Bericht zur Prüfung im Oktober 2002 über Krankenversicherungsmathematik (Spezialwissen)

Erich Schneider (Köln)

Am 19. Oktober 2002 führte die DAV die Prüfung im Spezialgebiet Krankenversicherungsmathematik durch. Von 22 Teilnehmern bestanden 19 die Prüfung.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der die vier nachfolgenden Aufgaben zu lösen waren. Die Aufgaben wurden gestellt von A. Gartmann, C. Hofer, E. Schneider und G. Siegel. Maximal waren insgesamt 30 Punkte zu erreichen, wobei die für die einzelnen Aufgaben maßgeblichen Höchstpunktzahlen bei der Aufgabenstellung in Klammern ausgewiesen werden. Zum Bestehen der Klausur waren mindestens 12,5 Punkte erforderlich.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Betrachtet werden die zufälligen Leistungen eines VN in einem Krankheitskostentarif τ für ein festes Kalenderjahr t. Aus diesem Tarif τ werden fünf fiktive Tarifversionen abgeleitet, die jeweils durch die gleichen tariflichen Leistungen wie in τ aber durch eine unterschiedliche Selbstbeteiligung (SB) charakterisiert sind. Die SB möge sich dabei stets auf alle jährlich erstattungsfähigen Aufwendungen beziehen.

(1) Bestimmen Sie zunächst formelmäßig aus den zufälligen erstattungsfähigen Aufwendungen V eines VN in τ ohne Berücksichtigung einer SB die entsprechenden zufälligen Leistungen Z mit Berücksichtigung der SB:
   a) Berücksichtigung einer absoluten SB $s > 0$ (Abzugsfranchise)
   b) Berücksichtigung einer prozentualen SB p, $0 < p < 100$.
   c) Begrenzung der erstatteten Leistungen durch einen Höchstbetrag $L_{Max} > 0$.
   d) Gemischte Variante 1: Zunächst Berücksichtigung einer prozentualen SB p, $0 < p < 100$, für alle erstattungsfähigen Aufwendungen. Nach Abzug der prozentualen SB werden die erstatteten Leistungen zusätzlich durch einen Höchstbetrag $L_{Max} > 0$ begrenzt.
   e) Gemischte Variante 2: Zunächst Berücksichtigung einer prozentualen SB p, $0 < p < 100$, für diejenigen erstattungsfähigen Aufwendungen, die eine Schranke $L_G > 0$ nicht überschreiten. Derjenige Teil der erstattungsfähigen Aufwendungen, der diese Schranke L_G überschreitet, wird dagegen zu 100% (d.h. ungekürzt) erstattet.

(2) Bei einer Anpassungsüberprüfung wird festgestellt, dass die erstattungsfähigen Aufwendungen Y ohne Berücksichtigung einer SB jährlich um h% wachsen, $h > 0$. Wachsen die entsprechenden Leistungen Z in a) bis e) unter Berücksichtigung der jeweiligen SB jährlich schneller oder langsamer als die jeweiligen Leistungen Y? Oder wachsen beide Leistungen im gleichen Maße? Geben Sie geeignete allgemeingültige Antworten auf diese Fragen für jede dieser fünf fiktiven SB-Varianten an. Begründen Sie Ihre Antworten.

Hinweise: zu Aufgabe 1:

In Teil (1) werden die zufälligen Leistungen eines VN aus einer homogenen Personengruppe (d.h. für gleiches Alter und Geschlecht) betrachtet. Das subjektive Anspruchsverhalten auf Krankheitskostenleistungen sei dabei unabhängig von der speziell gewählten tariflichen SB, d.h. dieses subjektive Verhalten wird für alle betrachteten SB-Varianten als gleich vorausgesetzt.

Für Teil (2) können Realisierungen von Y und Z verglichen werden, wobei vereinfachend der Wert h als nichtzufällig und bekannt angenommen werden kann. Außerdem genügt es für diese Teilaufgabe, o. B. d. A. $Y > 0$ vorauszusetzen.

Lösung:

zu (1):

Für feste Parameterwerte s, p, L_{Max}, L_G ergeben sich die zufälligen Leistungen Z ($Z \leq Y$) eines VN pro Kalenderjahr unter Berücksichtigung der jeweiligen SB durch die Auszahlungsfunktion $Z = f(Y)$ mit

a)	f(Y)	$= \max\{Y - s; 0\}$,	$s > 0$;
b)	f(Y)	$= (1 - p/100) \cdot Y$,	$0 < p < 100$;
c)	f(Y)	$= \min\{Y; L_{Max}\}$,	$L_{Max} > 0$;
d)	f(Y)	$= \min\{(1 - p/100) \cdot Y; L_{Max}\}$,	$0 < p < 100$, $L_{Max} > 0$;
e)	f(Y)	$= (1 - p/100) \cdot Y + (p/100) \cdot \max\{Y - L_G; 0\}$,	$0 < p < 100$, $L_G > 0$.

zu (2):

Für a) und e) wächst Z nicht langsamer als Y. Für c) und d) wächst Z nicht schneller als Y. Im Beispiel b) wachsen Z und Y im gleichen Maße.

Zum Nachweis dieser Aussagen werden Realisierungen Y und $Z = f(Y)$ für ein Kalenderjahr t betrachtet, d.h. es sei $Y_t = Y$ und $Z_t = f(Y)$. Offenbar ist dann $H = (1 + h/100)$ der Erhöhungsfaktor für Y vom Jahr t zum Jahr t + 1. Für das Kalenderjahr t + 1 gelte außerdem vereinfachend $Y_{t+1} = H \cdot Y$ sowie $Z_{t+1} = f(Y_{t+1})$.

Beispielhaft werden hierfür zwei Lösungsvarianten angegeben.

1. Lösungsvariante:

Wegen $H > 1$ ergibt sich die Behauptung für Beispiel a) aus der Abschätzung

$$Z_{t+1} = \max\{Y_{t+1} - s; 0\} = \max\{H \cdot Y - s; 0\} \geq \max\{H \cdot Y - H \cdot s; 0\} = H \cdot \max\{Y - s; 0\} = H \cdot Z_t.$$

Zum Beweis der Teilaufgaben b) bis e) kann man analog vorgehen.

2. Lösungsvariante

Solche speziellen Aussagen lassen sich einheitlich mit Hilfe des folgenden Satzes nachweisen:

Satz:

Es gelte $f(0) = 0$. Dann ist die Erhöhung der Leistungen Z vom Jahr t zum Jahr t + 1 für konvexe (konkave) Auszahlungsfunktionen f nicht kleiner (nicht größer) als die entsprechende Erhöhung für Y. Für eine lineare Funktion f sind die Erhöhungen für Y und Z jeweils identisch.

Beweis:

Für konvexe (konkave) Funktionen f(Y) gilt allgemein ($Y_1, Y_2 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$):

$$(*) \qquad \alpha_1 f(Y_1) + \alpha_2 f(Y_2 \quad \geq (\leq) \quad f(\alpha_1 \cdot Y_1 + \alpha_2 \cdot Y_2).$$

Wähle speziell $\alpha_1 = 1/H < 1$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 < 1$, $Y_1 = H \cdot Y$, $Y_2 = 0$. Unter Beachtung von $f(Y_2) = 0$ sowie von (*) folgt dann

$$(**) \qquad Z_{t+1} = f(H \cdot Y) = H \cdot [1/H \cdot f(H \cdot Y)] = H \cdot [\alpha_1 \cdot f(Y_1)] = H \cdot [\alpha_1 \cdot f(Y_1) + \alpha_2 \cdot f(Y_2)]$$

$$\geq (\leq) \quad H \cdot [f(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 \cdot Y_2)] = H \cdot [f(\alpha_1 A_1)] = H \cdot f(Y) = H \cdot Z_t.$$

Zu den Beispielen a) bis e):

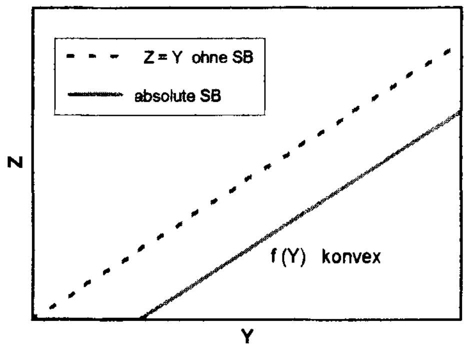
Diese fünf Funktionen f(Y) haben offenbar folgende spezielle Konvexitätseigenschaften (vgl. auch folgende Diagramme):

a) konvex, b) linear (konvex + konkav), c) konkav, d) konkav, e) konvex

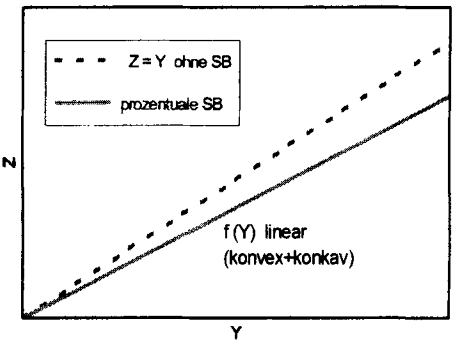
Aus dem Satz ergeben sich dann die Behauptungen für a) bis e).

Zur Illustration werden hier die fünf SB-Varianten kurz grafisch dargestellt.

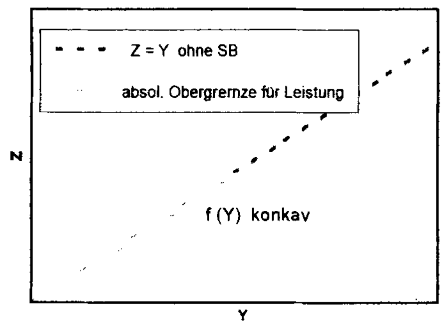
Aufgabe a)



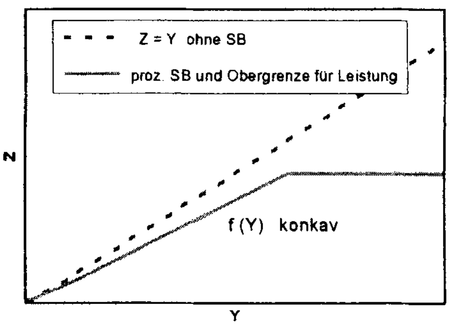
Aufgabe b)



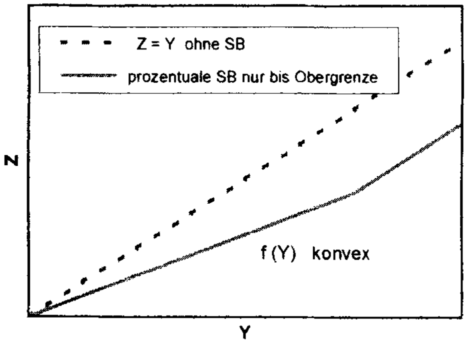
Aufgabe c)



Aufgabe d)



Aufgabe e)



Aufgabe 2 (7 Punkte)

Im SGB sind Anforderungen an die Private Pflegepflichtversicherung (PPV) gestellt, die durch die in der Kalkulationsverordnung (KalV) festgelegte und aktuariell übliche risikogerechte Kalkulation nicht erfüllt werden.

a) Welches sind diese Anforderungen?

b) Welche Forderungen an die Kalkulation ergeben sich daraus? Geben Sie auch kurz die Formeln für Netto- und Bruttobeitrag an.

c) Welche Mechanismen werden dadurch erzwungen?

Lösung:

Zu a)

Generell muss unterschieden werden nach Versicherten, die zum Zeitpunkt des Inkrafttretens des Gesetzes Mitglied bei einem privaten Krankenversicherungsunternehmen mit Anspruch auf allgemeine Krankenhausleistungen waren bzw. sich innerhalb von sechs Monaten nach Inkrafttreten des Gesetzes von der Versicherungspflicht in der sozialen Pflegeversicherung haben befreien lassen, (Fall A) und solchen, die erst danach Mitglied eines privaten Krankenversicherungsunternehmens mit Anspruch auf allgemeine Krankenhausleistungen wurden (Fall B).

- Einheitliche Beiträge
  In § 111 SGB XI ist geregelt, dass die Beiträge ohne Kosten auf der Basis gemeinsamer Kalkulationsgrundlagen einheitlich für alle Krankenversicherer ermittelt werden.
- Kontrahierungszwang gem. § 23 PVG
  Für beide Fälle A und B gilt: Die Versicherungspflichtigen haben ein sechsmonatiges (ab Eintritt der Versicherungspflicht beginnendes) Wahlrecht bzgl. des PKV-Unternehmens. Dieser Kontrahierungszwang erstreckt sich ebenfalls auf Heilfürsorgeberechtigte, die nicht in der sozialen Pflegeversicherung versicherungspflichtig sind, sowie auf Mitglieder der Postbeamtenkrankenkasse und Mitglieder der Krankenversorgung der Bundesbahnbeamten.
- Keine Leistungsausschlüsse von Vorerkrankungen
  Fall A: Ausschlüsse von Vorerkrankungen der Versicherten sind nicht zulässig. Ebenfalls nicht ausgeschlossen werden dürfen bereits pflegebedürftige Personen.

  Fall B: Ausschlüsse von Vorerkrankungen der Versicherten sind nicht zulässig.
- Wartezeiten
  Für beide Fälle A und B gilt: Es dürfen keine längeren Wartezeiten als in der sozialen Pflegeversicherung gelten.
- Keine geschlechtsabhängige und vom Gesundheitszustand abhängige Staffelung der Prämien.
  Fall A: Die von den Versicherten zu entrichtenden Prämien dürfen nicht nach Geschlechtern und dem Gesundheitszustand der Versicherten unterschieden sein (keine Risikozuschläge).
  Fall B: Die von den Versicherten zu entrichtenden Prämien dürfen nicht nach Geschlechtern der Versicherten unterschieden sein. Risikozuschläge dürfen hingegen berechnet werden.
- Prämienbegrenzung auf Höchstbeitrag
  Fall A: Die von den Versicherten zu tragenden Prämien dürfen den Höchstbeitrag der sozialen Pflegeversicherung nicht überschreiten. Für beihilfeberechtigte Versicherte darf die Prämie nicht mehr als 50% der Höchstprämie in der sozialen Pflegeversicherung betragen (in der Kalkulation wurde die Höchstprämie auf 40% begrenzt).
  Fall B: Insoweit der Versicherungsnehmer über eine Vorversicherungszeit von mehr als 5 Jahren in einer privaten Pflegeversicherung oder privaten Krankenversicherungspflicht verfügt, gelten die Regelungen wie im Fall A.
- Beitragsfreiheit für Kinder
  Für beide Fälle A und B gilt: Kinder des Versicherungsnehmers sind, soweit sie den in § 25 SGB XI genannten Voraussetzungen entsprechen, beitragsfrei mitversichert.

- Ehegattenlimitierung
  Fall A: Der gemeinsame Beitrag von Ehegatten oder Lebenspartnern, wenn einer der beiden kein Gesamteinkommen hat, das die in § 25 Abs. 1 genannten Einkommensgrenzen überschreitet, darf 150% des Höchstbeitrags der sozialen Pflegeversicherung nicht überschreiten.
  Fall B: Eine Ehegattenlimitierung existiert nicht.
- Fehlendes Kündigungsrecht
  Für beide Fälle A und B gilt: Rücktritts- und Kündigungsrechte der KVU sind ausgeschlossen, solange der Kontrahierungszwang besteht.

Zu b)

- Einheitliche Kalkulationsgrundlagen für alle Krankenversicherer
  Zur Sicherstellung der dauerhaften Gewährleistung der o.a. Anforderungen an die private Pflegeversicherung müssen die Versicherer ein Risikoausgleichssystem betreiben, welches die unterschiedlichen Belastungen für die einzelnen Unternehmen ausgleicht und den Marktzugang für neue Versicherer nicht behindert.
- Trennung von Bedarfs- und Tarifbeitrag mit Hilfe jeweils eigener Rechnungsgrundlagen
  Die Limitierungen und beitragsfreie Mitversicherungsmöglichkeiten tragen eine soziale Komponente in die grundsätzlich nach Art der LV kalkulierten Tarife. Es werden deshalb für die Ermittlung der eigentlichen Bedarfsbeiträge und die Ermittlung der Zahlbeiträge sowohl getrennte Bestandsführung und getrennte Rechnungsgrundlagen benötigt. Die durch Limitierungen bzw. Beitragsfreistellungen verursachten Fehlbeträge werden durch ein Umlageverfahren auf alle unterhalb der Limitierungsgrenzen beitragszahlenden Versicherten gedeckt.

  Sei mit P_x bzw. P_y der jeweilige bedarfsgerechte, nach der KalV kalkulierte Nettobeitrag für Männer bzw. Frauen bezeichnet, so ergibt sich der geschlechtsunabhängige Nettobeitrag $P_{x/y}$ zu

  $$P_{x/y} = (L_x P_x + L_y P_y)/(L_x + L_y),$$

  wobei mit L_x bzw. L_y die dem PKV-Verband gemeldeten Bestände der männlichen bzw. weiblichen vollversicherten Personen bezeichnet sind.

  Die Bruttomonatsbeiträge $b_{x/y}$ ergeben sich zu:

  $$b_{x/y} = b^{\Gamma=0}{}_{x/y} + \Gamma/(12^*(1-\sigma))$$

  sowie

  $$b^{\Gamma=0}{}_{x/y} = \min\{(P_{x/y} + U)/(12^*(1-\sigma));\ Hg - \Gamma_{max}/(12^*(1-\sigma))\},$$

  wobei Hg der Höchstbeitrag ist und Γ den altersunabhängigen Kostensatz (Γ_{max} ist der maximal zulässige Kostensatz) und σ den Sicherheitszuschlag bezeichnet.

  Der in der Formel auftretende Wert U stellt den alters- und geschlechtsunabhängigen Umlagebetrag dar. Dieser wird so bemessen, dass er den Bedarf zur Finanzierung der beitragsfrei mitversicherten Kinder, der Ehegattenlimitierung, der Höchstbeitragsbegrenzung und von Altlasten überdeckt.

  Erhoben wird der limitierte Höchstbeitrag

  $$bl_{x/y} = \min\{Hg;\ b_{x/y}\}$$

Zu c)

- Bildung eines Poolausgleichs
  Zur Vermeidung von strukturellen Unausgewogenheiten und zur Begrenzung von überrechnungsmäßigen Risikoverläufen, existiert ein gepooltes Ausgleichsverfahren. Dieser Poolausgleich ist für alle KVU verpflichtend, wenn sie eine private Pflegeversicherung anbieten.
- Meldesystem
  Die einheitliche Prämienkalkulation und der Risikoausgleichspool erzwingen ein einheitliches Meldesystem der kalkulations- und der zahlungsrelevanten Daten.
- Abrechnungsschema
  Zur Ermittlung der Zuführungen in die erfolgsunabhängige RfB ist ein einheitliches und verpflichtendes Abrechnungsschema eingeführt worden.

- Eigenständige Rechnungslegung
  Die Überschüsse aus der Pflegeversicherung sind nicht der allgemeinen RfB zuzuordnen, sondern werden dem Pool zugeordnet. Dies erfordert die Führung eines eigenständigen Abrechnungsverfahrens in der allgemeinen Rechnungslegung des VU.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für einen ungezillmerten Krankenversicherungstarif seien zu einem gegebenen Termin T folgende Werte gültig:

- Rechnungsmäßige Kopfschäden K_x
- Rechnungsmäßige diskontierte Lebende D_x
- Jährliche Nettoneugeschäftsbeiträge $P_x = A_x/a_x$

Nun sei angenommen („Inflationsannahme"), dass jedes Jahr – beginnend genau ein Jahr nach Termin T – die rechnungsmäßigen Kopfschäden und damit auch die Nettoneugeschäftsbeiträge um den Anteil q (d.h. um $100 \cdot q\%$) erhöht werden. Die übrigen Rechnungsgrundlagen bleiben unverändert. Nach m Jahren beträgt der Nettoneugeschäftsbeitrag dann ${}_mP_x = (1 + q)^m \cdot P_x$.

Wir betrachten nun einen Versicherten A, der zum Zeitpunkt T mit Eintrittsalter x eine Krankenversicherung nach diesem Tarif abgeschlossen hat.

Im folgenden wird unterstellt, dass m Jahre nach dem Zeitpunkt T vergangen sind. Wir befinden uns also im Zeitpunkt T + m. Die zu diesem Zeitpunkt gültigen Werte sind dann durch die m bisher durchgeführten Anpassungen beeinflusst.

a) Bezeichnet ${}_mBP_x$ den Bestandsnettobeitrag (Nettozahlbeitrag) des Versicherten A zum Zeitpunkt T + m, so gilt:

$$ {}_mBP_x = {}_0P_x, \text{ falls } m = 0 $$

$$ {}_mBP_x = {}_{m-1}BP_x + \frac{q}{1+q} \cdot {}_mP_{x+m}, \text{ falls } m > 0 $$

   Geben sie dafür eine kurze Begründung.

b) Geben Sie die zum Zeitpunkt T + m gültige Formel für das Deckungskapital ${}_mV_x$ des Versicherten A an.

c) Berücksichtigen Sie jetzt auch die zukünftigen (d.h. nach dem Zeitpunkt T + m) aus der Inflationsannahme resultierenden Kosten- und Beitragssteigerungen. Geben Sie die sich dabei ergebenden zum Zeitpunkt T + m gültigen Formeln an für
   - den Barwert ZA_{x+m} der künftigen Leistungen des Versicherten A
   - den Barwert ${}_mBWBP_x$ der künftigen Bestandsnettobeiträge des Versicherten A
   - das Deckungskapital ${}_mZV_x$.

d) Beweisen Sie folgende Rekursionsformel für ${}_mV_x$:

$$ {}_mV_x = \left({}_{m-1}V_x - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} + {}_{m-1}BP_x\right) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}}, \text{ falls } m > 0 $$

e) Zeigen Sie, dass für ${}_mZV_x$ die gleiche Rekursionsformel gilt.

f) Beweisen Sie die folgende Gleichung und erläutern Sie kurz ihre Bedeutung für die Rechnungslegung:

$$ {}_mV_x = {}_mZV_x $$

Hinweise zu Aufgabe 3

Beschränken Sie sich bei der Lösung möglichst auf die in der Aufgabenstellung angegebenen Bezeichnungen. Verwenden Sie a) zur Lösung von d).

Lösung:

Zu a)

Bei Vertragsbeginn (m = 0) stimmt der Bestandsbeitrag mit dem Neugeschäftsbeitrag ${}_0P_x = P_x$ überein.

Der Neugeschäftsbeitrag zum Eintrittsalter x + m erhöht sich bei der m-ten Anpassung um

$$ {}_mP_{x+m} - {}_{m-1}P_{x+m} = \left((1+q)^m - (1+q)^{m-1}\right) \cdot P_{x+m} = \frac{q}{1+q} \cdot {}_mP_{x+m}. $$

Der Bestandsbeitrag des Versicherten A muss sich bei dieser Anpassung um den gleichen Betrag erhöhen.

Zu b)

$$ {}_mV_x = ({}_mP_{x+m} - {}_mBP_x) \cdot a_{x+m} $$

Zu c)

$$ ZA_{x+m} = \left(\sum_{j=m}^{\omega-x} (1+q)^j \cdot K_{x+j} \cdot D_{x+j}\right) / D_{x+m} $$

$$ {}_mBWBP_x = \left(\sum_{j=m}^{\omega-x} {}_jBP_x \cdot D_{x+j}\right) / D_{x+m} $$

$$ {}_mZV_x = ZA_{x+m} - {}_mBWBP_x $$

Zu d)

Es gilt

$$ {}_mP_{x+m} \cdot a_{x+m} = (1+q)^m \cdot P_{x+m} \cdot a_{x+m} = (1+q)^m \cdot A_{x+m} = (1+q)^m \cdot (A_{x+m-1} - K_{x+m-1}) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} $$

$$ = \left((1+q) \cdot {}_{m-1}P_x \cdot a_{x+m-1} - (1+q)^m \cdot K_{x+m-1}\right) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \qquad (1) $$

$$ a_{x+m} = (a_{x+m-1} - 1) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \qquad (2) $$

Somit

$$ {}_mV_x = ({}_mP_{x+m} - {}_mBP_x) \cdot a_{x+m} \qquad \text{(gemäß b))} $$

$$ = \frac{1}{1+q} \cdot {}_mP_{x+m} \cdot a_{x+m} - {}_{m-1}BP_x \cdot a_{x+m} \qquad \text{(gemäß a))} $$

$$ = \left({}_{m-1}P_x \cdot a_{x+m-1} - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} - {}_{m-1}BP_x \cdot a_{x+m-1} + {}_{m-1}BP_x\right) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \qquad \text{(gemäß (1) und (2))} $$

$$ = \left({}_{m-1}V_x - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} + {}_{m-1}BP_x\right) \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \qquad \text{(gemäß b))} $$

Zu e)

Gemäß c) erhält man:

$$ {}_mZV_x = ZA_{x+m} - {}_mBWBP_x = \left[\left(\sum_{j=m}^{\omega-x} (1+q)^j \cdot K_{x+j} \cdot D_{x+j}\right) - \left(\sum_{j=m}^{\omega-x} {}_jBP_x \cdot D_{x+j}\right)\right] / D_{x+m} $$

$$ = \left[\left(\sum_{j=m-1}^{\omega-x} (1+q)^j \cdot K_{x+j} \cdot D_{x+j}\right) - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} \cdot D_{x+m-1} \right. $$

$$ \left. - \left(\left(\sum_{j=m-1}^{\omega-x} {}_jBP_x \cdot D_{x+j}\right) - {}_{m-1}BP_x \cdot D_{x+m-1}\right)\right] / D_{x+m} $$

$$ = \left[ZA_{x+m-1} - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} - ({}_{m-1}BWBP_x - {}_{m-1}BP_x)\right] \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} $$

$$ = \left[{}_{m-1}ZV_x - (1+q)^{m-1} \cdot K_{x+m-1} + {}_{m-1}BP_x\right] \cdot \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} $$

Zu f)

Für $m = \omega - x$ gilt die Behauptung, denn in diesem Fall ist

$${}_mV_x = ({}_{\omega-x}P_\omega - {}_{\omega-x}BP_x) \cdot a_\omega = (1+q)^{\omega-x} \cdot P_\omega - {}_{\omega-x}BP_x = (1+q)^{\omega-x} \cdot K_\omega - {}_{\omega-x}BP_x$$

und

$${}_mZV_x = ZA_\omega - {}_{\omega-x}BWBP_x = (1+q)^{\omega-x} \cdot K_\omega - {}_{\omega-x}BP_x$$

Für die restlichen m ergibt sich die Behauptung jetzt durch absteigende iterative Anwendung der identischen Rekursionsformeln aus d) und e).

Wegen der Gleichheit der beiden Deckungskapitale muss man die Inflation bei der Deckungskapitalbildung nicht explizit berücksichtigen, wenn man unterstellt, dass die rechnungsmäßigen Kosten jeweils dem Inflationsverlauf folgen und der Mehrbeitrag bei den Beitragsanpassungen entsprechend dem üblichen Verfahren ermittelt wird.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die Stornowahrscheinlichkeit hängt neben dem erreichten Alter auch von der Bestandsdauer des Vertrages ab. Trotzdem wird die Stornowahrscheinlichkeit in der Kalkulation nur in Abhängigkeit vom erreichten Alter berücksichtigt.

a) Erläutern Sie, warum die Kalkulation mit zweidimensionalen Stornowahrscheinlichkeiten unzulässig ist.

b) Warum ist die eindimensionale Berücksichtigung der Stornowahrscheinlichkeit in der Kalkulation problematisch? Verdeutlichen Sie dieses durch eine Skizze.

c) Wie kann der zweidimensionale Verlauf der Stornowahrscheinlichkeit auch eindimensional in der Kalkulation mit ausreichenden Sicherheiten berücksichtigt werden?

Lösung:

Zu a)

Die Stornowahrscheinlichkeit nimmt bekanntlich mit zunehmender Bestandsdauer ab. Für eine Person mit dem Eintrittsalter x und der Bestandsdauer t (>0) ist die Stornowahrscheinlichkeit damit niedriger als für eine Person mit dem Eintrittsalter $x1 = x + t$. Da mit niedriger Stornowahrscheinlichkeit die Alterungsrückstellung weniger durch Vererbung und mehr durch eigene Beitragszahlung angespart werden muss, ist der Beitrag für den Bestandskunden $b_{x,t}$ (ohne Berücksichtigung der Anrechnung aus der vorhandenen Alterungsrückstellung) höher als der Neugeschäftsbeitrag b_{x1}. Nach § 12 (4) VAG darf jedoch der Neugeschäftsbeitrag nicht niedriger sein als der Beitrag für gleichaltrige Versicherte ohne Berücksichtigung ihrer Alterungsrückstellung.

Zu b)

Die eindimensional ermittelte Stornowahrscheinlichkeit für das Alter x ergibt sich als Durchschnitt der Stornowahrscheinlichkeiten aller Personen mit dem Eintrittsalter $x - t$ und der Bestandsdauer t:

$$w_x = \frac{\sum_t L_{x-t,t}^{\text{Storno}}}{\sum_t L_{x-t,t}}$$

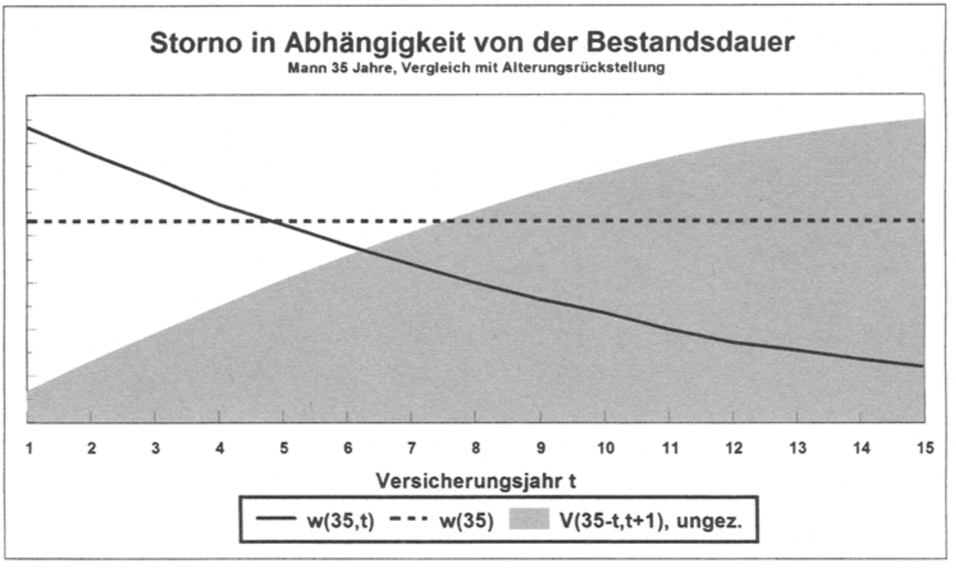
Sofern das Unternehmen keinen außergewöhnlich niedrigen Neuzugang verzeichnet – liegen Bestandsdauerverteilungen vor, bei denen kurze Dauern (kleine t) in stornorelevanten erreichten Altern überproportional vertreten sind. Dadurch werden bei der Durchschnittsbetrachtung hohe Stornowahrscheinlichkeiten anzahlmäßig stärker berücksichtigt als niedrige Stornowahrscheinlichkeiten.

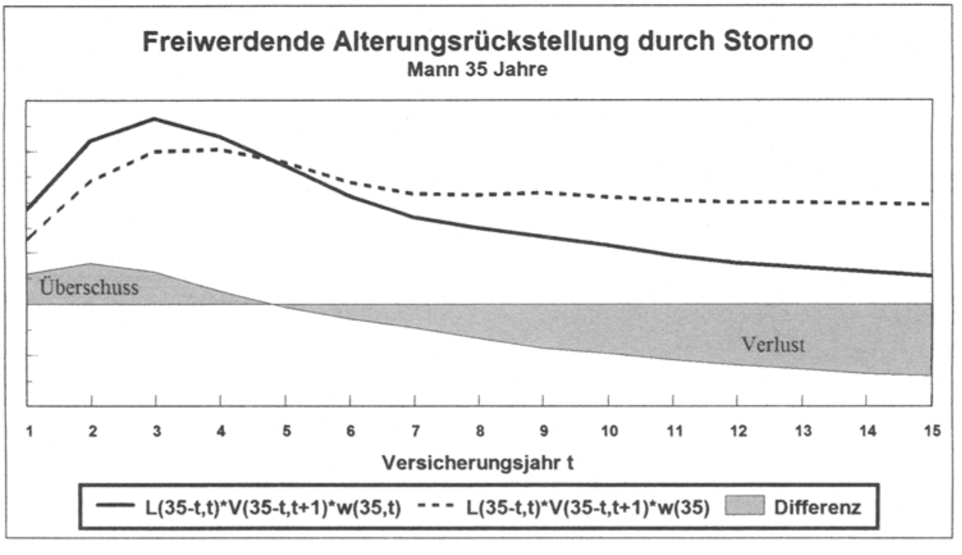
Der Aufbau der Alterungsrückstellung erfolgt u.a. durch die Vererbung der Rückstellung stornierter Verträge, und zwar für alle Personen mit dem erreichten Alter x

rechnungsmäßig in Höhe $\sum_t w_x \cdot L_{x-t,t} \cdot V_{x-t,t+1}$,

tatsächlich jedoch in Höhe von $\sum_t w_{x,t} \cdot L_{x-t,t} \cdot V_{x-t,t+1}$, wobei $w_{x,t} = \frac{L_{x-t,t}^{\text{Storno}}}{L_{x-t,t}}$.

Da die Alterungsrückstellung in stornorelevanten erreichten Altern aber in aller Regel mit zunehmender Bestandsdauer wächst und die Stornowahrscheinlichkeit dagegen abnimmt, haben Personen in Zeiten mit überdurchschnittlicher Stornowahrscheinlichkeit (also $w_{x,t} > w_x$) niedrige Alterungsrückstellungen und in Zeiten mit unterdurchschnittlicher Stornowahrscheinlichkeit (also $w_{x,t} < w_x$) hohe Alterungsrückstellungen. Bei kurzen Dauern entsteht ein Überschuss, der wegen der noch geringen Alterungsrückstellung allerdings gering ist (bei Zillmerung entsteht bei Storno mit noch negativer Alterungsrückstellung sogar ein Verlust). Bei längeren Dauern entsteht ein Verlust,





der aufgrund der inzwischen gewachsenen AR deutlich höher ausfällt als der Überschuss bei kleinem t. Insgesamt wird trotz der mit zunehmender Bestandsdauer fallenden Bestandsgröße mit der eindimensional angesetzten Stornowahrscheinlichkeit in aller Regel ein zu hoher Vererbungseffekt unterstellt.

Zu c)

Die Stornowahrscheinlichkeit kann gewichtet mit der jeweiligen Alterungsrückstellung ermittelt werden:

$$w_x = \frac{\sum_t L_{x-t,t}^{\text{Storno}} \cdot V_{x-t,t+1}}{\sum_t L_{x-t,t} \cdot V_{x-t,t+1}}$$

Hierdurch ergeben sich normalerweise erheblich niedrigere Stornowahrscheinlichkeiten; das unter b) beschriebene Problem wird vermieden. Ungeeignet ist die Methode jedoch, wenn bei jungen Beständen oder hoher Zillmerung der Nenner noch nahe bei Null liegt.

Näherungsweise können bei der Berechnung nach b) Personen, die sich in den ersten drei Versicherungsjahren befinden und damit vergleichsweise hohe Stornowahrscheinlichkeiten aufweisen, unberücksichtigt bleiben. Alternativ ist es auch möglich, die nach b) ermittelten Stornowahrscheinlichkeiten pauschal zu reduzieren (in Abhängigkeit von der Bestandszusammensetzung bis zu 30%).