausur haben 97 Damen und Herren den Prüfungszyklus erfolgreich abgeschlossen und damit eine wesentliche Voraussetzung erfüllt, um die Mitgliedschaft in der DAV erwerben zu können.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der drei Aufgaben gestellt waren. Alle diese Aufgaben waren zu bearbeiten. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 Punkte von 180 möglichen Punkten erreicht werden. Eine Tabelle der Standardnormalverteilung wurde zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1 (60 Punkte)

Bei der Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 T (vgl. Loebus, Blätter der DGVM, Oktober 1994, S. 497–524) war ein additiver Schwankungszuschlag s_x^α zu den ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x der ADST 1986/88 zu ermitteln. Dabei waren u.a. folgende Modellvoraussetzungen und Bezeichnungen gegeben:

M = Modellbestand = $\bigcup\limits_x M_x$

L_x^M = Anzahl der x-jährigen in M = Anzahl der Personen aus M_x
T_x = Anzahl der im Alter x Gestorbenen aus M_x (Zufallsvariable)

$q_x^M = \frac{T_x}{L_x^M}$ = Zufallsvariable der (rohen) Sterbewahrscheinlichkeiten

Die Zahl der Todesfälle eines Alters x sei binomialverteilt mit $B(L_x^M, q_x)$, und es sei sichergestellt, dass $T_x \geq 5$ für alle Werte von x. Alle Risiken aus M seien unabhängig.

a) Für die Schwankungszuschläge s_x^α sei die Forderung erfüllt:

$$P(q_x^M \cdot L_x^M \leq (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes Alter x.} \qquad (+)$$

Ferner seien die s_x^α gemäß dem Vorschlag des Canadian Institute of Actuaries (CIA) von der Struktur

$$s_x^\alpha = \frac{c}{e_x^0}$$

mit einer positiven Konstanten c und der mittleren (restlichen) Lebenserwartung

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x} \cdot \left(\sum_{k=0}^{100-x} l_{x+k} - \frac{1}{2} \right).$$

Es wird behauptet, dass die Schwankungszuschläge mit wachsendem Alter relativ zu den Sterblichkeiten abnehmen. Bitte überprüfen Sie dies für die Alter 65 und 66, wenn bekannt ist, dass $q_{65} = 0{,}024455$, $q_{66} = 0{,}026710$ und $e_{65}^0 = 14{,}05$.

b) Wie groß muss die Konstante c gewählt werden, damit (+) im Alter 65 erfüllt ist?
Neben den bereits bekannten Daten sei $\alpha = 0{,}01$ und $L_{65}^M = 2659$ gegeben.

c) Wie erklärt sich das Ergebnis vor dem Hintergrund, dass das CIA Werte für c zwischen 0,00375 und 0,015 vorschlägt?

Lösung:

zu a) Es gilt, dass

$$e_{x+1}^0 = \frac{1}{l_{x+1}} \cdot \left(l_{x+1} + \ldots + l_{100} - \frac{1}{2} \right) \text{ und damit } l_{x+1} \cdot e_{x+1}^0 = l_x \cdot e_x^0 - l_x \text{ bzw.}$$

$$e_{x+1}^0 = \frac{1}{l_{x+1}} \cdot (l_x \cdot e_x^0 - l_x) = \frac{1}{p_x} \cdot (e_x^0 - 1). \qquad (*)$$

Daher ist $e_{66}^0 = \frac{1}{(1 - 0{,}024455)} \cdot 13{,}05 = 13{,}377$, und somit für beliebiges $c > 0$

$$\frac{s_{65}^\alpha}{q_{65}} = c \cdot \frac{1}{e_{65}^0 \cdot q_{65}} = c \cdot \frac{1}{14{,}05 \cdot 0{,}024455} = c \cdot 2{,}9104 > \frac{s_{66}^\alpha}{q_{66}} = c \cdot \frac{1}{13{,}377 \cdot 0{,}02671} = c \cdot 2{,}799.$$

(Hinweis: In die Aufgabenstellung hat sich bei der Definition der mittleren restlichen Lebenserwartung ein Fehler eingeschlichen. Setzt man richtig

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=0}^{100-x} l_{x+k} - \frac{1}{2},$$

so wird aus der Beziehung (*):

$$e_{x+1}^0 = \frac{1}{p_x} \cdot e_x^0 - \frac{1 + p_x}{2 \cdot p_x}, \qquad (**)$$

und im konkreten Fall $e_{66}^0 = 13{,}390$. Ansonsten bleibt der Lösungsweg unverändert.)

zu b) Unter den angegebenen Voraussetzungen (Verteilungsannahmen, $T_x \geq 5$) ist $T_x = q_x^M \cdot L_x^M$ für jedes x asymptotisch normalverteilt, so dass aus der Gültigkeit von (+) folgt:

$$P(T_x \leq (q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M) \geq 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \; P\left(\frac{T_x - E(T_x)}{\sigma(T_x)} \leq \frac{(q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M - E(T_x)}{\sigma(T_x)} \right) \geq 1 - \alpha.$$

Da $E(T_x) = q_x \cdot L_x^M$, $\sigma(T_x) = \sqrt{q_x (1 - q_x) L_x^M}$, folgt nach Anwendung der Normalapproximation:

$$\frac{(q_x + s_x^\alpha) \cdot L_x^M - q_x \cdot L_x^M}{\sqrt{q_x (1 - q_x) L_x^M}} \geq u_{1-\alpha} \quad (1 - \alpha\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

Mit $s_x^\alpha = \frac{c}{e_x^0}$ und $u_{0,99} = 2{,}32666$ folgt daraus:

$$\frac{c}{e_x^0} \cdot L_x^M \geq 2{,}32666 \cdot \sqrt{q_x \cdot (1 - q_x) \cdot L_x^M}, \text{ und schließlich}$$

$$c \geq 2{,}32666 \cdot \frac{14{,}05}{2659} \cdot \sqrt{0{,}024455 \cdot 0{,}975545 \cdot 2659} = 0{,}097916.$$

zu c) Der hohe Wert von c ist damit zu begründen, dass in der vorliegenden Aufgabenstellung eine „lokale" Abschätzung vorgenommen wird, die für sich gesehen wirtschaftlich sinnlos ist und zusätzlich zur Folge hat, dass ein hohes Sicherheitsniveau für einen vergleichsweise kleinen Bestand verlangt wird. Offensichtlich ist das CIA (analog zur DAV) bei seiner Abschätzung von c von einer globalen Betrachtung ausgegangen, es hat also eine Sicherheitsschranke für die Todesfälle oder die Ruinwahrscheinlichkeit des Gesamtbestandes gefordert.

Aufgabe 2 (60 Punkte)

Sie sind Aktuar(in) eines mittelgroßen deutschen Lebensversicherungsunternehmens. Neben anderen Produkten bietet Ihr Unternehmen auch eine marktüblich kalkulierte Berufsunfähigkeitsversicherung an. Sie beschäftigen sich mit der Frage, ob die biometrischen Rechnungsgrundlagen für diese Versicherungsform angemessen (ausreichend) sind.

1. Welche biometrischen Rechnungsgrundlagen werden verwendet? Bitte begründen Sie kurz in Stichworten, welche der biometrischen Grundlagen Sie als kritisch oder unkritisch ansehen, und diskutieren Sie die Möglichkeit einer Überprüfung im Unternehmen. Welche biometrische Rechnungsgrundlage ist dabei besonders wichtig?
2. Welche Gründe sprechen aus Ihrer Sicht dafür, die biometrische Rechnungsgrundlage „Invalidisierung" zu dieser Versicherungsform zeitnah zu überprüfen?
3. Mit welchen Ansätzen würden Sie eine Überprüfung der Invalidisierung vornehmen? Bitte geben Sie mindestens zwei Quotienten beobachteter und rechnungsmäßiger Größen formelmäßig an, deren Wert Ihnen die numerische Überprüfung der Angemessenheit erlaubt.
4. Welche Probleme sind mit Ihren Ansätzen verbunden? Insbesondere: Welchen Einfluss hat die Zusammensetzung Ihres Bestandes hinsichtlich Alter, Bestandsdauer, versicherter Leistung? Bestehen Lösungsmöglichkeiten für die genannten Probleme?

Lösung:

1. Zunächst der Hinweis, dass an biometrischen Grundlagen existieren:

   - Invalidisierungswahrscheinlichkeit
   - Aktivensterblichkeit
   - Rentnersterblichkeit
   - Reaktivierungswahrscheinlichkeit.

   Eine vertiefte Diskussion, dass die Invalidisierung primär zu controllen ist, wird **nicht** erwartet. Für den Hinweis, dass Reaktivierung z.B. anhand einer Statistik der Leistungsabteilung beobachtet werden kann, werden Punkte vergeben. Ebenfalls für den Hinweis, dass Rentnersterblichkeit kaum signifikant zu beobachten sein dürfte und für die Aktivensterblichkeit kein besonderer Beobachtungsbedarf besteht. Für den ganzen Komplex besteht ein großer Freiraum. Es sollte aber erkennbar sein, dass das Vorhandensein mehrerer Rechnungsgrundlagen gesehen worden ist.

2. An spezifischen Gründen für ein Bestandscontrolling sollte bekannt sein:

   - Die statistische Basis gibt die Häufigkeiten einer alten Definition wieder.
   - subjektive Faktoren zur Abhängigkeit der Rechnungsgrundlagen
   - Sport
   - soziale Stellung
   - Berufsgefährdung
   - Einstellung zum Beruf
   - hohes Änderungsrisiko/Irrtumsrisiko
   - Allergien, Stress, Rückenerkrankungen (BU und Todesfallrisiko werden nicht synchron beeinflusst)
   - Konjunktur
   - Sozialversicherung (flexible Altersgrenze)
   - gesellschaftliche Akzeptanz zur Inanspruchnahme.

Alternativ ist auch eine allgemeine Diskussion ausreichend:

Im Lebensversicherungsgeschäft hat die Überprüfung des Pricing und der Reservierungsannahmen anhand der aktuellen Erfahrungen dann besondere Bedeutung, wenn

a) die Hypothesen sehr unsicher sind
b) die Vertragsduration, bei garantierten Grundlagen, hoch ist.

Es ist nicht zu verkennen, dass

a) Risikoprüfung (Selektion)
b) Bestandszusammensetzung (soziale Gliederung, Verteilung Männer/Frauen)
c) lokale Verhältnisse (Klima; medizinischer Standard; Umwelteinflüsse; Drogenkonsum)
d) Neugeschäftsentwicklung

deutliche Einflüsse haben. Diese Einflüsse sind in der Zeitachse durchaus nicht konstant.

3. Zunächst ist zu erkennen, dass Gruppenbildungen wegen fehlender statistischer Signifikanz erforderlich sind. An Methoden können unter Verwendung der folgenden Bezeichnungen angeboten werden:

$n(x, m) :=$ Anzahl der Versicherten mit Versicherungsalter x; Bestandsdauer m
$t(x, m) := n(x, m) \cdot q'(x, m)$ beobachtete zugehörige Anzahl der Toten
$f(x, m) := i'(x, m)/i(x, m)$ Abweichungsfaktoren der beobachteten Invalidisierung zur rechnungsmäßigen.

Methode 1

$$\sum_{x,m} n(x,m) \cdot i(x,m) \cdot f(x,m) \Big/ \sum_{x,m} n(x,m) \cdot i(x,m)$$

mit den rechnungsmäßigen Toten gewichteter Durchschnittswert der Abweichungsfaktoren.

Methode 2

$$\sum_{x,m} i(x,m) \cdot f(x,m) \Big/ \sum_{x,m} i(x,m)$$

Hierdurch wird der Einfluss der speziellen Bestandsverteilung eliminiert. Es bleibt aber die mit dem Alter steigende Gewichtung der $f(x; m)$[1].

Methode 3
In der Gewinnanalyse wird betrachtet:

$$\sum_{x,m} L(x,m) \cdot mU(x) \cdot i'(x,m) \Big/ \sum_{x,m} L(x,m) \cdot mU(x) \cdot i(x,m)$$

mit
$L :=$ insgesamt versicherte Leistung der Schicht (x, m)
$mU(x) :=$ Risikosumme für die Leistung 1, $mU(x) = 1 - mV(x)$.

Hier beeinflusst neben der Bestandsverteilung auch die Leistungshöhe das Ergebnis. Jüngere Bestände werden überbewertet.
Normiert man diesen Effekt heraus, bleibt:

$$\sum_{x,m} mU(x) \cdot f(x,m) \cdot i(x,m) \Big/ \sum_{x,m} mU(x) \cdot i(x,m)$$

Eine der Methoden muss bekannt sein. Die Angabe zweier Formeln gibt die volle Punktzahl. Sollte von einem Teilnehmer der Differenzialquotient zutreffend diskutiert werden, wird hierdurch schon die volle Punktzahl der Aufgabe erreicht.

[1]) Die einfache Durchschnittsbildung führt zu unbrauchbaren Ergebnissen.

4. Abhängig von der(n) angegebenen Methoden kann diskutiert werden:

Methode 1

$$\sum_{x,m} n(x,m) \cdot i(x,m) \cdot f(x,m) \,/\, \sum_{x,m} n(x,m) \cdot i(x,m)$$

Dieser mit den rechnungsmäßigen Invaliden gewichtete Durchschnittswert der Abweichungsfaktoren zeigt folgende Eigenschaften:

a) Wegen der steigenden $q(x)$ beeinflussen höhere Alter den Durchschnittswert wesentlich stärker als jüngere Alter
b) bei jungen Beständen sind kleine m stark überrepräsentiert. Sie beeinflussen das Ergebnis deshalb wesentlich stärker.
c) Bei Aggregierung über die Selektion (d.h. Vernachlässigung) wird zusammen mit b) ein systematisch zu niedriges Ergebnis produziert.

Methode 2

$$\sum_{x,m} i(x,m) \cdot f(x,m) \,/\, \sum_{x,m} i(x,m)$$

Hierdurch wird der Einfluss der speziellen Bestandsverteilung eliminiert. Es bleibt aber die mit dem Alter steigende Gewichtung der $f(x; m)$.

Methode 3

$$\sum_{x,m} L(x,m) \cdot mU(x) \cdot i'(x,m) \,/\, \sum_{x,m} L(x,m) \cdot mU(x) \cdot i(x,m)$$

Hier beeinflusst neben der Bestandsverteilung auch die Leistungshöhe das Ergebnis. Jüngere Bestände werden überbewertet. Nach Eliminierung dieses Effekts (s.o.):

$$\sum_{x,m} mU(x) \cdot f(x,m) \cdot i(x,m) \,/\, \sum_{x,m} mU(x) \cdot i(x,m)$$

Hierdurch ist das Gewicht der höheren Alter reduziert.

Der Einfluss der gegenläufigen Effekte (Selektion; steigende $q(x)$) ist analytisch jedoch nicht fassbar.

Aufgabe 3 (60 Punkte)

Zwei neu gestartete Lebensversicherungsgesellschaften haben jeweils einen Bestand von einjährigen Risikoversicherungen mit vier Gruppen und den Summen $S_k = 1$ bzw. 2 gemäß folgender Tabelle:

k	q_k	S_k	Anzahl
1	0,02	1	500
2	0,02	2	500
3	0,10	1	300
4	0,10	2	500

Die Gesellschaft 1 verzichtet auf Rückversicherung, während die zweite Gesellschaft einen Summenexzedentenrückversicherungsvertrag mit Selbstbehalt 1 abschließt. Die Gesellschaften berechnen die Prämien der bei ihnen verbleibenden Risiken mit einem Sicherheitszuschlag nach dem folgendem Prinzip:

$$P(X_i) = (1+\theta)\, E(X_i) \text{ für das bei ihr verbleibende Risiko } X_i,$$

dabei soll der Sicherheitszuschlag jeweils so bemessen werden, dass die folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$P(S > (1+\theta)\, E(S)) \le 0{,}05 \qquad (*)$$

sind, wenn S dabei die bei dem jeweiligen Erstversicherer verbleibende Gesamtschadensumme bezeichnet. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass eine Normalapproximation für den beim jeweiligen Erstversicherer verbleibenden Bestand möglich ist.

(i) Man berechne die minimalen $\theta = \theta_i$ $(i = 1, 2)$ mittels Normalapproximation der Gesamtschadenverteilung, die bei dem jeweiligen Erstversicherer verbleibt, und interpretiere kurz das Ergebnis.
(ii) Welche Rückversicherungsprämie kann die zweite Gesellschaft für ihren Summenexzedentenvertrag maximal zahlen, damit sie gegenüber der Gesellschaft 1 am Markt mit gleichwertigen Prämien operieren kann (bei Berücksichtigung der Rückversicherungsprämie und der Minimalprämie für den selbst getragenen Teil des Risikos gemäß (i), d.h. einer Mischkalkulation aus beiden Anteilen)? Bei welchen Rückversicherungsprämien ist es vorteilhaft, gemäß dem Muster der Gesellschaft 2 vorzugehen?

Lösung:

(i) Man berechnet für den Gesamtbestand wie in Aufgabe 3 der Übungen zum Spezialwissen:

$$E(S) = \sum_{1}^{1800} E(X_i) = \sum_{1}^{4} n_k \mu_k = 160 \quad \text{sowie}$$

$$VAR(S) = \sum_{1}^{1800} VAR(X_i) = \sum n_k \sigma_k^2 = 256 .$$

Aus der Forderung $P(S \leq (1+\theta)\, E(S)) = 0{,}95$ ergibt sich dann für die Gesellschaft 1:

$$P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{VAR(S)}} \leq \frac{\theta E(S)}{VAR(S)} \right) = 0{,}95 \quad \text{d.h. bei Normalapproximation:}$$

$$\frac{\theta E(S)}{\sqrt{VAR(S)}} = 1{,}645 \quad \text{und damit} \quad \theta = \theta_1 = 0{,}1645 .$$

Für den bei **Gesellschaft 2** verbleibenden Versicherungsbestand $S = S_2$ nach Rückversicherung, d.h. für die beim Erstversicherer verbleibende Schadensumme ergibt sich analog:

$$E(S_2) = 100 \quad \text{sowie} \quad VAR(S_2) = 1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 800 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 91{,}6 .$$

Aus der Identität $\dfrac{\theta E(S_2)}{\sqrt{VAR(S_2)}} = 1{,}645$ folgt dann $\theta = \theta_2 = 0{,}157439477\ldots$

Ergebnisinterpretation: Da bei der Gesellschaft zwei ein Bestand verbleibt mit einer in Relation zum erwarteten Schaden niedrigeren Varianz, führt die Forderung (*) zu einem niedrigeren Sicherheitszuschlag im Vergleich zur Gesellschaft 1.

(ii) Die minimal benötigte Prämieneinnahme der Gesellschaft 1 beträgt:

$$(1+\theta_1)\, E(S) = 1{,}1645 \cdot 160 = 186{,}32 .$$

Die Gesellschaft 2 benötigt für den bei ihr verbleibenden Versicherungsbestand nach (i) mindestens $(1+\theta_2)\, E(S_2) = 1{,}157439477\ldots \cdot 100 = 115{,}74439477\ldots$
Damit sie gegenüber der Gesellschaft 1 am Markt mit gleichwertigen Prämien operieren kann, darf sie also maximal für den in Rückdeckung gegebenen Teil die Prämie 70,5756053... an den Rückversicherer zahlen; bezogen auf den zu erwartenden Schaden $E(S) - E(S_2) = 60$ entspricht dies einem Faktor 1,176260088... . Wenn man im Hinblick auf Risikoaspekte ausschließlich der Forderung (*) genüge tun muss, zahlt sich die von Gesellschaft 2 verfolgte Strategie nur dann aus, wenn die Rückversicherungsprämie unter dem Wert 70,5756053... (bzw. bei dem Faktor unter dem Wert 1,176260088...) bleibt.