

Bericht zur Prüfung im Oktober 1999 über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider (Köln)

Am 16. Oktober 1999 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 13 Teilnehmern bestanden 11 die Prüfung.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von C. Hofer, K. Michel, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen, wobei die für die einzelnen Aufgaben maßgeblichen Höchstpunktzahlen bei der Aufgabenstellung in Klammern ausgewiesen werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12,5 Punkte erforderlich.

Aufgabe 1 (7,5 Punkte)

In einem Krankheitskostentarif für ambulante und stationäre Arztkosten wurden für die Personengruppe Männer in vier aufeinanderfolgenden Auswertungsjahren $u \in \{t-3, t-2, t-1, t\}$ beobachtete Grundkopfschäden $G(u)$ (in DM) ermittelt. t bezeichne das letzte vollständige Auswertungsjahr und T den Extrapolationszeitpunkt.

- (1) In Analogie zur linearen Trendformel für den Grundkopfschaden aus der Kalkulationsvorschrift KalV 1996 bei drei Beobachtungsjahren $u \in \{t-2, t-1, t\}$ mit der Darstellung:

$$\hat{G}(T) = \frac{1}{3} \cdot (G(t-2) + G(t-1) + G(t)) + \frac{3}{2} \cdot (G(t-2) - G(t)), \quad T = t + 2,$$

ist aus den Werten $G(u)$ für vier Beobachtungsjahre eine ähnliche lineare Trendformel zum gleichen Extrapolationszeitpunkt „ $T = 01.07.$ des Jahres $t + 2$ “ herzuleiten (Methode der kleinsten Quadrate; gewöhnlicher linearer Trend ohne Gewichte).

- (2) Gegeben seien die speziellen Beobachtungswerte:

Jahr u	1995	1996	1997	1998
beob. Grundkopfschaden $G(u)$ (in DM)	1981,00	2089,00	2253,00	2377,00

Ist der spezielle Wert $G(u)$ für das Jahr 1998 höher oder niedriger als der entsprechende sich aus diesen vier Beobachtungswerten für den Extrapolationszeitpunkt 01.07.1998 ergebende lineare Trendwert? Wie groß ist die sich aus diesem Trend ergebende mittlere (lineare) Erhöhung der Grundkopfschäden für den Zeitraum vom 01.07.1998 bis zum 01.07.2000 (in %)?

Hinweise:

1. Berechnete Werte können gegebenenfalls geeignet kaufmännisch gerundet werden.
2. Bei der Umrechnung von Zeitpunkten in Zeitdifferenzen kann näherungsweise mit gerundeten Jahres- bzw. Monatszahlen gerechnet werden, d.h. jeder Monat hat 30 Tage; ein Jahr hat 360 Tage ohne zusätzliche Berücksichtigung von Schaltjahren.
3. Als Hilfsmittel zur Lösung dieser Aufgabe sind nur Taschenrechner zugelassen.

Lösung

Zu (1):

Allgemein ergibt sich bei insgesamt m beobachteten Grundkopfschäden $G(u)$, $u = 1, 2, \dots, m$, als Trendfunktion $\hat{G}(T)$ zum Extrapolationszeitpunkt T eine Regressionsgerade. Es gilt:

$$\hat{G}(T) = \bar{G} + C \cdot (T - \bar{u}).$$

Bei $m = 4$ Auswertungsjahren $u = 1, 2, 3, 4$ (vereinfachend anstelle von $u = 1995, 1996, 1997, 1998$) gilt speziell $t = 4$ sowie – im Falle von „T = 01.07. des Jahres $t + 2$ “ – $T = t + 2 = 6$.

Abkürzung: $\Sigma = \sum_{u=1}^4$ – jeweils Summierung über $u = 1, 2, 3, 4$.

Es gilt:

arithmetisches Mittel der Beobachtungswerte $G(u)$:

$$\bar{G} = \frac{1}{4} \cdot \Sigma G(u),$$

arithmetisches Mittel der Beobachtungsjahre u :

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \cdot \Sigma u = \frac{5}{2},$$

empirische Kovarianz von u und G :

$$S_{u,G} = \frac{1}{3} [\Sigma u \cdot G(u) - 4 \cdot \bar{u} \cdot \bar{G}] = \frac{1}{3 \cdot 2} [2 \cdot \Sigma u \cdot G(u) - 5 \cdot \Sigma G(u)],$$

empirische Varianz von u :

$$S_{u^2} = \frac{1}{3} \cdot [\Sigma u^2 - 4 \cdot \bar{u}^2] = \frac{1}{3} \cdot [30 - 25] = \frac{5}{3},$$

empirischer Korrelationskoeffizient:

$$C = \frac{S_{u,G}}{S_{u^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot [2 \cdot \Sigma u \cdot G(u) - 5 \cdot \Sigma G(u)]}{5} = \frac{1}{10} \cdot [-3 \cdot G(1) - 1 \cdot G(2) + 1 \cdot G(3) + 3 \cdot G(4)].$$

Somit gilt für die gesuchte Trendformel im Falle eines beliebigen Extrapolationszeitpunktes T :

$$\hat{G}(T) = \frac{1}{4} \cdot \Sigma G(u) + \frac{T - \frac{5}{2}}{10} \cdot [-3 \cdot G(1) - 1 \cdot G(2) + 1 \cdot G(3) + 3 \cdot G(4)]$$

bzw. speziell für die Mitte des Auswertungsjahres $T = t + 2 = 6$:

$$\hat{G}(T) = \frac{1}{4} \cdot \Sigma G(u) + \frac{7}{20} \cdot [-3 \cdot G(1) - 1 \cdot G(2) + 1 \cdot G(3) + 3 \cdot G(4)]$$

Zu 2:

(a) Für das Jahr 1998 (d. h. für $T = t = 4$) gilt speziell:

$$\hat{G}(4) = \frac{1}{4} \cdot \Sigma G(u) + \frac{3}{20} \cdot [-3 \cdot G(1) - 1 \cdot G(2) + 1 \cdot G(3) + 3 \cdot G(4)] = 2377,80 \text{ DM}$$

Der Schätzwert für das Jahr 1998 ist somit (geringfügig) größer als der tatsächliche Beobachtungswert $G(4) = 2377,00$.

(b) Es gilt:

Mittlere (relative) lineare Erhöhung der Grundkopfschäden je Auswertungsjahr

= Anstieg der Regressionsgerade

= empirischer Regressionskoeffizient C

Somit gilt: mittlere absolute (lineare) Erhöhung je Jahr:

$$\text{Erhöhung} = C = (1/10) \cdot [-3 \cdot G(1) - 1 \cdot G(2) + 1 \cdot G(3) + 3 \cdot G(4)] = 135,20 \text{ DM}$$

prozentuale Erhöhung vom 1. 7. 1998 bis zum 1. 7. 2000 (bezogen auf das Jahr 1998):

$$100 \cdot (2 \cdot C / \hat{G}(1998)) = 11,37\%$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Für eine Krankheitskostenversicherung soll die Verwendung der Zinsüberschüsse (Zinsgutschriften gemäß § 12 a VAG) optimiert werden. Während der gesamten Vertragslaufzeit betrage der jährliche Anstieg der Heilbehandlungskosten (alters- und jahresunabhängig) $p\%$. Als optimal wird angesehen, wenn die Mittel, die aus der Zinsgutschrift resultieren, sukzessive und soweit wie möglich in der angegebenen Reihenfolge eingesetzt werden.

- Z_1 Limitierung des jährlichen Beitragsanstiegs auf $q_2\%$ mit $q_2 \geq p$ für die Zeit des Rentenbezugs ($x + j > 65$). Das Ziel gilt als vollständig erreicht, wenn $q_2 = p$.
- Z_2 Absenkung des Beitragsniveaus zu Beginn des Rentenalters ($x + m = 65$) in der Höhe ($r\%$). Das Ziel gilt als vollständig erreicht, wenn der Beitrag von Vertragsbeginn an um jährlich $p\%$ gestiegen ist.
- Z_3 Limitierung des jährlichen Beitragsanstiegs auf ein minimales $q_1\%$ ($\%$) für die Zeit vor Rentenbezug ($x + j < 65$).

Bezeichne

$*P_{x+j}^a$ den gezillmerten Nettobeitrag eines im Alter x Eintretenden nach der Beitragsanpassung im Alter $x + j$.

${}^kP_{x+j}^a$ wie $*P_{x+j}^a$, aber nach der Limitierung.

Aufgabenstellung

Geben Sie die Formeln (auch implizit) unter Verwendung von ${}^kP_{x+j}^a$ und $*P_{x+j}^a$ für folgende Situationen an und erläutern Sie diese:

- a) Das Ziel 1 wird nicht vollständig erreicht.
- b) Das Ziel 1 wird vollständig erreicht. Weitere Mittel werden gemäß Ziel 2 verwendet. Dieses Ziel wird allerdings nicht vollständig erreicht.
- c) Die Ziele 1 und 2 werden vollständig erreicht. Restliche Mittel werden gemäß Ziel 3 eingesetzt, wobei nur der Fall $q_1 > p$ zu betrachten ist.

Geben Sie allgemein die Formeln für die Beiträge ${}^kP_{x+j}^a$

- a) für $j < m$
- b) für $j = m$
- c) für $j > m$

unter Verwendung von ${}^kP_{x+\dots}^a$ und $*P_{x+\dots}^a$ an.

Lösung (Formeln)

A: $q_2 > p$

⇒ Absenkung im Rentenbezug, aber nicht in dem angestrebten Umfang

$r = 0$ (keine Absenkung bei Rentenbeginn),

$$q_1 = \left(\max_{j < m} \left(\frac{{}^*P_{x+j}^a}{{}^*P_{x+j-1}^a} \right) - 1 \right) \cdot 100 \text{ (keine Limitierung vor Rentenbezug).}$$

- B: $q_2 = p$ und $*P_{x+m}^z \cdot (1 - r/100) > P_x^z \cdot (1 + p/100)^m$
 \Rightarrow Limitierung auf $p\%$ im Rentenbezug, Absenkung bei Rentenbeginn, aber nicht in dem angestrebten Umfang, keine Limitierung vor Rentenbezug (q_1 , wie unter A).
- C: $q_2 = p$ und $*P_{x+m}^z \cdot (1 - r/100) = P_x^z \cdot (1 + p/100)^m$
 \Rightarrow alle Ziele erreicht,
- $$q_1 = \left(\max_{j < m} \left(\frac{{}^k P_{x+j}^z}{{}^k P_{x+j-1}^z} \right) - 1 \right) \cdot 100 .$$

Beiträge

$$j < m ,$$

$${}^k P_{x+j}^z := \min \left((1 + q_1/100) {}^k P_{x+j-1}^z , *P_{x+j}^z \right) ,$$

$$j = m ,$$

$${}^k P_{x+m}^z := *P_{x+m}^z \cdot (1 - r/100) ,$$

$$j > m ,$$

$${}^k P_{x+j}^z := \min \left((1 + q_2/100) \cdot {}^k P_{x+j-1}^z , *P_{x+j}^z \right) .$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

In der Pflegeversicherung sind gemäß § 8 des Poolvertrages Überschüsse aus dem Abrechnungsschema der Rückstellung für erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung (RfuB) zuzuführen.

- (a) Von einem Versicherungsunternehmen sind folgende Größen bekannt:

Nettoverzinsung des Unternehmens $r = 6\%$

Summe der Erträge $E = 10$ Mill.

(einschließlich mittlerer Zins auf Alterungsrückstellung, Schadenrückstellung, sonstige versicherungstechnische Rückstellungen; aber ohne Zins auf RfuB)

Summe der Aufwendungen $A = 7,5$ Mill.

(ohne Zuführung für die RfuB)

Vorjahres RfuB $RfuB_0 = 1,5$ Mill.

Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Zuführung für die RfuB her, und ermitteln Sie die Höhe der Zuführung für obiges Beispiel!

- (b) Mit der Beitragsanpassung zum 1. 1. 1999 wurden erstmals Mittel aus der RfuB zur Limitierung der Nettobedarfsbeiträge eingesetzt.
- (b1) Im wesentlichen erfolgt die Limitierung für 3 Personengruppen. Welche sind das?
- (b2) Leiten Sie aus der Beitragsberechnungsformel jeweils eine untere Schranke für die M1- bzw. M2-Grenze her!
- (b3) Geben Sie die Formeln für die einzelnen Umlagekomponenten an, und erläutern Sie die Auswirkungen der Limitierung auf die Umlagekomponenten!

Lösung

- (a) Für die Erhöhung der erfolgsunabhängigen Beitragsrückerstattung werden zwei Drittel des Endbetrages EB aus dem Abrechnungsschema verwendet, d. h. für die Zuführung Z gilt:

$$Z = 2/3 * EB . \quad (1)$$

Der Endbetrag EB ergibt sich aus der Summe der Erträge zuzüglich Zins auf die mittlere erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung, vermindert um den Gesamtaufwand:

$$EB = E + r * (RfuB_0 + 0,5 * Z) - A . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man

$$1,5 * Z = E + r * (RfuB_0 + 0,5 * Z) - A .$$

Durch Umformung nach Z ergibt sich

$$Z = \frac{E + r * RfuB0 - A}{1,5 - 0,5 * r}$$

Für die angegebenen Größen ergibt sich damit eine Zuführung in Höhe von 1,76 Mill.

(b) (b1) Die Limitierung erfolgt für:

1. Personen, die nach 1915 geboren sind und deren Nettobedarfsbeitrag über der M1-Grenze liegt,
2. beitragsfreie Kinder im Alter zwischen 0 und 18,
3. Personen, die nicht unter 1. fallen, deren Nettobedarfsbeitrag aber über der M2-Grenze liegt.

(b2) Der Zahlbeitrag darf durch die Limitierung des Nettobedarfs nicht sinken. Dies ist nur der Fall bei Personen, die auf den Höchstbeitrag gekappt werden. Für diese ergibt sich aus der Beitragsberechnungsformel

$$b_{x/y} (\Gamma = 0) = \min \left\{ \frac{P_{x/y} + U}{12 * (1 - \sigma)}, Hg - \frac{\Gamma_{\max}}{12 * (1 - \sigma)} \right\},$$

daß

$$\frac{P_{x/y} + U}{12 * (1 - \sigma)} \geq Hg - \frac{\Gamma_{\max}}{12 * (1 - \sigma)} \text{ gilt.} \quad (*)$$

Man unterscheidet zwei Gruppen, zum einen Personen, die nur zum Teil für ihren Nettobedarf aufkommen, d. h. es gilt:

$$\frac{P_{x/y}}{12 * (1 - \sigma)} \geq Hg - \frac{\Gamma_{\max}}{12 * (1 - \sigma)},$$

daraus folgt:

$$\frac{P_{x/y}}{12} \geq Hg - \sigma * Hg - \frac{\Gamma_{\max}}{12},$$

d. h. M1 muß größer sein als die Höchstgrenze in der sozialen Pflegeversicherung vermindert um den Sicherheitszuschlag und die Stückkosten.

Die zweite Gruppe kommt für ihren Nettobedarf auf, aber nur zum Teil für die Umlage, hier gilt (*) und damit

$$\frac{P_{x/y}}{12} \geq Hg - \sigma * Hg - \frac{\Gamma_{\max}}{12} - U.$$

Die Grenze M2 muß damit größer sein als der Höchstbeitrag in der sozialen Pflegeversicherung, vermindert um Sicherheitszuschlag, Stückkosten und Umlage.

Zudem wurde die M2-Grenze so gewählt, daß die in den Jahren 1995 und 1996 eingestellt RfuB in allen Unternehmen poolrelevant verbraucht wurde.

(b3) Die einzelnen Umlagekomponenten sind:

$$1. \text{ Umlage für beitragsfreie Kinder: } UK = \sum_x LB K_x * \max \{K_x, K_{x0}\}.$$

Da der limitierte Nettobedarf nicht in die Umlage einfließt, bleibt der Umlagebetrag konstant. Bei der Berechnung der maximalen Umlage fließt jedoch der Limitierungsbeitrag mit ein.

2. Umlage für die Höchstbeitragsbegrenzung:

$$UG = \sum_{x+m=y+m=19}^{100} (L_{x+m} + L_{y+m}) * \max \{P_{x/y+m} (j) - [12 * (1 - \sigma) * Hg - \Gamma_{\max}], 0\}.$$

Durch die Limitierung kommt es zur Senkung des geschlechtsunabhängigen Jahresnettobeitrags $P_{x/y+m} (j)$. Was wiederum zur Senkung der Umlage UG führt.

3. Umlage für die Ehegattenlimitierung:

$$UE = \sum_{x+m=y+m=19}^{100} (LE_{x+m} + LE_{y+m}) \\ * \max \{ P_{x/y+m}(j) - [12 * 0.75 * (1 - \sigma) * Hg - \Gamma_{\max}], 0 \} .$$

Analog zu 2. kommt es zur Senkung von UE.

4. Umlage von Bahn und Post

Bedingt durch die Senkung der Umlagen UG und UE kommt es zur Senkung der sogenannten ‚Alten Last‘:

$$\text{Alte Last} = \frac{D1_{\text{GPV}} * (\text{UK} + \text{UG} + \text{UE})^{\text{neu}}}{(\text{UK} + \text{UG} + \text{UE})^{\text{alt}}} .$$

Da $UBP^{\text{PVN}} = \text{AlteLast} * \frac{\sum L_{x(y)}^{\text{PVN}}}{\sum L_{x(y)}}$ bzw. $UBP^{\text{PVB}} = -UBP^{\text{PVN}}$ gilt, kommt es im Tarif

PVN zu einer Senkung der Umlage UBP. Im Tarif PVB kommt es zwar aufgrund des negativen Vorzeichens zu einer formalen Erhöhung der Umlage UBP, insgesamt sinkt jedoch der Umlagebedarf, da die Umlagen UG und UE gesunken sind.

Aufgabe 4 (7,5 Punkte)

Die Bundesregierung hat im Juni 1999 einen Gesetzentwurf zur Gesundheitsreform vorgelegt. Stellen Sie hinsichtlich der Themen

- Beitragszuschlag
- jährliche Zuteilung zur Beitragsermäßigung im Alter und ihre Verwendung
- Beitragsanpassung

dar,

- welche Änderungen (Vergleich bisher/geplant) und welche Neuerungen vorgesehen sind
- welche Argumente für und gegen den Gesetzentwurf vorgebracht werden.

Lösung

Beitragszuschlag – bisher

Beitragszuschlag zur Beitragsreduzierung im Alter zulässig, aber nicht obligatorisch.

Beitragszuschlag – geplant

Betroffen:

Substitutive Krankheitskostenversicherung mit Ausnahme der befristeten Ausbildungs- und Auslandsreise-Krankenversicherung.

10% Zuschlag zur gezillmerten Bruttoprämie zwischen Alter 21 und 60.

Verwendung:

Milderung von Beitragserhöhungen ab Alter 65.

Zuschlag im Bestand:

- mit 2% beginnend, jährlich um 2 Prozentpunkte bis auf 10% steigend
- Widerspruchsrecht des Versicherungsnehmers.

Jährliche Zuteilung zur Beitragsermäßigung im Alter und ihre Verwendung

Höhe der Zuteilung

bisher: 80% des Überzinses, höchstens 2,5% der positiven Alterungsrückstellungen des Vorjahres

geplant: 90% des Überzinses, unbegrenzt.

Verwendung

- bisher: 50% als Direktgutschrift zur künftigen oder sofortigen Prämienermäßigung,
50% als Festlegung für über 65-jährige zur Prämienermäßigung innerhalb von drei Jahren.
- geplant: Auf Mittel aus dem Beitragszuschlag entfallende Zuteilung + 50% des Restes zur zeitlich unbefristeten Finanzierung von Mehrprämien ab Alter 65; ab Alter 80 zur sofortigen Prämienenkung.
Rest als Festlegung für über 65-jährige zur Prämienermäßigung innerhalb von drei Jahren.
Der genannte Prozentsatz (50%) erhöht sich jährlich um 2 Prozentpunkte bis auf 100% in 25 Jahren.
Die Verwendung der festgelegten Mittel und von Mitteln aus der RfB bedarf der Zustimmung des Treuhänders.

Beitragsanpassung

Neue Regelungen:

- Eine Anpassung erfolgt insoweit nicht, als die bestehende Kalkulation unzureichend war und der Aktuar dies hätte erkennen müssen.
- Bei einer Beitragserhöhung in der substitutiven Krankenversicherung erhalten über 60-jährige
 - einen Hinweis auf das Umstufungsrecht
 - einen Hinweis auf die Möglichkeit des Wechsels in den Standardtarif
 - Umstufungsangebote für bis zu 10 Tarife (einschl. Standardtarif) unter Angabe der (niedrigeren) Prämie.

Bewertung Beitragszuschlag

Pro:

- Beitragsentlastung im Alter.

Contra:

- Zwangscharakter
- Pauschaler Zuschlag berücksichtigt Einzelfall nicht. Im Extremfall kann sich bei frühem Beginn des Sparvorgangs eine Rentenzahlung im Alter ergeben
- Verstoß gegen den Grundsatz der Verhältnismäßigkeit, da Kostenverlauf ungewiß. Anreiz für Anbieter zur Kostenerhöhung
- Europarechtlich problematisch, da nicht nach versicherungsmathematischen Methoden ermittelt
- Hoher Verwaltungsaufwand, da auch Verträge ohne Zuschlag zu führen sind (Widerspruchsrecht)
- Neugeschäftsrückgang mit negativen Auswirkungen auf die Beiträge älterer Versicherter
- Zuschlag hat keine kurzfristige Entlastungswirkung
- Zuschlag diskriminiert Frauen, da bei Frauen der gleiche Entlastungseffekt mit einem niedrigeren Zuschlagsprozentsatz erreichbar ist
- In bestimmten Szenarien ist der Zuschlag bei gleichzeitiger Erhöhung der Überzinszuschreibung überflüssig.

Bewertung Zuteilung zur Beitragsermäßigung im Alter

Pro:

- Beitragsentlastung im Alter.

Contra:

- Eingriff in unternehmerische Entscheidungsfreiheit
- erschwerte Eigenkapitalbildung.

Bewertung Beitragsanpassung

Pro:

- Das Risiko einer Falschkalkulation wird vom Versicherer getragen
- Aufklärung über Wechselmöglichkeiten.

Contra:

- Die Wirksamkeit einer Beitragsanpassung wird vom Ermessen „eines“ Versicherungsmathematikers abhängig gemacht statt von der Einhaltung der Kalkulationsverordnung.
- Der Versicherte wird von einer Papierflut ertränkt.
- Es besteht die Gefahr, daß der Versicherte die Konsequenzen des Tarifwechsels (andere Leistungsgestaltung) nicht überblickt.