Prüfung im Oktober 2003 über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider (Köln)

Am 18. Oktober 2003 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 22 Teilnehmern bestanden 18 die Prüfung.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von A. Gartmann, C. Hofer, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen, wobei die für die einzelnen Aufgaben maßgeblichen Höchstpunktzahlen bei der Aufgabenstellung in Klammern ausgewiesen werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12,5 Punkte erforderlich.

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) Stellen Sie kurz die rechtlichen Vorschriften dar, die in der HGB-Bilanz für die Ermittlung der Deckungsrückstellung in der privaten Krankenversicherung gelten.

b) Beschreiben Sie im Vergleich dazu die entsprechenden Regelungen gemäß US-GAAP.

Lösung:
zu a)
Gemäß § 341f HGB ist in der nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung eine Deckungsrückstellung (Alterungsrückstellung) in Höhe der Verpflichtungen aus dem Versicherungsgeschäft abzüglich des Barwertes der künftigen Beiträge zu bilden. Darunter fallen auch der Rückstellung bereits zugeführte Beträge aus der Rückstellung für Beitragsrückerstattung, sowie Zuschreibungen, die dem Aufbau einer Anwartschaft auf Beitragsermäßigung dienen.

Gemäß § 25 RechVersV sind dabei angemessene Sicherheitszuschläge anzusetzen. Einmalige Abschlusskosten dürfen nach einem angemessenen versicherungsmathematischen Verfahren, insbesondere durch Zillmerung, berücksichtigt werden. Ergibt sich insgesamt eine negative Alterungsrückstellung, so ist diese in die Bilanz mit 0 einzustellen.

Gemäß § 3 KalV sind für die Berechnung der Beiträge und der Alterungsrückstellung die gleichen Rechnungsgrundlagen anzusetzen. Gemäß §4 KalV darf der Rechnungszins höchstens 3,5% betragen.

Gemäß § 16 KalV ist die Alterungsrückstellung als Summe der Einzelalterungsrückstellungen der Versicherten zu berechnen. Dabei ist das Alter des Versicherten am Abschlussstichtag zugrunde zu legen. Es ist auch zulässig, das arithmetische Mittel der Einzelalterungsrückstellungen zu bilden, die sich durch Ab- und Aufrundung der Versicherungsdauern auf ganze Jahre ergeben.

Gemäß § 12 VAG hat der Verantwortliche Aktuar die Aufgabe, die Einhaltung der Berechnungsvorschriften sicherzustellen. Er hat dies unter der Bilanz zu bestätigen.
zu b)
Eine Deckungsrückstellung ist zu bilden für langfristige Versicherungsverträge, d.h. im wesentlichen: für nach Art der Lebensversicherung betriebene Krankenversicherungen.

Die Deckungsrückstellung ist der Barwert der künftigen Versicherungsleistungen und künftigen Verwaltungskosten abzüglich des Barwertes der Reserveprämien. Bei der Bestimmung der Reserveprämie werden neben den Versicherungsleistungen auch die Verwaltungskosten berücksichtigt, die Abschlusskosten aber nicht. Die Versicherungsleistungen enthalten dabei jeweils die Schadenregulierungsaufwendungen.

Abschlusskosten werden aktiviert. Dazu wird eine Tilgungsprämie gebildet, die zu Beginn der Versicherung als Barwert der aktivierten Abschlusskosten geteilt durch den Leibrentenbarwert der Rente 1 berechnet wird. Der Aktivposten ist jeweils der Barwert der künftigen Tilgungsprämien.

Die Rechnungsgrundlagen beruhen gemäß bester Schätzung auf den Erfahrungen der Vergangenheit und auf Annahmen über künftige Trends. Zusätzlich sind Sicherheiten zu berücksichtigen. Übereinstimmung mit den Rechnungsgrundlagen der Beitragsberechnung ist also nicht gefordert.

Normalerweise werden bei US-GAAP die Rechnungsgrundlagen bei Zugang des Versicherungsvertrages für die gesamte Laufzeit festgesetzt (lock in principle). Da dies jedoch angesichts der extremen Langfristigkeit von Krankenversicherungsverträgen und der Ungewissheit der Kostenentwicklung für die deutsche Krankenversicherung kein angemessenes Verfahren ist, empfiehlt sich das Verfahren des prospective unlocking. Dieses Verfahren ist zulässig, wenn der Versicherer die Möglichkeit zur Beitragsanpassung hat, also gerade im Fall der nach Art der Lebensversicherung betriebenen deutschen Krankenversicherung. Nach diesem Verfahren werden die Rechnungsgrundlagen, die zum Vertragsbeginn festgelegt wurden, solange beibehalten, bis es zu einer Beitragsanpassung kommt. Zum Zeitpunkt der Beitragsanpassung werden neue Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellung festgelegt, die Gültigkeit bis zur nächsten Anpassung haben. Die im Anpassungszeitpunkt vorhandene Deckungsrückstellung wird einzelvertraglich voll angerechnet, d.h. die neue Reserveprämie wird so berechnet, dass ein stetiger Übergang auf die mit neuen Rechnungsgrundlagen berechnete Deckungsrückstellung erfolgt. Das gleiche gilt für den Aktivposten. Dieses Verfahren entspricht dem in Deutschland üblichen Anpassungsverfahren.

Die für die Deckungsrückstellung festgelegten Rechnungsgrundlagen sind regelmäßig zu überprüfen (loss recognition test). Dabei ist zu prüfen, ob das Deckungskapital abzüglich des Aktivpostens niedriger ist als der mit aktuellen Rechnungsgrundlagen gebildete Barwert der künftigen Leistungen und Verwaltungskosten abzgl. des (aktuellen) Barwerts der künftigen Bruttobeiträge. Ist dies der Fall (Beitragsunterschuss), sind die Rechnungsgrundlagen für Deckungsrückstellung und Aktivposten (ohne Ansatz von Sicherheiten) zu aktualisieren, so dass ein entsprechender Aufwand erforderlich ist. Da in der nach Art der Lebensversicherung betriebenen Krankenversicherung die Rechnungsgrundlagen jährlich überprüft und ggf. angepasst werden, dürfte sich ein Beitragsunterschuss nur in Ausnahmefällen und nur bis zur nächsten Beitragsanpassung ergeben.

Eine einzelvertragliche Berechnung der Deckungsrückstellung ist nicht zwingend erforderlich.

Noch nicht beitragswirksame Gutschriften zur Beitragsermäßigung im Alter werden nicht der Deckungsrückstellung sondern der Rückstellung für Beitragsrückerstattung zugeführt.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Geben Sie eine Darstellung der Möglichkeiten, bei der Kalkulation die im Bereich der Kopfschäden gegebenen Selektionseffekte auszugleichen.

Lösung:
Die KalV (§6) sieht eine Berücksichtigung der Selektion bei der Neukalkulation und Nachkalkulation vor. Bei einer Neukalkulation müssen Stütztarife oder Wahrscheinlichkeitstafeln des BaFin herangezogen werden. Auch bei der Nachkalkulation mit nicht ausreichenden Beständen sind Stütztarife zu verwenden.

Sofern Stütztarife oder Wahrscheinlichkeitstafeln des BaFin verwendet werden, hat die Selektion, die im neuen Tarif auftritt, keine Auswirkungen auf dessen Kopfschäden, da sie nicht in die Rechnungsgrundlagen eingeht.

Sind jedoch ausreichende Bestände für die Nachkalkulation vorhanden, muss den Auswirkungen der Selektion Rechnung getragen werden. Dazu bieten sich verschiedene Modelle an:

2.1 *Anhebung des Grundkopfschadens*

Die Selektionswirkungen auf den Kopfschaden werden seit 1985 in großen Musterbeständen beobachtet. Für jede Vertragsdauer (bis zu 40 Jahren) werden dort sogenannte Selektionskoeffizienten ermittelt, die sich aus dem tatsächlichen Schaden der Vertragsdauer J im Verhältnis zu dem für diese Gruppe eingerechneten rechnungsmäßigen Schaden ergeben:

$$R_J = \frac{S^{tat,J} - RZ^J}{\sum\limits_x L_x^J \times K_x}$$

Diese Selektionskoeffizienten werden in Verhältnis zum R gesetzt, der sich ohne Berücksichtigung der Vertragsdauer für den Gesamtbestand ergibt.

$$\tilde{r}_J = \frac{R_J}{R}$$

Daraus ergeben sich für die Musterbestände normierte Selektionskoeffizienten, die anschließend noch ausgeglichen werden zu r_J.
In dem Tarif unter Selektionseinfluss werden dann die Anteile der verschiedenen Vertragsdauern am Gesamtbestand im Vorjahr ermittelt, wobei die ersten beiden Beginnjahre unberücksichtigt bleiben, da die r_J erst für $j \geq 3$ vorliegen:

$$v_J = \frac{L_{J-1}}{\sum\limits_{k=3}^{J^{\max}} L_{k-1}}$$

Mit diesen Gewichten und den ausgeglichenen Selektionskoeffizienten erhält man für die mittlere Bestandszugehörigkeit $\tilde{J}$ den Korrekturfaktor $f\left(\tilde{J}\right)$:

$$f\left(\tilde{J}\right) = \frac{1}{\sum\limits_{J=3}^{J^{\max}} v_J \times r_J}$$

Der sich aus der Nachkalkulation ergebende Grundkopfschaden des unter Selektionseinfluss stehenden Tarifs wird um diesen Faktor angehoben:

$$G'_g = G_g \times f\left(\tilde{J}\right)$$

Der Selektionseinfluss auf den Kopfschaden sollte somit eliminiert sein. Da aber die gesamte Kopfschadenreihe angehoben wird und damit auch in Altersbereichen mit ausreichenden Beständen, in denen das nicht erforderlich ist, entstehen planmäßige Überschüsse.

2.2 *Versteilung der Kopfschadenreihe*

Dieses Modell baut auf den Ergebnissen des oben beschriebenen Modells auf. Der Korrekturfaktor wird jedoch nicht auf den Grundkopfschaden angerechnet, sondern wird zur Profilversteilung ab einem Grenzalter verwandt. Das zu verwendende Profil wird dabei zunächst aus einem Stütztarif abgeleitet oder den VerBaFin entnommen.
In dem Altersbereich mit ausreichenden Beständen ($x < x_\lambda$), werden die rechnungsmäßigen Kopfschäden entsprechend dem Bedarf festgesetzt. In dem Übergangsbereich mit zurückgehenden Beständen ($x_\lambda \leq x \leq x_\lambda + \Delta$) wird dann der Kopfschaden schrittweise um den Korrekturfaktor versteilt und im Altersbereichen ohne Bestand ($x_\lambda + \Delta < x \leq \omega$) wird der Kopfschaden um den Korrekturfaktor angehoben.

$$K_x^{\,\mathrm{mod}} = \begin{cases} K_x^I = K_x & x < x_\lambda \\ K_x^{II} = K_x \times \left[1 + (f(J) - 1) \times \frac{x - x_\lambda}{\Delta}\right] \quad mit & x_\lambda \leq x \leq x_\lambda + \Delta \\ K_x^{III} = K_x \times f(J) & x_\lambda + \Delta < x \leq \omega \end{cases}$$

Bei diesem Modell werden nur die Kopfschäden der Altersgruppen angehoben, die unter dem Einfluss der zurückgehenden Selektion stehen. Ein ausreichender Deckungsrückstellungsaufbau ist somit gewährleistet. Es entstehen aber keine planmäßigen Überschüsse.

2.3 *Übernahme von Marktwerten*

Die Kalkulation erfolgt in den Altern, in denen ausreichender Bestand vorhanden ist, anhand der Beobachtungswerte, ab einem Grenzalter mit nur noch geringem Bestand werden dann Marktwerte zur Ermittlung der rechnungsmäßigen Kopfschäden herangezogen.
Ähnlich wie bei dem 2. Modell entstehen auch bei diesem Modellansatz kein Überschüsse. Der Korrekturfaktor wird bei diesem Modell jedoch nicht benötigt.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Ausgangslage ist ein Ambulanttarif für Männer mit einem Selbstbehalt von 170 EUR. Der Tarif wird für alle Eintrittsalter x ($21 \leq x \leq 102$) mit 4 Monatsbeiträgen gezillmert. Als Ausscheideordnungen werden einheitlich für den Tarif und den Beitragszuschlag nach § 12 (4a) VAG die Sterbetafel PKV-2001 (Endalter 102) und die Stornotafel gemäß VerBAV 02/01 verwendet. Das Profil entstammt ebenfalls den VerBAV 02/01. Die Zinsüberschussbeteiligung wird allen Versicherten in Höhe der vollen 90 % auf Basis einer Nettoverzinsung von 5,5 % gewährt.

Der Rechnungszins beträgt 3,5 % und soll variiert werden: einmal auf 2,5 % und einmal auf 4,5 %.

a) Erläutern Sie, wo diese Vorgaben den derzeitigen rechtlichen Vorschriften widersprechen.

b) Skizzieren Sie die Auswirkungen der Variation auf die Neugeschäftsbeiträge in Abhängigkeit vom Eintrittsalter x ($21 \leq x \leq 102$) und kommentieren Sie den Verlauf.

c) Stellen Sie exemplarisch für einen 65-jährigen Mann mit Eintrittsalter 33 die Alterungsrückstellung (AR) mit ihren Bestandteilen tarifliche AR, AR aufgrund des Beitragszuschlags und AR aufgrund der Zinsüberschussbeteiligung grafisch dar, alternativ für die Rechnungszinssätze 2,5%, 3,5 % und 4,5 %. Kommentieren Sie die Unterschiede.

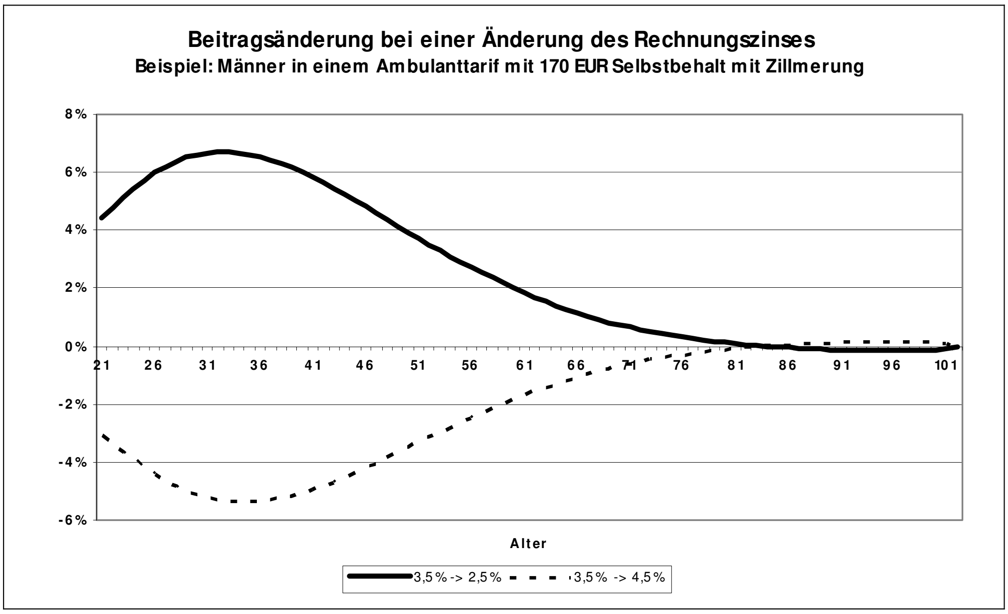
Lösung:
zu a)

(i) Bei höheren Eintrittsaltern führt eine Zillmerung in gleichbleibender Höhe zu einem Verstoß gegen § 8 (3) der KalV, da die Alterungsrückstellung nicht innerhalb von 15 Jahren oder innerhalb der Hälfte der rechnungsmäßigen Laufzeit positiv wird.

(ii) Nach §12a (3) ist ein bis zum Jahr 2025 abnehmender Anteil der 90%igen Zinsüberschussbeteiligung ausschließlich für die Personen zu verwenden, die am Bilanzstichtag bereits das 65. Lebensjahr vollendet haben und steht daher bis zum Jahr 2025 nur teilweise für alle Versicherten als Zuführung zur Alterungsrückstellung zur Verfügung. (Ausnahme: Bei Personen unter 65 ist der 90%ige Zinsüberschuss, soweit er auf die AR aus dem Beitragszuschlag entsteht, bereits nach jetzigem Recht in voller Höhe zuzuschreiben.)

(iii) Nach § 12 (1) VAG und § 4 der KalV darf der Rechnungszins in der substitutiven Krankenversicherung höchstens 3,5 % betragen.

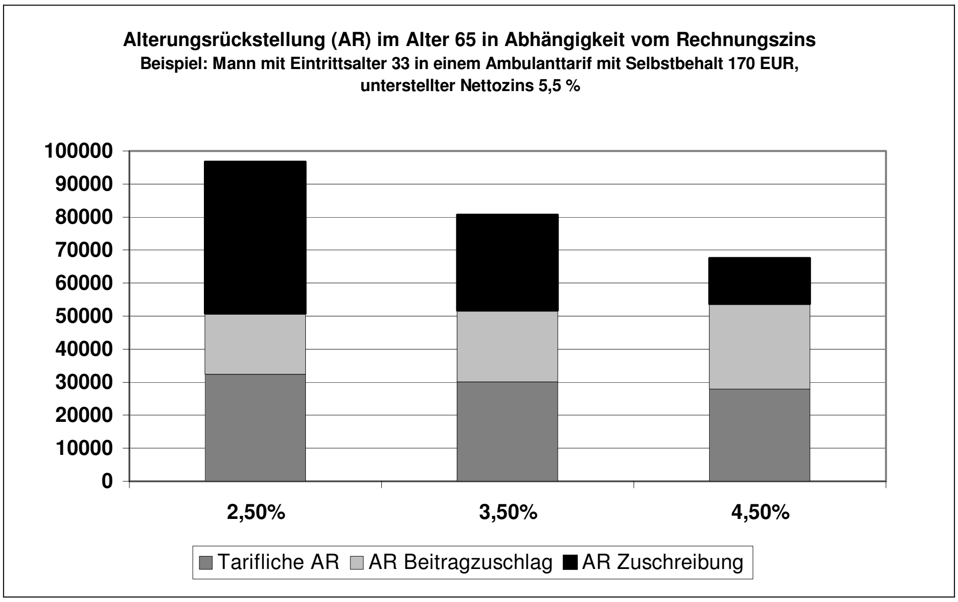
zu b)



Eine Verringerung des Rechnungszinses wirkt im allgemeinen beitragserhöhend. Das Ausmaß der Beitragserhöhung hängt neben der Steilheit des Profils maßgeblich von der kalkulierten Verweildauer der versicherten Person ab. Bei den angegebenen Ausscheideordnungen nimmt die kalkulierte Verweildauer wegen der anfänglich hohen Stornowahrscheinlichkeiten mit zunehmenden Eintrittsalter zunächst zu und dann wieder ab. Entsprechend nimmt die Wirkung der Erhöhung des Rechnungszinses zunächst ebenfalls zu und dann kontinuierlich ab. Bei sehr hohen Eintrittsaltern führt die Zillmerung längerfristig bis dauerhaft zu negativen Alterungsrückstellungen. Der Rechnungszins bekommt dann einen Schuldzinscharakter,

so dass eine Reduktion sogar beitragssenkend wirkt. Mit weiter zunehmenden Eintrittsalter – zugegeben wohl nur theoretisch interessant – steigt die Änderungsrate dann bis zum Endalter wieder auf Null an.
Eine Erhöhung des Rechnungszinses wirkt im Vergleich zu einer Senkung absolut spiegelbildlich.

zu c)



i) Die tarifliche Alterungsrückstellung ergibt sich nach dem Äquivalenzprinzip als Differenz zwischen Leistungs- und Beitragsbarwert. Beide Barwerte werden mit zunehmendem Rechnungszins kleiner, so dass sich die Differenz nur geringfügig ändert. Bei steigendem Profil ist bei erreichtem Alter 65 der Leistungsbarwert größer als der Beitragsbarwert, so dass sich dort der Rechnungszins entsprechend stärker auswirkt und damit die Alterungsrückstellung mit zunehmenden Rechnungszins insgesamt leicht abnimmt.
ii) Zwar verringert sich mit zunehmendem Rechnungszins der Beitragszuschlag (proportional zum Beitrag) und damit zunächst auch die daraus gebildete AR, aber bis zum Alter 65 wirkt sich die höhere Verzinsung stärker aus. Daher nimmt die AR aus dem Zuschlag mit zunehmendem Rechnungszins ebenfalls zu. Dieser Effekt überlagert die abnehmende Tendenz bei der tariflichen AR.
iii) Bei der Zinsüberschussbeteiligung wirkt sich eine Änderung des Rechnungszinses relativ am stärksten aus. Bei der unterstellten Nettoverzinsung von 5,5 Prozent ergibt sich beim Rechnungszins 4,5 % eine Zuschreibung von lediglich 0,9 %- Punkten $(= 0,9 \times (5,5 - 4,5))$, beim Rechnungszins 2,5 % ist sie dagegen drei mal so hoch $(0,9 \times (5,5 - 2,5) = 2,7)$.

4. Aufgabe (9 Punkte)

Betrachtet werden die zufälligen erstattungsfähigen Aufwendungen Y eines VN in einem Krankheitskostentarif τ ohne absolute Selbstbeteiligung (SB). Es bezeichne EY den Erwartungswert und $Var(Y)$ die Varianz von Y. Weiterhin sei $q(0 < q < 1)$ die Wahrscheinlichkeit für Leistungsfreiheit im Tarif τ, d.h. der relative Anteil der VN, die in einem Beobachtungsjahr keine erstattungsfähigen Aufwendungen vorweisen.

a) Es wird vorausgesetzt, daß für ein spezielles homogenes Risikokollektiv positive Krankheitskostenleistungen Y_+ exponentialverteilt sind mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie diesen Parameter λ speziell für $EY = 1.810$ EUR und $q = 0,072$. Ermitteln Sie hieraus außerdem die Varianz von Y.

Betrachtet wird außerdem ein Krankheitskostentarif τ_s mit den gleichen tariflichen Leistungen wie der Tarif τ aber mit einer jährlichen absoluten SB $s > 0$. Seien Z_s die zufälligen Krankheitskostenleistungen im Tarif τ_s unter Berücksichtigung der SB s. Lösen Sie nun die folgenden Teilaufgaben b) bis d) zunächst allgemein formelmäßig. Lösen Sie anschließend diese Teilaufgaben speziell für $s = 500$ EUR sowie für die gleichen Werte λ und q wie unter a):

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit q_s dafür, daß ein VN im Tarif τ_s leistungsfrei ist.

c) Geben Sie die Verteilungsfunktion $P(Z_{s+} \leq y)$ der positiven Leistungen Z_{s+} im Tarif τ_s an und bestimmen Sie hieraus die Verteilungsfunktion von Z_s.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z_s.

Hinweise zu Aufgabe 4
zu a):
Die Verteilungsfunktion einer mit dem Parameter λ exponentialverteilten zufälligen Größe X ist gegeben durch

$$F(t) = 1 - exp(-\lambda t), t \geq 0, \text{und } F(t) = 0, t < 0.$$

Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$h(t) = \lambda exp(-\lambda t), t \geq 0, \text{und } h(t) = 0, t < 0.$$

Für Erwartungswert, zweites Moment und Varianz von X gelten außerdem

$$EX = 1/\lambda, EX^2 = 2/\lambda^2 \text{ sowie } VarX = 1/\lambda^2.$$

zu b) - d):
Das subjektive Anspruchsverhalten auf Krankheitskostenleistungen sei unabhängig von der gewählten tariflichen SB $s > 0$, d.h. dieses Verhalten sei in den Tarifen τ und τ_s gleich. Die zufälligen Krankheitskostenleistungen Z_s im Tarif τ_s können dann fiktiv aus den entsprechenden Leistungen Y in τ ermittelt werden unter der Annahme, daß im Tarif τ in Wirklichkeit eine SB von $s > 0$ gegolten hätte. In Teilaufgabe b) ergibt sich dann insbesondere die Wahrscheinlichkeit q_s durch den relativen Anteil der VN mit erstattungsfähigen Aufwendungen Y, die nicht höher als s sind.

Lösung

zu a)

Die Verteilungsfunktionen von Y und Y_+ können mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden. Es gelten

$$\begin{aligned} P(Y_+ \leq y) &= P(Y \leq y | Y > 0) = \frac{P(0 < Y \leq y)}{P(Y > 0)} \\ &= \frac{P(Y \leq y) - P(Y \leq 0)}{1 - P(Y \leq 0)} = \frac{P(Y \leq y) - q}{1 - q}, y \geq 0. \end{aligned}$$

Durch Umformung und Fallunterscheidung ($y \geq 0$ bzw. $y < 0$) ergibt sich hieraus die Mischungsformel

$$P(Y \leq y) = q \times E_o(y) + (1 - q) \times P(Y_+ \leq y), y \, \text{reell}, \tag{1}$$

mit $E_o(y) = 0$ für $y < 0$ bzw. $E_o(y) = 1$ für $y \geq 0$ – Einheitssprungverteilungsfunktion. Speziell für den Erwartungswert und das zweite Moment von Y gelten

$$EY = (1 - q) \times EY_+ = (1 - q)/\lambda,$$

$$EY^2 = (1 - q) \times EY_+^2 = 2 \times (1 - q)/\lambda^2,$$

und folglich

$$\lambda = (1 - q)/EY = 0,00051271,$$

$$VarY = E(Y - EY)^2 = EY^2 - (EY)^2$$

$$= (1 - q) \times 2/\lambda^2 - (1 - q)^2/\lambda^2 = (1 - q^2)/\lambda^2 = 3.784.418,75$$

zu b)

Speziell für $y = s$ folgt aus (1)

$$q_s = P(Y \leq s) = q + (1 - q) \times P(Y_+ \leq s) = q + (1 - q) \times (1 - exp(-\lambda s))$$

$$= 1 - (1 - q) \times exp(-\lambda s) = 0,282.$$

zu c)

Für jede feste Zahl $y \geq 0$ gilt $Y > (\leq) \, y + s$ genau dann, wenn $Z_s > (\leq) \, y$ erfüllt ist. Stellt man die Verteilungsfunktion von Z_{s+} im Tarif τ_s in ähnlicher Weise wie unter a) mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten dar und benutzt man den oben angegebenen Zusammenhang zwischen Y und Z_s, so kann die Restverteilung $P(Z_{s+} > y) = 1 - P(Z_{s+} \leq y)$ von Z_{s+} durch folgende Umformung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} P(Z_{s+} > y) = P(Z_s > y | Z_s > 0) &= P(Y > y + s | Y > s) \\ = \frac{P(\{Y > y + s\} \cap \{Y > s\})}{P(Y \ > \ s)} &= \frac{P(\{Y > y + s\})}{P(Y > s)} \\ = \frac{\exp(-\lambda(y + s))}{\exp(-\lambda s)} &= \exp(-\lambda y), y > 0. \end{aligned}$$

Z_{s+} ist somit ebenfalls exponentialverteilt mit dem gleichen Parameter λ, d.h. es gilt

$$P(Z_{s+} \leq y) = 1 - \exp(-\lambda y), y > 0.$$

In ähnlicher Weise wie in (1) kann außerdem die Verteilungsfunktion von Z_s aus der folgenden Mischungsformel bestimmt werden:

$$P(Z_s \leq y) = q_s \times E_o(y) + (1 - q_s) \times P(Z_{s+} \leq y), y \,\text{reell}. \tag{2}$$

Ähnlich wie in b) folgt somit auch

$$P(Z_s \leq y) = \begin{cases} 1 \,-\, (1 - q_s) \cdot \exp(-\lambda y),\; y \,\geq\, 0 \\ \\ 0 \;, y \,<\, 0\,. \end{cases}$$

zu d)
Für die Momente von Z_s und Z_{s+} ergeben sich nunmehr aus (2) die Darstellungen

$$E\,Z_s = (1 - q_s) \times E\,Z_{s+} = (1 - q_s)/\lambda = 1.400,40,$$
$$E\,Z_s^2 = (1 - q_s) \times E\,Z_{s+}^2 = (1 - q_s) \times 2/\lambda^2,$$

und folglich

$$\begin{aligned} Var\,Z_s &= E\,Z_s^2 - (E\,Z_s)^2 \\ &= 2 \times (1 - q_s)/\lambda^2 - (1 - q_s)^2/\lambda^2 \\ &= (1 - q_s^2)/\lambda^2 = 3.501.619,03. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie entsprechend auch Erwartungswert und Varianz von Z_{s+} sind unabhängig von der tariflichen SB $s \geq 0$. Für $s = 0, Y = Z_o$ sowie $Y_+ = Z_{o+}$ ergeben sich die Darstellungen in a) und b) als Spezialfall der Darstellungen in c) und d) mit $q = q_o$.