

Prüfung im Oktober 2007 über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider

Am 20. Oktober 2007 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 12 Teilnehmern haben 11 die Prüfung bestanden.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von A. Gartmann, C. Hofer, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen, wobei die für die einzelnen Aufgaben maßgeblichen Höchstpunktzahlen bei der Aufgabenstellung in Klammern ausgewiesen werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12 Punkte erforderlich.

1. Aufgabe (8,0 Punkte)

In einem altersmäßig heterogenen Risikokollektiv mit einem wachsenden Kopfschadenprofil wird der zufällige Schwankungsfehler für die Gesamtleistungen S eines Auswertungsjahres analysiert.

- (1)
 - (a) Geben Sie neben dem Variationskoeffizienten eine weitere Maßzahl für den Vergleich des relativen Schwankungsrisikos von zwei Risikokollektiven an.
 - (b) Wie kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zufälligen relativen Schwankungsfehlers bei hinreichend großen Risikokollektiven näherungsweise dargestellt werden? Welchen konkreten Einfluss auf diese Wahrscheinlichkeitsverteilung hat dabei der Variationskoeffizient von S ?
 - (c) Wie kann der Variationskoeffizient von S explizit mit Hilfe der Erwartungswerte und der Variationskoeffizienten der Einzelrisiken dargestellt werden?
- (2) Als Maßzahl für das relative Schwankungsrisiko wird der Variationskoeffizient benutzt. Welche Änderungen für dieses Schwankungsrisiko ergeben sich dann erwartungsgemäß, wenn im betrachteten Risikokollektiv lediglich die folgenden risikorelevanten Faktoren abgeändert werden:
 - (a) Bei unveränderter (relativer) Altersverteilung verdoppelt sich das Bestandsvolumen.
 - (b) Bei unverändertem Bestandsvolumen erhöht sich das mittlere Alter um ca. 10 Jahre.
 - (c) Anstelle eines rein stationären Risikos wird ein rein ambulantes Risiko betrachtet. Altersverteilung und Bestandsvolumen werden dabei als unverändert vorausgesetzt.
 - (d) Die jährlichen tariflichen Selbstbehalte werden von 0,- auf 500,- € erhöht. Altersverteilung, Bestandsvolumen und subjektives Anspruchsverhalten auf Krankheitskostenleistungen (ohne Berücksichtigung der Selbstbehalte) mögen

dabei unverändert bleiben.

- (e) Die prozentualen Selbstbehalte werden von 10 % auf 20 % erhöht.
 Altersverteilung,
 Bestandsvolumen und subjektives Anspruchsverhalten mögen dabei wiederum
 unverändert bleiben.

Begründen Sie Ihre jeweilige Aussage!

Hinweise:

zu (2):

Ausreichend ist die Begründung einer qualitativen Aussage wie z.B.:

Das Schwankungsrisiko vergrößert sich, verkleinert sich oder bleibt bei der angegebenen
 Änderung unverändert. Eine formelmäßige Abschätzung ist nicht zwingend erforderlich.

Lösung

zu (1)

- (a) Ist $\varepsilon = (S - ES) / ES$ der relative Schwankungsfehler, so lässt sich das relative
 Schwankungsrisiko beispielsweise mit dem Erwartungswert $m_1 = E|\varepsilon| = E|S - ES| / |ES|$
 vergleichen. Eine andere Möglichkeit ist die Wahrscheinlichkeit $m_2 = P(|\varepsilon| > M)$ für eine
 geeignete feste Zahl $M > 0$.

- (b) Wegen des Zentralen Grenzwertsatzes ist S für große Bestandsumfänge näherungsweise
 normalverteilt. Die mit dem Erwartungswert zentrierte und der Wurzel aus der Varianz
 normierte Summe $\tilde{S} = (S - ES) / \sqrt{\text{Var}S}$ ist somit näherungsweise standardnormalverteilt. Ist
 v_S der Variationskoeffizient von S , so ergibt sich für den relativen Schwankungsfehler ε
 offenbar die Darstellung

$$(*) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{\text{Var}S}}{ES} \cdot \frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var}S}} = v_S \cdot \tilde{S}.$$

Demzufolge ist die Zufallsgröße ε ebenfalls näherungsweise normalverteilt mit
 Erwartungswert 0 und der Varianz v_S^2 . Hieraus lassen sich leicht Fehlerschranken für ε
 ableiten, sofern der Variationskoeffizient v_S zumindest näherungsweise bekannt ist.

- (c) In einem individuellen Kopfschadenmodell seien $\mu(x)$ und $\sigma^2(x)$ die Erwartungswerte
 bzw. die Varianzen der individuellen Risiken zum Alter x sowie $L(x)$ die entsprechende
 Anzahl der Versicherten zum Alter x . Für Erwartungswerte und Varianzen gelten dann

$$ES = \sum_x \mu(x) \cdot L(x), \quad \text{Var}S = \sum_x \sigma^2(x) \cdot L(x).$$

Die Formel für die Varianz von S gilt dabei bei Unabhängigkeit der Einzelrisiken als

Modellvoraussetzung. Ist $Q(x) = L(x)/L$ mit $L = \sum_x L(x)$ die normierte Altersverteilung, so ergeben sich für den Variationskoeffizient von S folglich

$$v_S = \frac{\sqrt{\text{Var}S}}{ES} = \frac{\sqrt{\sum_x \sigma^2(x) \cdot L(x)}}{\sum_x \mu(x) \cdot L(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_x \sigma^2(x) \cdot Q(x)}}{\sum_x \mu(x) \cdot Q(x)} =$$

(**)

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_x v^2(x) \cdot \mu^2(x) \cdot Q(x)}}{\sum_x \mu(x) \cdot Q(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot w_S$$

Hierbei stellen $v(x) = \sigma(x)/\mu(x)$ die Variationskoeffizienten der Einzelrisiken zum Alter x dar. Die bestandsnormierten Variationskoeffizienten w_S sind nur von der normierten Bestandsverteilung $Q(x)$, nicht aber vom absoluten Bestandsvolumen L abhängig.

zu (2)

Verglichen werden die relativen Schwankungsfehler der Summen S, S' vor bzw. nach der jeweiligen Änderung. Benutzt werden außerdem die Darstellungen (*) und (**).

- (a) Offenbar gilt in diesem Fall $v_{S'} = (1/\sqrt{2}) \cdot v_S$. Bei Benutzung des Variationskoeffizienten als Maßzahl sinkt somit das relative Schwankungsrisiko um den Faktor $1/\sqrt{2}$.
- (b) Bei nichtfallenden Profilen ist der Variationskoeffizient der Einzelrisiken bei wachsendem Alter x erfahrungsgemäß nichtwachsend. Erwartungsgemäß gilt dann in (**)
 $w_S \geq w_{S'}$ und somit auch $v_S \geq v_{S'}$. Entsprechend sinkt das Schwankungsrisiko bei wachsendem mittlerem Alter des Risikokollektivs.
- (c) Bei stationären Risiken sind die Variationskoeffizienten der Einzelrisiken für das gleiche Alter bekanntlich wesentlich größer als bei ambulanten Risiken. Erwartungsgemäß gilt dann in (**)
 $w_S \geq w_{S'}$. Das Schwankungsrisiko bei stationären Risiken ist somit größer als bei ambulanten Risiken.
- (d) Erwartungsgemäß wächst der Variationskoeffizient der Einzelrisiken bei wachsenden absoluten Selbstbehalten. Zu erwarten ist somit $w_S \leq w_{S'}$. Entsprechend verhält sich das relative Schwankungsrisiko.
- (e) Bei Änderung der prozentualen Selbstbehalte ändert sich die Verteilung der individuellen Leistungsbeträge nur um einen Skalenfaktor. Um den gleichen Skalenfaktor ändern sich auch die Erwartungswerte $\mu(x)$. Die Variationskoeffizienten $v(x)$ ändern sich dagegen

nicht. Wegen (**) gilt dann $v_S = v_{S'}$. Diese Änderung hat unter den getroffenen Modellvoraussetzungen somit keine Auswirkung auf das relative Schwankungsrisiko.

Hinweis:

Die Aussagen in (b), (c) und (d) gelten in praxi in allen bisher analysierten Krankheitskostentarifern mit nichtfallenden Profilen. Dessen ungeachtet lassen sich diese Aussagen jedoch nicht allgemeingültig ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der individuellen Krankheitskosten nachweisen.

2. Aufgabe (7,0 Punkte)

- a) Beantworten Sie auf Grundlage der einschlägigen Bestimmungen des Versicherungsvertragsgesetzes (§ 178g Abs. 2 alte Fassung), des Versicherungsaufsichtsgesetzes (§ 12 b Abs. 2 alte Fassung) und des § 8b der Musterbedingungen (MB/KK 94) die Fragen nach dem Recht und nach der Verpflichtung des Versicherungsunternehmens zur Überprüfung und ggf. Anpassung der Beiträge. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung von Schwellenwerten ein.
- b) Nach der Reform des Versicherungsvertragsgesetzes ist neben den Versicherungsleistungen auch die Sterbewahrscheinlichkeit als maßgebliche Rechnungsgrundlage anzusehen, deren Veränderung eine Überprüfung der Beiträge auslösen kann. Der Arbeitskreis Sterbetafel des PKV-Verbandes hat Vorschläge zur Umsetzung dieser neuen Vorschrift erarbeitet. Erläutern Sie diese Berechnung der Auslösenden Faktoren und geben Sie die Konsequenzen für das Recht und die Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung der Beiträge an. Unterstellen Sie dabei, dass in den Tarifbedingungen bisher für die Überprüfbarkeit der Prämien eine Mindestgrenze für die Abweichung der erforderlichen von den in den technischen Berechnungsgrundlagen kalkulierten Versicherungsleistungen von 5 vom Hundert festgelegt wurde

Lösung:

zu a)

Das Versicherungsvertragsgesetz (VVG) regelt das Verhältnis zwischen Versicherer und Versicherungsnehmer. In § 178g Abs. 2 VVG wird dem Versicherer für Versicherungsverhältnisse, bei denen das ordentliche Kündigungsrecht des Versicherers gesetzlich oder vertraglich ausgeschlossen ist, das **Recht** eingeräumt, bei einer als nicht nur vorübergehend anzusehenden Veränderung des tatsächlichen Schadensbedarfs gegenüber der technischen Rechnungsgrundlage und der daraus errechneten Prämie, die Prämie entsprechend den berichtigten Rechnungsgrundlagen auch für bestehende Versicherungsverhältnisse neu festzusetzen, sofern ein unabhängiger Treuhänder die Rechnungsgrundlagen überprüft und der Prämienanpassung zugestimmt hat. Schwellenwerte für die Veränderung des Schadenbedarfs sind hier nicht vorgesehen. Voraussetzung ist lediglich, dass die Änderung nicht als nur vorübergehend angesehen werden darf.

Das Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) regelt das Verhältnis zwischen Versicherer und der Aufsicht. Zur Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der Verträge wird der Versicherer durch § 12 b Abs. 2 VAG bei einer bei der Gegenüberstellung der erforderlichen mit den kalkulierten Versicherungsleistungen festgestellten Abweichung von mehr als 10 vom Hundert verpflichtet, alle Prämien dieses Tarifs zu überprüfen und, wenn die Abweichung als nicht nur als vorübergehend anzusehen ist, mit Zustimmung des Treuhänders anzupassen. Der Versicherer kann in den allgemeinen Versicherungsbedingungen einen geringeren Vomhundertsatz vorsehen. Bei einer Überschreitung des gesetzlich (10 vom Hundert) oder tariflich (kleiner oder gleich 10 vom Hundert) festgelegten Schwellenwerts ist der Versicherer also verpflichtet, die Prämien zu überprüfen und ggf. anzupassen. Für die Frage, ob er überprüfen und ggf. anpassen darf, wird also auch im VAG kein Schwellenwert festgelegt.

Nach § 8b Abs. 1 der Musterbedingungen (MB/KK 94) werden alle Beiträge dieses Tarifs vom Versicherer überprüft und, soweit erforderlich, mit Zustimmung des Treuhänders

angepasst, wenn die Gegenüberstellung eine Abweichung von mehr als dem tariflich festgelegten Vomhundertsatz ergibt. Nach dem Wortlaut ist also hier nur geregelt, dass eine Überprüfung und ggf. Anpassung erfolgt, wenn der Schwellenwert für die Abweichung überschritten wird. Damit wird noch nichts darüber ausgesagt, was und ob etwas passiert, wenn der Schwellenwert nicht überschritten wird. Hier steht nicht, dass die Überprüfung und ggf. Anpassung **nur** dann erfolgt, wenn die genannten Voraussetzungen erfüllt sind. Also wird bei wörtlicher Interpretation auch nicht ausgeschlossen, dass der Versicherer vor Überschreiten des Schwellenwerts überprüfen und ggf. anpassen darf. Doch die in § 12 b (2) eingeräumte Möglichkeit, einen niedrigeren Schwellenwert zur Überprüfungsverpflichtung festzulegen, wurde von vielen Unternehmen so umgesetzt, dass sie in ihren Tarifbedingungen einen zweiten Schwellenwert (oftmals 5 vom Hundert) eingeführt haben, ab der eine Überprüfung und ggf. Anpassung erfolgen kann. Damit wird erstmals eindeutig geregelt, dass das Versicherungsunternehmen keine Anpassung vornehmen darf, wenn dieser Schwellenwert noch nicht überschritten ist. Unabhängig von dieser speziellen Festlegung in den Tarifbedingungen sind Gerichte dazu übergegangen, grundsätzlich den gesetzlich oder tariflich festgelegten Schwellenwert auch als Untergrenze für die Anpassungsmöglichkeit anzusehen. Nicht zuletzt hat sich auch das BGH in seiner Entscheidung, wonach Anpassungen nur in den Beobachtungseinheiten eines Tarifs angepasst werden dürfen, in denen der Schwellenwert tatsächlich überschritten wurde, dieser Auffassung angeschlossen.

Darüber hinaus ist das Anpassungsrecht noch durch § 12 b Abs. 2 Satz 4 VAG eingeschränkt, wonach eine Anpassung insoweit nicht erfolgen darf, als die Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt der Erst- oder einer Neukalkulation unzureichend kalkuliert waren und ein ordentlicher und gewissenhafter Aktuar dies hätte erkennen müssen. Letztendlich ist zu beachten, dass nach § 12 Abs. 4 VAG die Prämien für das Neugeschäft nicht niedriger sein dürfen als die Prämien, die sich im Altbestand für gleichaltrige Versicherte ohne Berücksichtigung ihrer Alterungsrückstellung ergeben würden.

zu b)

Die Berechnung des Auslösenden Faktors für die Gegenüberstellung der erforderlichen und der in den technischen Berechnungsgrundlagen kalkulierten Versicherungsleistungen bleibt unverändert.

Laut § 12b Abs. 2a VAG-E sind die erforderlichen und die kalkulierten Sterbewahrscheinlichkeiten durch Betrachtung von Barwerten zu vergleichen. In der Gesetzesbegründung wird noch präzisiert, dass hier die Leistungsbarwerte gemeint sind. Da die Entscheidung für oder gegen eine Anpassung natürlich nicht je Alter separat getroffen werden, schlägt der Arbeitskreis Sterbetafel eine Gewichtung mit den Bestandszahlen einer Beobachtungseinheit vor:

$$AF^{\text{Sterblichkeit}} := [\Sigma(A_x^{\text{neu}} \cdot L_x)] / [\Sigma(A_x^{\text{alt}} \cdot L_x)]$$

Ziel der neuen gesetzlichen Vorschrift ist laut Gesetzesbegründung die „Vermeidung von Beitragsprüngen, die sich aus der Kumulierung von Anpassungserfordernissen ergeben können“. Dies kann nur erreicht werden, wenn die beiden Auslösenden Faktoren nicht nur separat, sondern auch zusammengefasst betrachtet werden. Daraus ergibt sich ein dritter Auslösender Faktor:

$$AF^{\text{Gesamt}} = AF^{\text{Schaden}} \cdot AF^{\text{Sterblichkeit}}$$

Da laut Aufgabenstellung in den Tarifbedingungen für die Überprüfbarkeit der Beiträge eine Mindestgrenze für die Abweichung der erforderlichen von den in den technischen

Berechnungsgrundlagen kalkulierten Versicherungsleistungen von 5 vom Hundert festgelegt wurde, ergeben sich folgende Konsequenzen aus der Berechnung der drei Auslösenden Faktoren:

1. Abweichung(AF^{Schaden})

< 5 % → weder Recht noch Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

> 5 % → Recht, aber keine Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

> 10 % → Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

2. Abweichung($AF^{\text{Sterblichkeit}}$)

< 5 % → weder Recht noch Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

> 5 % → Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

3. Abweichung(AF^{Gesamt})

< 5 % → weder Recht noch Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

> 5 % → Recht, aber keine Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

> 10 % → Verpflichtung zur Überprüfung und ggf. Anpassung

3. Aufgabe (7,0 Punkte)

- a) Stellen Sie die Bestimmung des Übertragungswertes insbesondere auch formelmäßig dar einschließlich der Sonderregelung für den Bestand, der vor dem 01.01.2009 versichert war.
- b) Warum ist eine Historisierung des Basistarifs erforderlich?
- c) Wird mit der getroffenen Regelung eine realistische Historisierung des Basistarifs erreicht?
- d) Diskutieren Sie den gesetzlichen Ansatz für die Bestandskunden vor dem Hintergrund der Folgen für die Versicherungsunternehmen:
 - i) Finanzierung des Übertragungswertes für den Bestand
 - ii) Umsetzung in der Betriebstechnik

Lösung:

zu a)

Die Ermittlung des Übertragungswertes ist in §13a KalV hinterlegt:

„§ 13a Übertragungswert

(1) Der Übertragungswert im Sinne des § 12 Abs. 1 Nr. 5 des Versicherungsaufsichtsgesetzes berechnet sich als Summe aus der Alterungsrückstellung, die aus dem Beitragszuschlag nach § 12 Abs. 4a des Versicherungsaufsichtsgesetzes entstanden ist, und der Alterungsrückstellung für die gekündigten Tarife, höchstens jedoch der Alterungsrückstellung, die sich ergeben hätte, wenn der Versicherte von Beginn an im Basistarif versichert gewesen wäre (fiktive Alterungsrückstellung).

(2) Bei der Berechnung der fiktiven Alterungsrückstellung sind die Rechnungsgrundlagen des brancheneinheitlichen Basistarifs nach § 12 des Versicherungsaufsichtsgesetzes zu verwenden. Für Versicherungszeiten vor dem 1. Januar 2009 sind die Rechnungsgrundlagen der Erstkalkulation des Basistarifs mit folgenden Maßgaben zu verwenden:

1. Anstelle der Sterbetafel der Erstkalkulation ist die Sterbetafel zu verwenden, welche das Unternehmen bei der Neu- und Nachkalkulation im betreffenden Jahr verwendet hat.
2. Die Grundkopfschäden sind für jedes Jahr um 5 vom Hundert zu vermindern.“

Die Formulierung des Absatz (1) ist wie folgt zu interpretieren:

$${}^t_0 \ddot{U}_{x_0} = {}^t_0 V_{x_0}^{GZ} + \max\{0, \min[{}^t_0 V_{x_0}, {}^t_0 V_{x_0}^B]\}$$

Offen ist dabei allerdings die Übertragung der übrigen §12a (2) Mittel

zu b)

Die Regelung im Absatz 2 enthält eine Rückrechnung des Basistarifs für Bestandskunden, die erforderlich ist, um die historisch gebildeten Rückstellungen in den Normaltarifen mit der

Rückstellung des Basistarifs vergleichen zu können. Denn Rückstellungen, die bis zum 01.01.2009 in den Normaltarifen der Bestandskunden gebildet wurden, unterlagen einer Entwicklung durch Beitragsanpassungen und Umstufungen.

Um eine realistische Rückstellung eines „historisierten“ Basistarifs angeben zu können, muss auch der Basistarif eine den Normaltarifen vergleichbare Entwicklung der Rechnungsgrundlagen vor dem 01.01.2009 dem eigentlichen Einführungsstermin durchlaufen.

zu c)

Die „Historisierung“ des Basistarifs ist aber laut Verordnungstext nur über eine Veränderung der Sterbetafeln und Grundkopfschäden möglich und deckt somit nur einen Teil einer tatsächlichen Tarifentwicklung ab.

Hinzu kommt, dass die Sterbetafeländerungen im Vergleich zu den übrigen Rechnungsgrundlagen nur einen geringen Einfluss auf die Alterungsrückstellungsentwicklung haben und die 5%-ige jährliche Steigerung des Grundkopfschadens eine grobe Verallgemeinerung der tatsächlichen Entwicklung darstellt.

Die wesentlichen Rechnungsgrundlagen Profil und Storno werden dagegen in der Verordnung nicht berücksichtigt, obwohl diese einen wesentlichen Anteil an der Rückstellungsbildung haben.

Damit wird keine realistische Historisierung erreicht.

zu d)

i) Finanzierung

Die Kündigung der Bestandskunden mit Mitgabe des Übertragungswertes ist auf das 1. Halbjahr 2009 beschränkt. Die Mitgabe eines Übertragungswertes für diese „Altverträge“ ist derzeit nicht finanziert. Die hierfür nötige Absenkung der Stornowahrscheinlichkeiten für den Bestand, könnte nur im Zusammenhang mit einer Beitragsanpassung vorgenommen werden, also frühestens im Jahr 2008. Da die zu erwartende Kündigungen eine nur vorübergehende Entwicklung darstellen, ist eine generelle Senkung der Stornowahrscheinlichkeiten aber wohl nicht möglich.

Im Ergebnis werden also die Übertragungswerte für Bestandsversicherte nicht finanziert sein. Die zu erwartenden Verluste aus den nicht finanzierten Übertragungswerten können exakt nach oben abgeschätzt werden: Der maximale Verlust ist die rechnermäßige Vererbung und geht zu Lasten des Geschäftsjahres. Nur eine generelle Senkung des Stornos in 2008 würde den Verlust reduzieren.

ii) Folgen für die Betriebstechnik

Die Regelungen des Absatzes 2 machen es erforderlich, individuelle Informationen über den Versicherungsverlauf zu kennen. Zum einen ist der Termin des Erstabschlusses relevant, da bis zu diesem Zeitpunkt eine Rückberechnung erforderlich ist und zum anderen wird auch der Verlauf seit dem Erstabschluss benötigt, da es insbesondere bei Wechsel zwischen Beihilfe- und Nichtbeihilfetarifen zu Brüchen im Rückstellungsverlauf kommen kann.

Eine maschinelle Lösung ist damit auf eine vorhandene, zum Zugriff bereit stehende Historie angewiesen. Gerade bei sehr frühen technischen Beginnen wird dies in den allermeisten Fällen jedoch nicht möglich sein. Damit wäre eine händische Auswertung der Versicherungsverträge erforderlich. Dies ist bei den zu erwartenden Anfragen der Bestandskunden nicht zu realisieren.

Eine exakte Ermittlung des Übertragungswertes für die Bestandskunden ist daher technisch nur schwer umsetzbar.

4. Aufgabe (8,0 Punkte)

Im Jahr 2005 wurde von der deutschen Versicherungswirtschaft ein Solvency II-kompatibler Standardansatz für private Krankenversicherer entwickelt. In diesem Modell ist der Betrag der benötigten Mittel eine bestimmte aus der Wahrscheinlichkeitstheorie stammende Größe.

- a) Um welche Größe handelt es sich dabei?
- b) Wie lautet ihre formale wahrscheinlichkeitstheoretische Definition?
- c) Welche Bedeutung haben die in diese Definition eingehenden Parameter im Modell?
- d) Zur Bestimmung der benötigten Mittel wird die Aggregationsformel verwendet.
 - i) Geben Sie die Ausgangssituation für die Anwendung der Formel an.
 - ii) Geben Sie die Aggregationsformel an.
 - iii) Beweisen Sie die Aggregationsformel.

Lösung:

zu a)

Es handelt sich um das aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannte $(1-\alpha)$ -Quantil einer Verteilung. In der Ökonomie wird es als value at risk zum Signifikanzniveau α bezeichnet.

zu b)

Das $(1-\alpha)$ -Quantil einer Verteilung F ist $\text{VaR} = \min \{t: F(t) \geq 1 - \alpha\}$

zu c)

F ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X . X ist der Jahresverlust des Unternehmens, d.h. X ist negativ, wenn ein Gewinn gemacht wird. Es ist $\alpha = 0,005$. VaR ist also die Verlustschwelle, die nur mit 0,5% Wahrscheinlichkeit überschritten wird.

zu d)

i)

$X = \sum_{i=1}^n X_i$ (aggregierter Verlust) mit $X_i =$ Verlust aus Risikoquelle i , $i=1, \dots, n$

wobei (X_1, \dots, X_n) multivariat normalverteilt mit

$E_i = \mu_i = -E(X_i)$ erwarteter Gewinn, positiv bei positiver Gewinnerwartung

$\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i) = E((X_i + \mu_i)^2)$ Varianz

$\rho_{ij} = E((X_i + \mu_i)(X_j + \mu_j)) / (\sigma_i \sigma_j)$ Korrelationskoeffizient

Dann gilt:

X_i hat die Verteilungsfunktion von $N(-\mu_i, \sigma_i)$, also $t \rightarrow \Phi((t + \mu_i) / \sigma_i)$

Das benötigte Kapital für Risikoquelle i ist $\text{VaR}_i = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma_i - \mu_i$

X ist normalverteilt mit Varianz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ und Erwartungswert $-E = -\mu = -\sum_{i=1}^n \mu_i$

Das gesamte benötigte Kapital ist $\text{VaR} = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \sigma - \mu$

ii)

Die Aggregationsformel lautet:

$$\text{VaR} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\text{VaR}_i + E_i) \cdot (\text{VaR}_j + E_j) \cdot \rho_{ij}} - \sum_{i=1}^n E_i$$

iii)

$$\begin{aligned} \text{VaR} &= \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu = \Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} - \sum_{i=1}^n E_i \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\Phi^{-1}(1-\alpha))^2 \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} - \sum_{i=1}^n E_i \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_i - E_i + E_i)(\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_j - E_j + E_j)\rho_{ij}} - \sum_{i=1}^n E_i \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\text{VaR}_i + E_i)(\text{VaR}_j + E_j)\rho_{ij}} - \sum_{i=1}^n E_i \end{aligned}$$