Bericht zur Prüfung im Oktober 2004 über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider (Köln)

Am 23. Oktober 2004 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 16 Teilnehmern bestanden 14 die Prüfung.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von A. Gartmann, C. Hofer, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen, wobei die für die einzelnen Aufgaben maßgeblichen Höchstpunktzahlen bei der Aufgabenstellung in Klammern ausgewiesen werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12,5 Punkte erforderlich.

1. Aufgabe (7,5 Punkte)

Ausgangslage ist ein Ambulanttarif für Männer mit einem Selbstbehalt von 170 €. Der Tarif wird mit 4 Monatsbeiträgen gezillmert. Das Ausgangsprofil (VerBAV 02/01) soll aufgesteilt werden (ohne Ausgleich im Grundkopfschaden). Betrachten Sie neben der Ausgangssituation die beiden Variationen:
Variation 1: schrittweise Aufsteilung des Profils um insgesamt 7 % zwischen 66 und 72
Variation 2: schrittweise Aufsteilung des Profils um insgesamt 7 % zwischen 51 und 57

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Alterungsrückstellung in den drei Szenarien (Ausgangssituation, Variation 1 und Variation 2) exemplarisch für einen Mann mit Eintrittsalter 43 und erläutern Sie den Verlauf.

b) Skizzieren Sie die prozentuale Änderung der Beiträge in Abhängigkeit vom Eintrittsalter beim **Übergang von Variante 1 auf Variante 2**, wenn der Übergang

- bei Vertragsbeginn (Änderung der Neugeschäftsbeiträge) bzw.

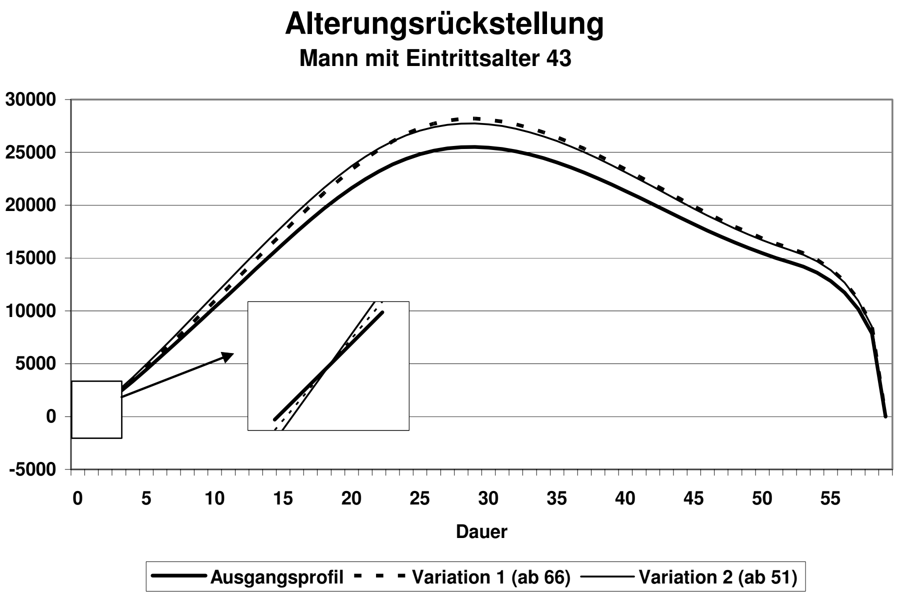
- nach Ablauf von 5 Jahren (Änderung der Bestandsbeiträge)

erfolgt. Erläutern Sie den Verlauf.

Lösung:

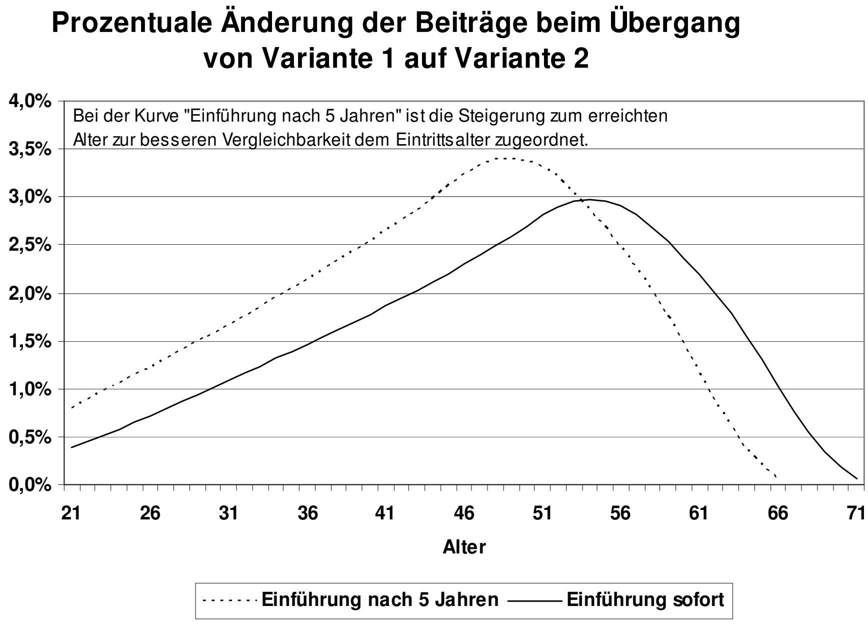
Zu a)

Die Profilaufsteilung wirkt beitragserhöhend. Der Beitrag bei Variante 2 ist daher am höchsten. Aufgrund der Zillmerung startet die Alterungsrückstellung (AR) bei Variante 2 daher am niedrigsten, die AR beim Ausgangsprofil am höchsten, die AR bei Variante 1 liegt dazwischen.
Aufgrund der dauerhaft höheren Kopfschäden im Alter ist der Sparbeitrag der beiden Varianten größer als bei dem Ausgangsprofil; nach dem Schnittpunkt verlaufen die ARs der Varianten daher nach der Startphase dauerhaft über der AR beim Ausgangsprofil.
Der Sparbeitrag der Variante 2 ist zu Beginn größer als der bei Variante 1; daher wächst die AR bei Variante 2 schneller als bei Variante 1; die AR der Variante 2 schneidet daher die AR der Variante 1 und verläuft dann zunächst oberhalb der AR bei Variante 1.



Ab dem Alter 72 sind die Leistungsbarwerte der beiden Varianten gleich. Da bei Variante 1 der Beitrag niedriger ist, folgt aus dem Äquivalenzprinzip, dass zu diesem Alter die AR der Variante 1 größer ist als die der Variante 2. Der Sparbeitrag der Variante 2 hat sich nach der früheren Aufsteilung des Profils also so sehr verringert, dass sich die AR der beiden Varianten ein zweites Mal schneiden. Bis zum Endalter bauen sich die Unterscheide dann kontinuierlich ab.

Zu b)



Je höher das Eintrittsalter, desto stärker wirkt die vorgezogene Aufsteilung des Profils im Neugeschäftsbeitrag. Mit abnehmender Kopfschadendifferenz nimmt auch der Beitragsunterschied wieder ab. Ab dem Eintrittsalter 72 sind die Barwerte wieder gleich, so dass sich

auch kein Beitragsunterschied mehr ergibt.
Bei der Einführung der Variante 2 erst fünf Jahre nach Beginn hängt der Beitragsunterschied davon ab, wie sich die Alterungsrückstellungen der beiden Varianten nach fünf Jahren unterscheiden.
Aus

$$P^*_{x,x+m} = P^{(2)}_{x+m} - \frac{V^{(1)}_{x,x+m}}{a_{x+m}} \quad (a_{x+m} = a^{(1)}_{x+m} = a^{(2)}_{x+m})$$

und

$$V^{(2)}_{x,x+m} = A^{(2)}_{x+m} - P^{(2)}_x \cdot a_{x+m} = (P^{(2)}_{x+m} - P^{(2)}_x) \cdot a_{x+m}$$

lässt sich für den Mehrbeitrag ableiten:

$$P^*_{x,x+m} - P^{(1)}_x = (P^{(2)}_x - P^{(1)}_x) + \frac{V^{(2)}_{x,x+m} - V^{(1)}_{x,x+m}}{a_{x+m}}$$

Die Zillmerphase ist nach fünf Jahren abgeschlossen. Die AR der Variante 2 ist bereits höher als die der Variante 1. Zum Mehrbeitrag zum ursprünglichen Alter kommt also noch der Nachspareffekt hinzu. Ist das Eintrittsalter so hoch, dass nach fünf Jahren bereits der 2. Schnittpunkt der AR erfolgt ist, wird die Differenz negativ; die verspätete Umstellung verursacht dann einen geringeren Mehrbeitrag als bei Beginn. Ab dem Eintrittsalter 67 unterscheiden sich fünf Jahre nach Beginn die Leistungsbarwerte der beiden Varianten nicht mehr, so dass ein Übergang von 1 zu 2 auch keinen Beitragsunterschied mehr bewirken kann.

2. Aufgabe (8,5 Punkte)

a) Wie werden derzeit (d.h. bis zum 31.12.2004) die aufgrund des Sozialgesetzbuches notwendigen Anforderungen in der privaten Pflegepflichtversicherung umgesetzt und finanziert?
(Es sollen auch die Formeln dargestellt werden, auf den Poolausgleich soll nicht eingegangen werden.)

b) Warum ist ein neues Kalkulationsmodell in der Pflegepflichtversicherung notwendig?

c) Welche Änderungen werden (zum 1.1.2005) vorgenommen? Welche Vorteile sind mit diesen Änderungen verbunden?

Lösung:

Zu a)

Einheitliche Beiträge bei allen privaten Anbietern
Die Kalkulation erfolgt durch den Verband der privaten Krankenversicherer und ist bis auf unternehmensindividuelle Kosten für alle KVU verbindlich.
Kontrahierungszwang
Keine besondere Berücksichtigung bei der Beitragskalkulation, eventuell auftretende Defizite werden über den D3-Ausgleich geregelt.
Keine Leistungsausschlüsse von Vorerkrankungen
Keine besondere Berücksichtigung bei der Beitragskalkulation, eventuell auftretende Defizite werden über den D3-Ausgleich geregelt.

geschlechtsunabhängige Prämien
Die Geschlechtsunabhängigkeit der Beiträge wird über die Verwendung der gemittelten Jahresnettoprämie $P_{x/y}$ erzielt

$$P_{x/y} = (1 - Q_y) \cdot P_x + Q_y \cdot P_y$$

wobei Q_y die ausgeglichene Quote der Frauen im Alter y am Gesamtbestand des Alters y und P_x bzw. P_y die geschlechtsabhängige Jahresnettoprämie für Männer bzw. Frauen ist. Eine gesonderte Finanzierung, etwa durch eine Umlage, ist nicht notwendig.
Prämienbegrenzung auf Höchstbeitrag
Die Finanzierung erfolgt über die Umlage UG:

$$UG = \sum_{x+m=y+m=19}^{100} (L_{x+m} + L_{y+m}) \cdot \max\left\{P^n_{x/y+m}(j) - (12 \cdot (1-\sigma) \cdot Hg - \Gamma_{\max})\,; 0\right\}$$

Dabei ist $L_{x+m} + L_{y+m}$der Bestand an kappungsberechtigten ,,normalzahlenden“ PPV-Versicherten, Hg der Höchstbeitrag und $\Gamma_{\max}$ die maximalen Stückkosten.
Beitragsfreiheit Kinder
Der Nettobedarf der Kinder (K) wird durch eine eigene Umlage finanziert, die durch den Einsatz von RfB-Mitteln (AB) in den letzten Jahren gesenkt werden konnte.

$$UK = \sum_{j \in LBK} K_{x(y)} - AB_{x(y)}(j)$$

Ehegattenlimitierung
Die Ehegattenlimitierung wird durch die Umlage UE finanziert:

$$UE = \sum_{\substack{x+m=\\ y+m=19}}^{100} (LE_{x+m} + LE_{y+m}) \cdot \max\left\{P^n_{x/y+m}(j) - (12 \cdot (1-\sigma) \cdot 0,75 \cdot Hg - \Gamma_{\max})\,; 0\right\}$$

$LE_{x+m} + LE_{y+m}$ ist der Bestand an kappungsberechtigten Ehegatten/Lebenspartnern.
Fehlendes Kündigungsrecht
Keine besondere Berücksichtigung bei der Beitragskalkulation, eventuell auftretende Defizite werden über den D3-Ausgleich geregelt.
Finanzierung der Umlagekomponenten
Die maximale Umlage U ergibt sich aus

$$\sum_{x+m=y+m=19}^{100} (L_{x+m} + L_{y+m}) \cdot \min\left\{U; \max\left\{0, 12 \cdot Hg \cdot (1-\sigma) - \Gamma_{\max} - P^n_{x/y+m}(j)\right\}\right\} +$$

$$\sum_{\substack{x+m=\\ y+m=19}}^{100} (LE_{x+m} + LE_{y+m}) \cdot \min\left\{U; \max\left\{0; 12 \cdot 0,75 \cdot Hg \cdot (1-\sigma) - \Gamma_{\max} - P^n_{x/y+m}(j)\right\}\right\}$$

$$\geq UK + UG + UE + UBP - BES - BEA - AnrK$$

Dabei sind UBP die Umlage von Bahn und Post, BES der Umlageteil aus dem Studentenbeitrag, BEA der Umlageteil aus dem Anwartschaftsbeitrag und $AnrK$ Anrechnungsbeträge durch die Limitierung beitragsfreier Kinder.
Bei der Berechnung des Zahlbeitrages wird die Umlage U wie folgt berücksichtigt:

$$b_{x/y}(\Gamma = 0) = \frac{P_{x/y} + U}{12 \cdot (1 - \sigma)} \qquad \text{bzw.} \qquad b_{x/y} = b_{x/y}(\Gamma = 0) + \frac{\Gamma}{12 \cdot (1 - \sigma)} \,.$$

Zu b)

Die Neukalkulation wurde notwendig, da

- durch die bisherige Verwendung der poolrelevanten RfB Inkonsistenzen in der Bestandsführung auftraten. So zahlen ältere Versicherte nicht mehr den Höchstbeitrag, oder die Alterungsrückstellung steht nicht mehr in Relation zur Nettoprämie.
- die vorhandene poolrelevante RfB nicht mehr vollständig zur Umlagesenkung eingesetzt werden konnte, da bei Unternehmen mit jungem Bestand alle Personen ausfinanziert sind und immer noch RfB-Mittel übrig waren.
- es juristische Bedenken gegen das bisherige Verfahren für die übrig gebliebenen Mittel gibt, da es dadurch zu geschlechtsabhängigen Beiträgen kommt.

Zu c)

Die Ermittlung des geschlechtsunabhängigen Jahresnettobeitrages wurde geändert, es gilt nun

$$P_{x/y} = \frac{A_{x/y}}{a_{x/y}} \quad \text{mit} \quad A_{x/y} = A_x \quad \text{und} \quad a_{x/y} = \frac{a_x}{c}, \quad \text{d.h.} \quad P_{x/y} = c \cdot P_x \,.$$

Die Differenzen zwischen dem geschlechtsabhängigen und dem geschlechtsunabhängigen Beitrag werden durch die Umlage UN getragen.

$$UN = \sum_{j \in LNE} P^n_{x(y)+m}(j) - P^n_{x/y+m}(j)$$

wobei LNE die dem Verband der privaten Krankenversicherung gemeldeten Bestände „normalzahlender“ PPV-Versicherter bezeichnet
Damit ergeben sich folgende Vorteile:

- Eine Änderung des Anteils an Frauen in Bestand und Neuzugang führt nicht unmittelbar zu einer Änderung des geschlechtsunabhängigen Neuzugangsbeitrages, lediglich Auswirkung auf die Umlage
- Vereinfachung des Verfahrens, keine Mittelung mehr
- die Alterungsrückstellung steht wieder in Relation zur Nettoprämie
- Das M1/M2-Verfahren wird abgelöst durch die Verwendung einer $M(x(y), m)$-Tabelle, die abhängig von Geschlecht, Alter und Bestandsdauer ist. Zudem kann diese Tabelle für jedes VU individuell vom Verband vorgegeben werden, so dass kurzfristig keine RfB-Mittel mehr übrig sein dürften.

3. Aufgabe (7,5 Punkte)

Stellen Sie den Stress-Test 2004 für Krankenversicherungsunternehmen dar. Gehen Sie dabei auch auf die Ermittlung der einzelnen Positionen ein. Beschreiben Sie anschließend, in welchem Fall der Versicherer verpflichtet ist, Konsequenzen aus dem Ergebnis zu ziehen und worin diese bestehen.

Lösung:

Beim Stress-Test wird der Saldo aus vorhandenen Mitteln und benötigten Mitteln gebildet. Als vorhandene Mittel gilt der Marktwert der Aktiva, vermindert um Marktwert- und Bonitätsabschläge, erhöht um die Wirkung vor dem 13.12.2003 getroffener Absicherungsmaßnahmen. Bei Renten im Anlagevermögen, sowie Hypotheken, Darlehen und Namenspapieren gilt der Buchwert als Marktwert. Ferner wird zu den vorhandenen Mitteln der Sicherheitszuschlag gezählt, der um den für 2004 pauschal geschätzten Risikoverlust zu vermindern ist.
Benötigte Mittel sind die Solvabilitätsspanne und die um die Eigenmittel und die freie RfB verminderten Passiva.
Die Werte werden durch schematische Fortschreibung der zum 31.12.2003 gegebenen Bilanzwerte auf den 31.12.2004 ermittelt. Dabei gelten im wesentlichen folgende Regelungen: Der Wertansatz von Aktien bleibt unverändert. Renten werden entsprechend dem Durchschnittskupon des Bestandes fortgeschrieben, Hypotheken, Darlehen und Namenspapiere entsprechend der Durchschnittsverzinsung des jeweiligen Bestandes, Immobilien entsprechend der Performance im Immobilienbestand. Der Sicherheitszuschlag bleibt unverändert. Die Solvabilitätsspanne wird entsprechend der mittleren Beitragsveränderung der letzten drei Jahre fortgeschrieben, die Deckungsrückstellung entsprechend dem Rechnungszins und die Schadenrückstellung entsprechend ihrer mittleren Veränderung der letzten drei Jahre. Die RfB bleibt unverändert.
Es werden drei Stress-Szenarien mit unterschiedlichem Marktwertabschlag betrachtet ("R10": 10% Marktwertverlust bei Renten, "A35": 35% Marktwertverlust bei Aktien, "RA25": 5% Marktwertverlust bei Renten und 20% bei Aktien).
Der Bonitätsabschlag bezieht sich auf den Bereich Fixed Income (Renten, Darlehen, Namenspapiere). Er beträgt 0% bei Investment Grade (AAA-BBB), 10% bei Speculative Grade (BB-B), 30% bei Default Risk (CCC-D) und 10% bei Anlagen ohne Rating.
Der Versicherer ist verpflichtet, Konsequenzen aus dem Ergebnis zu ziehen, wenn mindestens eines der Szenarien zu einem negativen Saldo führt. In diesem Fall müssen Gesamtvorstand und Aufsichtsrat informiert werden. Der Aufsichtsbehörde ist zu bestätigen, dass dies geschehen ist. Weiterhin ist ihr darzulegen, welche Maßnahmen zur Wiederherstellung der Risikotragfähigkeit geplant oder durchgeführt wurden, bzw. warum solche Maßnahmen nicht erforderlich waren.

4. Aufgabe (6,5 Punkte)

Betrachtet werden die zufälligen Leistungsbeträge eines VN in einem Tarif für Zahnersatzleistungen. Seien Y die Summe der Rechnungsbeträge eines VN pro Jahr, EY der Erwartungswert und q $(0 < q < 1)$ die Wahrscheinlichkeit für die Leistungsfreiheit eines VN pro Jahr. Erstattet werden 30% der Rechnungsbeträge. Zusätzlich wird die Erstattung pro Jahr auf einen Betrag $G > 0$ begrenzt. Weitere Begrenzungen der erstatteten Leistungen werden nicht berücksichtigt.

a) Geben Sie formelmäßig die Erstattungsfunktion Z in Abhängigkeit von Y und G an. Begründen Sie, weshalb bei einer (fiktiven) Erhöhung der tariflichen Obergrenze G um einen Faktor $\mu > 1$ die entsprechenden Erwartungswerte EZ (fiktiv) nicht um einen größeren Faktor wachsen können.

b) Vorgegeben sei die Verteilungsfunktion der positiven Rechnungsbeträge

$$F_{Y_+}(y) = P(Y_+ \le y).$$

Bestimmen Sie hieraus in Abhängigkeit vom Parameter q die Verteilungsfunktion von Y sowie in Abhängigkeit von G die Verteilungsfunktion für Z.

c) Es wird vorausgesetzt, dass positive Rechnungsbeträge Y_+ exponentialverteilt sind mit dem Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie hieraus die Erwartungswerte EY und EZ.

Hinweise zu c):

(1) Der Erwartungswert einer nichtnegativen Zufallsgröße X berechnet sich allgemein aus der Formel

$$EX = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\,dt.$$

(2) Die Verteilungsfunktion einer mit dem Parameter λ exponentialverteilten zufälligen Größe X ist gegeben durch

$$F(y) = 1 - \exp(-\lambda y), \quad y \ge 0, \quad \text{und} \quad F(y) = 0, y < 0\,.$$

Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$h(y) = \lambda \cdot \exp(-\lambda y), \quad y \ge 0, \quad \text{und} \quad h(y) = 0, y < 0\,.$$

Für den Erwartungswert gilt außerdem $EX = 1/\lambda$.

Lösung:

Zu a)

Für zufällige Rechnungsbeträge $Y \ge 0$ ergeben sich die tariflichen Erstattungen $Z \ge 0$ aus

$$Z = \min\{0,3 \cdot Y; G\}.$$

Bei einer fiktiver Erhöhung von G um einen Faktor $\mu > 1$ folgt für die entsprechenden Erstattungen

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \min\{0,3 \cdot Y; \mu \cdot G\} \\ Z_\mu &= \mu \cdot \min\{0,3 \cdot \frac{Y}{\mu}; G\} \\ Z_\mu &\le \mu \cdot \min\{0,3 \cdot Y; G\} = \mu \cdot Z\,. \end{aligned}$$

Wegen der Linearitätseigenschaft von Erwartungswerten folgt $EZ_\mu \le \mu \cdot EZ$, d.h. EZ_μ kann nie schneller als μ wachsen.

Zu b)

Die Verteilungsfunktionen von Y und Y_+ können mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden. Es gelten

$$\begin{aligned} P(Y_+ \le y) &= P(Y \le y | Y > 0) = \frac{P(0 < Y \le y)}{P(Y > 0)} \\ &= \frac{P(Y \le y) - P(Y \le 0)}{1 - P(Y \le 0)} = \frac{P(Y \le y) - q}{1 - q}, \quad y \ge 0\,. \end{aligned}$$

Durch Umformung und Fallunterscheidung ($y \geq 0$ bzw. $y < 0$) ergibt sich hieraus die Mischungsformel

$$P(Y \leq y) = q \cdot E_o(y) + (1-q) \cdot P(Y_+ \leq y), \quad y \text{ reell}, \tag{1}$$

mit $E_o(y) = 0$ für $y < 0$ bzw. $E_o(y) = 1$ für $y \geq 0$ – Einheitssprungverteilungsfunktion.
Die Verteilungsfunktion $F_Z(y) = P(Z \leq y)$ ergibt sich aus $F_Y(y)$ durch Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{llll} (i) & y < 0: & P(Z \leq y) = P(Y \leq y) & = 0 \\ (ii) & 0 \leq y < G: & P(Z \leq y) = P(Y \leq \frac{y}{0,3}) & = F_Y(\frac{y}{0,3}) \\ (iii) & y \geq G: & P(Z \leq y) = P(Z \leq G) = P(Z < G) + P(Z = G) & = 1\,. \end{array}$$

Außerdem kann für $F_Y(y)$ die Gleichung (1) eingesetzt werden, d.h. es gilt

$$F_Z(y) = \begin{cases} 0\,, & \text{für} \quad y < 0 \\ q + (1-q) \cdot F_{Y_+}(\frac{y}{0,3})\,, & \text{für} \quad 0 \leq y < G \\ 1\,, & \text{für} \quad y \geq G\,. \end{cases} \tag{2}$$

Zu c)
Für den Erwartungswert von Y folgt aus (1) die Darstellung

$$EY = (1-q) \cdot EY_+\,.$$

Folglich ergibt sich für exponentialverteilte Rechnungsbeträge Y_+ speziell

$$EY = \frac{(1-q)}{\lambda}\,.$$

Außerdem gilt dann für die Verteilungsfunktion von Z wegen (2) die Darstellung

$$P(Z \leq y) = 1 - (1-q) \cdot \exp(-\lambda \frac{y}{0,3}), \quad 0 \leq y < G\,. \tag{3}$$

Für den Erwartungswert EZ gilt allgemein wegen $P(Z \geq 0) = 1$ die Formel (vgl. Hinweis)

$$\begin{aligned} EZ &= \int_0^\infty (1 - F_Z(t))\, dt \\ &= \int_0^G (1 - F_Z(t))\, dt && \text{(wegen } F_Z(t) = 1 \text{ für } t \geq G\text{)} \\ &= (1-q) \cdot \int_0^G \exp(-t \cdot \tfrac{\lambda}{0,3})\, dt && \text{(wegen (3))} \\ &= -\left[0,3 \cdot \tfrac{(1-q)}{\lambda}\right] \cdot \left[\exp(-t \cdot \tfrac{\lambda}{0,3})\right]_0^G \\ &= \left[0,3 \cdot \tfrac{(1-q)}{\lambda}\right] \cdot \left(1 - \exp\left(-G \cdot \tfrac{\lambda}{0,3}\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Spezialfall für EZ ohne Obergrenze G ergibt sich hieraus durch den Limes $G \to \infty$. Es folgt dann $EZ = 0,3 \cdot \frac{(1-q)}{\lambda} = 0,3 \cdot EY$.