Bericht zur Prüfung im Oktober 2007 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), Hans-Jochen Bartels (Mannheim)
und Raimond Maurer (Frankfurt)

Am 20. Oktober 2007 wurde eine weitere Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. Hierbei waren 27 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der neun Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissenseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 72 von 180 möglichen Punkten erreicht werden

Block I (Albrecht)

Aufgabe 1: (30 Minuten)

Gegeben sei ein dreijähriger Standardbond mit den Rückflüssen $\{Z, Z, Z + N\}$ sowie die heutigen Spot Rates $r_i = r(0, i)$, i = 1, 2 und 3, zu den Restlaufzeiten 1 Jahr, 2 Jahre und 3 Jahre.

a) Fassen Sie die Spot Rates als Risikofaktoren auf. Definieren und bestimmen Sie (explizit!) vor diesem Hintergrund die Faktor-Deltas dieses Bonds!

b) Stellen Sie anhand dieses Bonds die Delta-Normal-Methode zur (approximativen) Bestimmung des (zentrieren) Value at Risk dar. Bestimmen Sie in diesem Kontext (explizit!) die Varianz der Barwertänderung über ein Zeitintervall der Länge h. Wie lautet schließlich die Bestimmungsformel für den Value at Risk?

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie den Zufallsvektor $\Delta R = (\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3)^T$, wobei $\Delta R_i = R(h, i-h) - r(0, i)$, i = 1, 2, 3, und unterstellen Sie, dass ΔR einer trivariaten Normalverteilung mit
$E(\Delta R_i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3$
$\mathrm{Cov}(\Delta R_i, \Delta R_j) = h\,\sigma_{ij} \qquad i = 1, 2, 3$
folgt.

c) Definieren Sie allgemein die absoluten Key Rate-Durationen und stellen Sie den Zusammenhang zu den Faktor-Deltas dar.

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass bei dem betrachteten Bond die Kupons Z = 0 betragen und der Nennwert N = 1000. Die 3-Jahres-Spot Rate betrage $r_3 = 5\%$. Die Volatilität von ΔR_3 auf Tagesbasis sei gegeben durch $\sigma(\Delta R_3) = 0.1\%$. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen unter Anwendung der Delta-Normal-Methode den zentrierten Value at Risk auf Tagesbasis zum Konfidenzniveau 1% !

<u>Hinweis:</u> $N_{0.99} = 2.326$

Lösungsskizze:

a) $P_0 = P_0(r_1, r_2, r_3)$
$= Z(1+r_1)^{-1} + Z(1+r_2)^{-2} + (Z+N)(1+r_3)^{-3}$

Die Faktor-Deltas sind im vorliegenden Fall gegeben durch $d_1 = \partial P_0 / \partial r_1$, $d_2 = \partial P_0 / \partial r_2$ und $d_3 = \partial P_0 / \partial r_3$.

Hieraus folgt

$d_1 = -Z(1+r_1)^{-2}$

$d_2 = -2Z(1+r_2)^{-3}$

$d_3 = -3(Z+N)(1+r_3)^{-4}$

b) Delta-Normal-Approximation:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_h - P_0 \\ &\approx \frac{\partial P_0}{\partial r_1}\Delta R_1 + \frac{\partial P_0}{\partial r_2}\Delta R_2 + \frac{\partial P_0}{\partial r_3}\Delta R_3 \\ &= d_1\,\Delta R_1 + d_2\,\Delta R_2 + d_3\,\Delta R_3\ .\end{aligned}$$

$\Delta R := (\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3)$ ist dabei nach Hinweis normalverteilt.

Es folgt zunächst:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Delta P) &= d_1^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_1) + d_2^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_2) + d_3^2\,\mathrm{Var}(\Delta R_3) \\ &\quad + 2\,d_1 d_2\,\mathrm{Cov}(\Delta R_1, \Delta R_2) + 2\,d_1 d_3\,\mathrm{Cov}(\Delta R_1, \Delta R_3) \\ &\quad + 2\,d_2 d_3\,\mathrm{Cov}(\Delta R_2, \Delta R_3) \\ &= h[d_1^2\,\sigma_{11}^2 + d_2\,\sigma_{22}^2 + d_3\,\sigma_{33}^2 + 2\,d_1\,d_2\,\sigma_{12} + 2\,d_1\,d_3\,\sigma_{13} + 2\,d_2\,d_3\,\sigma_{23}]\ .\end{aligned}$$

Definiere nun die Verlustvariable $L := -\Delta P$.

Offenbar gilt $\sigma(\Delta L) = \sigma(\Delta P) = \sqrt{\mathrm{Var}(\Delta P)}$.

Da ΔR (trivariat) normalverteilt, sind auch ΔP und L normalverteilt und der Value at Risk zum Konfidenzniveau α lautet, da $E(L) = E(\Delta P) = 0$:

$$\mathrm{VaR} = N_{1-\alpha}\,\sigma(\Delta P),$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung bedeute.

c) Die absolute Key Rate-Durationen sind definiert durch

$$\mathrm{KRD}_A(i) = -\partial P / \partial r_1,$$

d.h. es gilt

$$\mathrm{KRD}_A(i) = -d_i\ .$$

d) Es gilt zunächst

$$P_0 = N(1+r_3)^{-3} = 1000(1.05)^{-3}$$
$$\partial P/\partial r_3 = -3000(1.05)^{-4} = -3000(0.8227)$$
$$= -2468.1$$

$$\Delta P = -2468.10 \cdot \Delta R_3$$

$$\sigma(\Delta P) = 2468.10(0.001) = 2.468$$

$$\text{VaR} = 2.326(2.468) = 5.74.$$

Alternativ:

Die Key Rate-Duration des Bonds ist gegeben durch 3 und es gilt

$$\Delta P = -P\frac{3}{1+r_3}\Delta P$$
$$= -1000(1.05)^{-3} \cdot \frac{3}{1+r_3}\Delta P$$
$$= -3000(1.05)^{-4}\,\Delta P$$
$$= -2468.1\Delta P$$

Aufgabe 2: (20 Minuten)

a) Wie bestimmt sich der Distance to Default (DD) im Rahmen des KMV-Modells?

b) Weisen Sie in diesem Kontext die fundamentale Beziehung

PD = N(-DD)

nach. Dabei bezeichne PD die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt T und N die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Hinweis:
Die stochastische Differentialgleichung $dS_t / S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ besitzt die Lösung $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\,Z_t\}$, wobei $Z_t \sim N(0,1)$.

Lösungsskizze:

i) Definition von DPT = DPT (T):
DPT := Short Term Debt + ½ Long Term Debt

ii) Definition Distance to Default (DD):

$$DD := \frac{E[\ln(A_T)] - \ln(DPT)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Dabei bezeichne $\{A_t\}$ die Wertentwicklung der Aktiva des betrachteten Unternehmens.

iii) Allgemein gilt im Merton-Modell für t = T mit $m := \mu - \sigma^2/2$:

$$A_T = A_0 \exp[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T], \text{ mit } Z_T \sim N(0,1).$$

iv) Im Merton-Modell folgt somit $E[\ln(A_T)] = \ln(A_0) + mT$ und damit:

$$DD = \frac{\ln(A_0/DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

v) Hieraus folgt des Weiteren:

$$\begin{aligned}
PD &= P(A_T \le DPT) \\
&= P[mT + \sigma\sqrt{T}\, Z_T \le \ln(DPT/A_0)] \\
&= P\left[Z_T \le \frac{-\ln(A_0/DPT) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
&= N\left[-\frac{\ln(A_0/DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\
&= N(-DD).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (10 Minuten)

Gehen Sie zu der Bewertung eines ausfallbedrohten Zerobonds aus von einem Intensitätsmodell unter der Annahme einer Recovery Rate von null. Der Spot Rate-Prozess unter Q sei gegeben durch $b + R_t$, wobei R_t den Cox/Ingersoll/Ross-Prozess bezeichne, d.h.
$dR_t = \alpha(\mu - R_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}\, dW_t$.

Der Prozess für die Ausfallintensität unter Q sei gegeben durch $c + \lambda_t$, wobei λ_t den Vasicek-Prozess bezeichne, d.h. $d\lambda_t = a(m - \lambda_t)dt + v dW_t$.

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen den Wert $B^d(t,T)$ eines ausfallbedrohten Zerobonds im Duffie/Singleton-Kontext.

Hinweise:

1. Setzen Sie die Werte $B_V(t,T)$ bzw. $B_{CIR}(t,T)$ eines ausfallfreien Zerobonds im Kontext des Vasicek- bzw. Cox/Ingersoll/Ross-Modells als bekannt voraus!
2. Nehmen Sie die stochastische Unabhängigkeit von R_t und λ_t unter Q an.

Lösungsskizze:

Im Duffie/Singleton-Kontext gilt für $rc = 0$ bzw. LGD = 1:

$$B^d(t,T) = E_Q^t\left[e^{-\int_t^T [c+R_s+b+\lambda_s]ds}\right]$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von R_t und λ_t gilt damit:

$$\begin{aligned} B^d(t,T) &= e^{-(c+b)(T-t)}\, E_Q^t\left[e^{-\int_t^T R(s)ds}\right] E_Q^t\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}\right] \\ &= e^{-(c+b)(T-t)}\, B_V(t,T) B_{CIR}(t,T). \end{aligned}$$

Block II (Bartels)

Aufgabe 4: (15 Minuten)

Man zeige: Der stochastische Prozess $X_t = (W_t + \sqrt{X_0})^2$ löst die stochastische Differentialgleichung $dX_t = dt + 2\sqrt{X_t}\, dW_t$ mit der Anfangsbedingung $X_0 > 0$.
W_t bezeichnet hier den standardisierten Wiener-Prozess mit Startwert 0.

Lösungsskizze:

Es ist $X_t = (W_t + \sqrt{X_0})^2 = W_t^2 + 2\sqrt{X_0}\, W_t + X_0$ und deswegen gilt nach Itô:

$$dX_t = d(W_t^2) + 2\sqrt{X_0}\, dW_t = 2W_t dW_t + \frac{1}{2}2dt + 2\sqrt{X_0}dW_t = dt + 2\sqrt{X_t}dW_t \;.$$

<u>Aufgabe 5:</u> (45 Minuten)

Die Gesellschaft XYZ bietet als private Rentenversicherung eine Indexpolice gegen Einmalbeitrag an mit einer Aufschubfrist von zwei Jahren. Investiert wird in ein so genanntes Index-Zertifikat, das bei Rentenbeginn das folgende Kapital zur Verrentung bereitstellt:

Mindestens sind 102 Prozent des eingezahlten Geldes verfügbar, steigt der zugrunde liegende Index DAX, so wird abhängig vom Kursverlauf des Index ein zusätzlicher Betrag zur Verrentung hinzugefügt. Genauer gilt folgendes:

Bezeichnen x(1) (bzw. x(2)) den Stand des Indexes nach Ablauf eines (bzw. zwei) Jahren und x(0) den Stand des Indexes bei Abschluss des Vertrages, und ist

$$G := 0.2 \cdot \left(\left(\frac{x(1)}{x(0)} - 1 \right)^{+} \cdot 1.04 + \left(\frac{x(2)}{x(0)} - 1 \right)^{+} \right) + 0.02 \ ,$$

so ist zu Rentenbeginn das folgende Kapital bereitzustellen:

$E + G \cdot E$, wenn E den gezahlten Einmalbeitrag bezeichnet.

Das Versicherungsunternehmen hat folgende Anlagemöglichkeiten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses: Erzielbarer Jahreszins jeweils für die beiden Folgejahre: 4 % , d.h. man nimmt an, dass auch nach einem Jahr noch ein einjähriger risikoloser Zins von 4 % erzielbar ist. Der Stand des DAX beträgt zu Beginn 4000 Punkte und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 4000 kostet € 160, ein Call mit zweijähriger Laufzeit und demselben Ausübungspreis kostet € 340. Der Preis einer entsprechenden Europäischen Put-Option mit Ausübungspreis 4000 und zweijähriger Laufzeit beträgt € 410.

(i) Wie kann man für eine Police mit Einmalbeitrag E = 20 000 € eine kongruente Deckung des Gewinnversprechens darstellen?

(ii) Welcher Teilbetrag der Brutto-Prämie E = 20 000 bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfallleistung in der Aufschubfrist und von Verwaltungskosten, wenn die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit den erwähnten Call-Optionen in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

(iii) Auf dem Kapitalmarkt wird zusätzlich ein Indexpapier mit zweijähriger Laufzeit angeboten, das exakt den Wert des DAX–Indexes in zwei Jahren widerspiegelt, d.h. das in zwei Jahren exakt den Geldwert x(2) hat. Da von den Emittenten noch die Dividenden für zwei Jahre der einzelnen im Index vertretenen Aktien vereinnahmt werden, kostet ein Stück dieses Papiers zum Versicherungsbeginn nicht € 4000, sondern € 3610. Mit welcher gegenüber (i) alternativen Anlagestrategie hätte das Versicherungsunternehmen die kongruente Deckung des Gewinnversprechens unter Zuhilfenahme dieses Papiers auch darstellen können? Welche Variante ist für das Versicherungsunternehmen günstiger?

(Hinweis: Es wird vereinfachend angenommen, dass Transaktionskosten nicht anfallen und steuerliche Aspekte z.B. die Kapitalertragssteuer unberücksichtigt bleiben !)

Lösungsskizze:

(i) Das Leistungsversprechen der Index-bezogenen Versicherung bei Rentenbeginn kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$E + G \cdot E = 20\,000 \cdot 1.02 + \left(0.2 \cdot \left(\left(\frac{x(1)}{x(0)} - 1\right)^{+} \cdot 1.04 + \left(\frac{x(2)}{x(0)} - 1\right)^{+}\right)\right) \cdot 20000 =$$

$$= 20\,400 + 0.2 \cdot 20000 \cdot \frac{1}{x(0)}((x(1) - x(0))^{+} \cdot 1.04 + (x(2) - x(0))^{+}) =$$

$$= 20\,400 + ((x(1) - 4000)^{+} \cdot 1.04 + (x(2) - 4000)^{+}) \; .$$

Das gegebene Leistungsversprechen lässt sich also dann einhalten, wenn man den Betrag von

$\frac{20400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ zu 4 % für zwei Jahre anlegt und gleichzeitig je eine Call-Option auf den DAX zum Ausübungspreis von x(0) = 4000 mit ein- bzw. zweijähriger Laufzeit kauft. Das kostet 160 + 340 = 500 €, so dass für die kongruente Geldanlage insgesamt € 19360.95 benötigt werden. Man beachte, dass nach einem Jahr das Ergebnis des einjährigen Calls angelegt wird zu dem vorgegebenen Zinssatz von 4 %.

(ii) Von dem Bruttobeitrag in Höhe von € 20 000.- verbleiben also nur € 639.05 zur Deckung einer Todesfallleistung und der Kosten.

(iii) Analog der Put-Call-Relation müsste folgende Preisrelation für den zweijährigen Putpreis P erfüllt sein:

$P + 3610 = 340 + 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} = 340 + 3698.22 = 4038.22$, d.h. in einem Kapitalmarkt ohne Arbitragemöglichkeiten sollte der Preis P nicht 410 sondern 428.22 betragen. Man könnte also in der oben unter (i) beschriebenen kongruenten Deckung des Gewinnversprechens den Call durch eine äquivalente Position ersetzen, indem man den zweijährigen Call durch den äquivalenten Wert

$3610 - 4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} + P = 321.78$ ersetzt. Damit hat man statt der Call-Option eine Put-Option zu kaufen, ein Indexpapier zum Preis von € 3610 und den Anlagebetrag zu dem festen Zinssatz 4 % nach dem Muster (ii) in Höhe von $\frac{20400}{(1.04)^2} \approx 18860.95$ um den Betrag von $4000 \cdot \frac{1}{(1.04)^2} = 3698.22$ zu vermindern. Der Aufwand für die kongruente Geldanlage nach diesem Muster ist um € 18.22 kleiner als nach dem oben unter (i), (ii) besprochenen Schema.

Block III (Maurer)

Aufgabe 6: Devisenmärkte (10 Minuten)

a) Der Zinssatz für Jahresgeld im Euroraum beträgt 3,75% und im US-Dollarraum 5%. Der Devisenkassakurs notiert bei 0,845 €/$ und der Devisenterminkurs (Laufzeit 1 Jahr) bei 0,762 €/$. Ermitteln Sie anhand des Zinsparitätentheorems, ob eine Arbitragemöglichkeit existiert! **(5 Minuten)**

b) Nehmen Sie an, dass zwischen den Devisenmärkten (Dreieck-)Arbitragemöglichkeiten nicht existieren. Ermitteln Sie die fehlenden Werte in der Tabelle! **(5 Minuten)**

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1		0,6758	1,5896
USD		1	0,5363	1,2612
GBP	1,4797		1	
SFR	0,6291	0,7929		1

Lösungsskizze:

a) Nach dem Zinsparitätstheorem gilt: $f = \frac{1+r_1}{1+r_2} - 1 \Rightarrow f = \frac{1{,}0375}{1{,}05} - 1 \Leftrightarrow f = -0{,}012$

Weicht ab von der beobachteten Forwardprämie

$$f = \frac{F}{S} - 1 \Rightarrow f = \frac{0{,}762}{0{,}845} - 1 \Leftrightarrow f = -0{,}098$$

Konsequenz: Arbitrage möglich

b)

Währung	EUR	USD	GBP	SFR
EUR	1	1,2601	0,6758	1,5896
USD	0,7936	1	0,5363	1,2612
GBP	1,4797	1,8646	1	2,3521
SFR	0,6291	0,7929	0,4252	1

Aufgabe 7: Internationale Asset Allocation (17 Minuten)

Sie beabsichtigen, ein Investment in die inländische Aktie „Deutschland AG“ sowie in die amerikanische Aktie „US Inc.“ zu tätigen. Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_I := lokale Rendite der inländischen „Deutschland AG“ - Aktie,

R_A := lokale Rendite der amerikanischen „US Inc.“ - Aktie,

e := Wechselkursrendite zwischen USD und EUR,

Die Erwartungswerte (μ) p. a., Standardabweichungen (σ) p. a. und die Korrelation (ρ) der diskreten Renditen seien:

$\mu(R_I) = 0{,}30$; $\mu(R_A) = 0{,}20$; $\mu(e) = 0{,}08$

$\sigma(R_I) = 0{,}25$; $\sigma(R_A) = 0{,}20$; $\sigma(e) = 0{,}15$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Deutschland (Inland) bzw. USA (Ausland) beträgt:

$r_I = 0{,}08$ bzw. $r_A = 0{,}05$.

Die Kovarianzmatrix ist gegeben durch:

	R_I	R_A	e
R_I	0,0625	0	0
R_A		0,04	0,01
e			0,0225

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der $(R_A e)$ -Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Gehen Sie von normalverteilten Renditen aus.

a) Berechnen Sie die faire Forwardprämie zwischen dem Inland und Ausland gemäß dem Zinsparitätentheorem **(2 Minuten)**

b) Berechnen Sie Struktur (relative Investitionsgewichte), den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus der „Deutschland AG“ und „US Inc.“ gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung (des ursprünglichen Investitionsbetrags) durchführt! **(5 Minuten)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, nehmen Sie an, der Devisenforward notiert bei $f = 0{,}0286$.

c) Der Investor wählt im Vorfeld eine Asset-Allokation von 50% „Deutschland AG“ und 50% „US Inc“. Sein Präferenzfunktional hat die Form $U(\mu,\sigma^2) = \mu - 2\sigma^2$. Ermitteln Sie den optimalen Umfang der Wechselkurssicherung, welches das obige Präferenzfunktional maximiert! Welche Wechselkurssicherungsstrategie findet hier Anwendung? **(5 Minuten)**

Hinweis: Die Portfoliovarianz beträgt hier:

$$\sigma^2 = 0{,}0625 \cdot 0{,}25 + (0{,}04 + (1-h)^2 0{,}0225 + 2(1-h)0{,}01) \cdot 0{,}25$$

d) Die Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios (ohne Wechselkurssicherung) betrage $R_{MVP} = 0{,}2914$. Adjustieren Sie die Schätzwerte für die erwarteten Renditen (ohne Wechselkurssicherung) der beiden Anlagen gemäß dem Bayes-Stein-Verfahren! Verwenden Sie einen Schrumpfungsfaktor hin zum MVP von ω = 0,5. **(5 Minuten)**

Hinweis: Die erwartete inländische Gesamtrendite der "US Inc."-Aktie ohne Wechselkurssicherung beträgt $R_A^{h=0} = 0{,}28$.

Lösungsskizze:

a) Nach dem Zinsparitätstheorem gilt: $f = \frac{1+r_1}{1+r_2} - 1 \Rightarrow f = \frac{1{,}08}{1{,}05} - 1 \Leftrightarrow f = 0{,}0286$

b) $\sigma^2_{h=1} = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2$

$$\frac{d\sigma^2_{h=1}}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{d\sigma^2_{h=1}}{dx} = 0{,}125x - 0{,}08 + 0{,}08x \overset{!}{=} 0$$

$x_1 = 0{,}3902, \quad x_2 = 0{,}6098$

$\mu_P = 0{,}3x + (1-x)(0{,}2 + 0{,}0286) = 0{,}2565, \quad \sigma_P = \sqrt{0{,}3902^2 \cdot 0{,}0625 + 0{,}6098^2 \cdot 0{,}04} = 0{,}1562$

c) $U = \mu - 2\sigma^2$

$$\mu = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + (0{,}2 + 0{,}08 + h(f_2 - 0{,}08)) \cdot 0{,}5$$

$$\sigma^2 = 0{,}0625 \cdot 0{,}25 + (0{,}04 + (1-h)^2 0{,}0225 + 2(1-h)0{,}01) \cdot 0{,}25$$

$$\frac{dU}{dh} = 0{,}0143 - 0{,}04 - 0{,}5 \cdot [-0{,}045 + 0{,}045h - 0{,}02]$$

$$\frac{dU}{dh} = 0{,}0143 - 0{,}04 + 0{,}0325 - 0{,}0225h$$

$h = 0{,}3022$

d) $R_1^{I,h=0} = 0{,}30 \cdot 0{,}5 + 0{,}2914 \cdot 0{,}5 = 0{,}2957$

$R_2^{I,h=0} = 0{,}28 \cdot 0{,}5 + 0{,}2914 \cdot 0{,}5 = 0{,}2857$

Aufgabe 8: Langfristinvestments in Immobilien (20 Minuten)

Als Assistent des Finanzvorstands eines großen Pensionsfonds analysieren Sie die Vorteile einer Investition in einen geschlossenen Immobilienfonds. Nach Rücksprache mit Ihrer Research Abteilung erwarten Sie für die auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen r_t des Investments eine mittlere Rendite von 7% p.a, bei einer Volatilität von 4% p.a. und einer Autokorrelation 1. Ordnung von $a = 0{,}6$. Der heutige Kaufpreis eines Anteils an dem geschlossenen Fonds beträgt € 1.000 zzgl. Transaktionskosten in Höhe von 6% des Kaufpreises. Bei Verkauf der Anteile ist mit weiteren Transaktionskosten in Höhe von 4% des Verkaufspreises zu rechnen. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Sie beschließen 1.000 Anteile an dem Immobilienfonds zu erwerben. Berechnen Sie für das Endvermögen nach einem und zehn Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 99\%$ nicht unterschritten wird? **(5 Minuten)**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Ihr anfänglich investiertes Kapital (inkl. Transaktionskosten) nach einem bzw. nach Ablauf von 10 Jahren mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 3% p.a. verzinst hat? **(5 Minuten)**

c) Wieviele Anteile müssen Sie heute zeichnen, um nach 10 Jahren mit einer 99%-igen Wahrscheinlichkeit ein Vermögen von mindestens € 1,2 Mio. zu realisieren? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsbedingungen) **(5 Minuten)**

d) Was ist der Unterschied zwischen einem geschlossenen Immobilienfonds und einem REIT? **(5 Minuten)**

Hinweise: Sei $X \sim LN(m, v^2)$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil

$$E(X)=e^{m+0{,}5v^2}$$
$$Var(X)=E(X)^2\left(e^{v^2}-1\right)$$
$$LN_\alpha(m,v^2)=e^{m+N_\alpha\cdot v}=e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

Lösungsskizze:

a) Korrektur von STD der Einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*) = STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}6^2}{(1-0{,}6)^2}} = 4\% \cdot 2 = 8\%$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma) = \mathrm{N}(7\%;\ 8\%)$ resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim \mathrm{N}\left(T\mu;\sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren und Rücknahmegebühren von 4% des Verkaufpreises gilt damit

$$S_T = 0{,}96 \cdot S_0 \cdot e^{r_{0,t}^*} \sim \mathrm{LN}\left(m;\, v^2\right) = \mathrm{LN}\left(\ln(0{,}96 \cdot S_0) + T\mu;\, T\sigma^2\right).$$

Mit den Hinweisen ergibt sich dann pro Anteil

$$E(S_T) = 0{,}96 \cdot S_0 \cdot e^{T(\mu + 0{,}5 \cdot \sigma^2)} = 9.600 \cdot e^{T(0{,}07 + 0{,}5 \cdot 0{,}08^2)}$$

$$STD(S_T) = E(S_T) \cdot \sqrt{e^{T \cdot \sigma^2} - 1}$$

$$LN_{\alpha=1\%}(S_T) = 0{,}96 \cdot S_0 \cdot e^{T\mu - \sqrt{T} \cdot 1{,}645 \cdot \sigma)} = 9.600 \cdot e^{T \cdot 0{,}07 - \sqrt{T} \cdot 2{,}33 \cdot 0{,}08)}$$

Für das Endvermögen für 1.000 Anteile $V_T = 1000 S_T$

$E(V_1) = 1.032.908$;	$E(V_{10}) = 1.996.066$
$STD(V_1) = 82.765$;	$STD(V_{10}) = 513.157$
$LN_{1\%}(V_1) = 854.514$;	$LN_{1\%}(V_{10}) = 1.072.218$

b) Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. 100a% = 6% des Kaufpreises und 4% des Verkaufspreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right) \sim N[T\mu + \ln\left(\frac{1-b}{1+a}\right), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 3% per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T} = Tz$

$$\rightarrow \text{SW} = \text{P}(r_{0,T}^{TK} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für $T = 1$ resultiert 1-SW = 1-Φ(0,7386)	= 23,01%
Für $T = 10$ resultiert 1-SW = 1-Φ(-1,1894)	= 11,71%

c) Die Anzahl der benötigten Anteil ergibt sich mit X = 1,2 Mio. / $LN_{1\%}(S_{10})$

$$LN_{\alpha=1\%}(S_{T=10}) = 0{,}96 \cdot S_0 \cdot e^{T\mu - \sqrt{T} \cdot 2{,}33 \cdot \sigma)} = 1.072{,}218$$

$$\Rightarrow X = \frac{1.200.000}{1.072{,}218} = 1.119{,}17$$

d) **Geschlossene Immobilienfonds:** Sind eine Möglichkeit der Beteiligungsanlage in Immobilien. Typischerweise werden bei geschlossenen Immobilienfonds die einzelnen Immobilienobjekte, in die das Fondsvermögen investiert werden soll, bereits bei Auflage von den Initiatoren des Fonds festgelegt. Dabei handelt es sich oftmals nur um ein Objekt (etwa ein Einkaufszentrum oder einen Gewerbepark). Weiterhin steht neben den Investitionsobjekten auch der Finanzierungsplan bereits im Auflegungszeitpunkt fest. Dabei wird das benötigte Eigenkapital von den Initiatoren über verschiedene Vertriebsgesellschaften zur Zeichnung angeboten. Ist das notwendige Eigenkapital beschafft, werden keine neuen Anteile mehr angeboten, d.h. der Fonds wird geschlossen. Hinsichtlich der Rechtsform sind geschlossene Fonds meist als Personengesellschaft organisiert, ohne dass spezielle gesetzliche Regelungen, etwa hinsichtlich der Art und Zusammensetzung des Fondsvermögens, existieren.

Bei geschlossenen Fonds kann u.a. zwischen steuerorientierten und ausschüttungsorientierten Fonds unterschieden werden. Im ersten Fall steht, durch so genannte steuerliche Verlustzuweisungen in Verbindung mit für bestimmte Objekte gewährten Sonderabschreibungen, die Ersparnis der Anleger bei der Einkommensteuer im Vordergrund. Derartige Fonds weisen oftmals einen hohen Fremdkapitalanteil auf. Dagegen sind ausschüttungsorientierte Fonds hauptsächlich durch Eigenkapital finanziert und versuchen über die gesamte Fondslaufzeit attraktive Erträge vor Steuern zu erwirtschaften. Insofern steht bei einem geschlossenen Immobilienfonds die Finanzierung des notwendigen hohen Investitionsbudgets (bei Wahrung der steuerlichen Vorteile einer Direktanlage) für wenige Objekte im Vordergrund, wogegen das Ausnutzen von Risikodiversifikationseffekten durch Portfoliobildung in den Hintergrund tritt. Auch existiert für Anteile an geschlossenen Immobilienfonds i.d.R. weder ein geregelter Sekundärmarkt noch besteht eine gesetzliche oder vertragliche Rücknahmeverpflichtung der ausgegebenen Anteile seitens der Fondsgesellschaft. Insofern verbleibt nur die Veräußerung der Anteile über einen wenig organisierten Sekundärmarkt, was deren Liquidität einschränkt. Der hohen Flexibilität dieser Anlageform steht eine geringe Regulierungsintensität und damit geringe Verbraucherschutzvorschriften entgegen.

REIT (Real Estate Investment Trust): Hierbei handelt es um eine Aktiengesellschaft, deren Hauptgeschäftstätigkeit im Immobiliensektor liegt. I.d.R. sind die Anteile börsengehandelt, womit eine vergleichsweise hohe Liquidität über einen Sekundärmarkt vorliegt. Für REITS liegen in bestimmten Ländern (etwa USA, Frankreich, Deutschland) steuerliche Besonderheiten, anhand derer Immobilienaktien, deren Geschäftserfolg maßgeblich aus Miet- und Pachteinnahmen sowie Wertsteigerungen von im eigenen Bestand gehaltenen Immobilien abhängt, abgegrenzt werden können. Entsprechend ihrer Zweckbestimmung als börsennotierte Immobilienanlagegesellschaft für breite Bevölkerungsschichten sind diese Gesellschaften bei Einhaltung bestimmter Auflagen (erlaubte Ertragsquellen, Zusammensetzung der Aktiva, Gestaltung der Ausschüttungspolitik u.a.) von der Körperschaftsteuer befreit. Aufgrund der Börsennotierung sind REITS vergleichsweise transparent und unterliegen den Kontroll- und Regulierungsmechanismen des Kapitalmarkts.

Aufgabe 9: Fixed Income Analyse (13 Minuten)

Eine Hauptkomponenten-Analyse der Veränderung der Zinsstruktur von Anleihen einer bestimmten Ratingklasse hat folgendes Ergebnis gebracht:

$$\Delta R_t(T) = b1(T)\cdot\Delta F_{t,1} + b2(T)\cdot\Delta F_{t,2} + b3(T)\cdot\Delta F_{t,3} + \varepsilon_t(T) \text{ mit}$$
$$E[\varepsilon_t] = 0, Var[\varepsilon_t] = \sigma^2,$$
$$E[\Delta F_{t,i}] = 0, Var[\Delta F_{t,i}] = \sigma_i^2, i = 1,...,3 .$$

D.h. der Zinssatz $R_t(T)$ in *t* mit Restlaufzeit *T*, steigt/fällt um $\Delta R_t(T)$, bei einer Veränderung der laufzeitunspezifischen, systematischen Risiko-Faktoren $F_{t,i}$ um $\Delta F_{t,i}$ unter Berücksichtigung eines laufzeitspezifischen, unsystematischen Risikofaktors $\varepsilon_t(T)$. Dabei sind $b1(T), b2(T), b3(T)$ die laufzeitspezifischen, konstanten Faktorladungen. Die Kovarianzen seien alle gleich 0.

a) Wie hoch ist die erwartete Zinssatzveränderung $E[\Delta R_t(T)]$? **(4 Minuten)**

b) Wie hoch ist die Varianz der Zinssatzveränderung $Var[\Delta R_t(T)]$? **(4 Minuten)**

c) Die aktuelle Zinsstruktur $R_t(T)$ ist flach bei 5%. Welche Zinssätze erwarten Sie für die Restlaufzeiten 1 und 10 Jahre bei einer Veränderung

(i) nur des 1. Faktors F_1 um 0,05, **(2,5 Minuten)**

(ii) nur des 2. Faktors F_2 um 0,08. **(2,5 Minuten)**

Beachte: Die Faktorladungen sind wie folgt gegeben:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b1(T)	0,326	0,355	0,350	0,339	0,326	0,313	0,301	0,290	0,280	0,272
b2(T)	-0,593	-0,391	-0,215	-0,065	0,059	0,158	0,236	0,299	0,348	0,388
b3(T)	0,643	-0,103	-0,378	-0,379	-0,266	-0,122	0,020	0,144	0,253	0,346

Lösungsskizze:

a) $E(\Delta R_t(T)) = E(b_1 \cdot \Delta F_{t,1} + b_2 \Delta F_{t,2} + b_3 \Delta F_{t,3} + \varepsilon_t)$

$= b_1 E(\Delta F_{t,1}) + b_2 E(\Delta F_{t,2}) + b_3 E(\Delta F_{t,3}) + E(\varepsilon_t)$

$= b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 + 0 = 0$

b) **Lösung: (da Kovarianzen zwischen den Faktoren 0)**

$Var(\Delta R_t(T)) = Var(b_1 \cdot \Delta F_{t,1} + b_2 \Delta F_{t,2} + b_3 \Delta F_{t,3} + \varepsilon_t)$

$= b_1^2 Var(\Delta F_{t,1}) + b_2^2 Var(\Delta F_{t,2}) + b_3^2 Var(\Delta F_{t,3}) + Var(\varepsilon_t)$

$= b_1^2 \cdot \sigma_1^2 + b_2^2 \cdot \sigma_2^2 + b_3^2 \cdot \sigma_3^2 + \sigma_4^2$

c) Restlaufzeit 1:

$\Delta R_t(1) = 0.326 \Delta F_{t,1} - 0.593 \Delta F_{t,2} + 0.643 \Delta F_{t,3}$

i.) nur des 1. Faktors F_1 um 0.05

$\Delta R_t(1) = 0.326 \cdot 0.05 = 0.0163$

$R_t(1) = 0.05 + 0.0163 = 6.63\%$

ii.) nur des 2. Faktors F_2 um 0.08

$\Delta R_t(1) = -0.593 \cdot 0.08 = -0.04744$

$R_t(1) = 0.05 - 0.04744 = 0.256\%$

Restlaufzeit 10:

$$\Delta R_t(10) = 0.272\Delta F_{t,1} + 0.388\Delta F_{t,2} + 0.346\Delta F_{t,3}$$

i.) nur des 1. Faktors F_1 um 0.05

$$\Delta R_t(10) = 0.272 \cdot 0.05 = 0.0136$$
$$R_t(10) = 0.05 + 0.0136 = 6.36\%$$

ii.) nur des 2. Faktors F_2 um 0.08

$$\Delta R_t(10) = 0.388 \cdot 0.08 = 0.03104$$
$$R_t(10) = 0.05 + 0.03104 = 8.104\%$$

Anhang

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\Phi(x)$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000