Bericht zur Prüfung im Oktober 2006 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), Hans-Jochen Bartels (Mannheim)
und Raimond Maurer (Frankfurt)

Am 21. Oktober 2006 wurde zum sechsten Mal eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. Hierbei waren 18 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sieben Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissenseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 81 von 180 möglichen Punkten erreicht werden

<u>Block I</u> (Albrecht)

<u>Aufgabe 1:</u> (30 Minuten)

Gegeben sei ein Europäischer Put mit Laufzeit T, dessen heutiger Wert (Preis) P_t beträgt.

a) Wie lautet die approximative Änderung des Putwerts über das Zeitintervall [t, t+h] unter Anwendung der Delta-Approximation?

b) Bestimmen Sie für die Put-Position den Value at Risk zum Konfidenzniveau α über das Zeitintervall [t, t+h] auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation und unter der Annahme von Black/Scholes-Preisen. Unterstellen Sie dabei für die Log-Rendite $U_h = \ln(S_{t+h}/S_t)$ des Basisobjekts $U_h \sim N(0,v^2h)$.

c) Approximieren Sie den Value at Risk aus Aufgabenteil b), indem Sie die Exponentialfunktion linear approximieren!

<u>Hinweise:</u> Das Put-Delta eines europäischen Put lautet im Falle von Black/Scholes-Preisen:

$$\Delta_P(t) = -N(-d_1) = -N[-d_1(t)].$$

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Die Delta-Approximation lautet

$$P_{t+h} - P_t \approx \Delta_P(t)(S_{t+h} - S_t),$$

wobei $\Delta_P(t) = \partial P_t / \partial S_t$.

b) Definiere die Verlustvariable $L = P_t - P_{t+h}$. Es folgt:

$$L = P_t - P_{t+h} = -\frac{\partial P}{\partial S_t}(S_{t+h} - S_t)$$
$$= N(-d_1)(S_{t+h} - S_t)$$
$$= N(-d_1)\,S_t\,[S_{t+h}/S_t - 1]$$
$$= N(-d_1)\,S_t(e^{U_h} - 1)\,.$$

Die Bestimmungsgleichung für den Value at Risk lautet:

$$P(L > VaR) = \alpha\,.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha = P[N(-d_1)\,S_t(e^{U_h} - 1) > VaR]$$
$$= P\left[U_h > \ln\left(1 + \frac{VaR}{N(-d_1)S_t}\right)\right].$$

U_h ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $(1-\alpha)$-Quantil $Q_{1-\alpha}$, d.h. $P(U_h > Q_{1-\alpha}) = \alpha$, und es gilt $Q_{1-\alpha} = N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}$. Durch Vergleich folgt

$$\ln\left(1 + \frac{VaR}{N(-d_1)\,S_t}\right) = N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}$$

und damit insgesamt

$$VaR = N(-d_1)\,S_t\left[e^{N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}} - 1\right].$$

c) Mit $\exp(x) \approx 1+x$ folgt aus b)

$$VaR \approx N(-d_1)\,S_t\,N_{1-\alpha}\, v\sqrt{h}\,.$$

<u>Aufgabe 2:</u> (30 Minuten)

Gehen Sie aus von einem allgemeinen Zählprozess $\{N(t);\, t \geq 0\}$ mit $N(0) = 0$ zur Modellierung der Ausfallzeit τ eines Unternehmens.

a) Wie ist die Ausfallzeit in Termen des Zählprozesses definiert?

b) Wie bestimmen sich bei einem Ausfallhorizont T die Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt 0, d.h. $P(0,T) := P(\tau > T)$, bzw. die Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt 0, d.h. $PD(0,T) := P(\tau \leq T)$, in Termen des Zählprozesses?

c) Unterstellen Sie einen homogenen Poissonprozess mit Parameter λ als Zählprozess. Wie lauten in diesem Falle $P(0,T)$ bzw. $PD(0,T)$?

Unterstellen Sie nun – jeweils unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q – einen homogenen Poissonprozess als Ausfallprozess, die Unabhängigkeit von Ausfallzeit τ und Zinsprozess {R(t)}, eine Recovery Rate von rc, die Recovery of Treasury-Annahme sowie eine sichere fristigkeitsunabhängige Zinsrate r.

d) Konkretisieren Sie für diesen Fall die Bewertungsgleichung (Hinweis) zum Zeitpunkt t = 0 für einen ausfallbedrohten Einheitszerobond mit Laufzeit T.

e) Leiten Sie auf dieser Basis einen expliziten Ausdruck für die risikoneutrale Ausfallintensität ab.

Hinweis: Für einen allgemeinen Zählprozess lautet die Bewertungsgleichung im vorstehenden Fall generell

$B^d(t,T) = B(t,T)\ \{rc + (1 - rc)\ Q(t,T)\}$.

Lösungsskizze:

a) Die Ausfallzeit τ ist definiert als Zeitpunkt des ersten Sprungs des Zählprozesses, d.h.

$$\tau = \inf\{t \geq 0; N(t) > 0\}.$$

b) $P(0,T) = P(\tau > T) = P[N(T) = 0]$

$PD(0,T) = P(\tau \leq T) = P[N(T) > 0] = 1 - P(0,T)$

c) $P(0,T) = \dfrac{(\lambda T)^0}{0!} e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T}$

$PD(0,T) = 1 - e^{-\lambda T}$

d) Es bezeichne nun λ_Q die Ausfallintensität des homogenen Poissonprozesses unter Q. Aus dem Hinweis und Aufgabenteil c) folgt dann

$$B^d(0,T) = e^{-rT}\left\{rc + (1-rc)e^{-\lambda_Q T}\right\}.$$

e) Aus vorstehender Gleichung folgt (LGD = 1 – rc)

$$B^d(0,T)e^{rT} - rc = LGD\, e^{-\lambda_Q T}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$e^{\lambda_Q T} = \frac{LGD}{B^d(0,T)\exp(rT) - rc}$$

Auflösung nach λ_Q:

$$\lambda_Q = \frac{1}{T}\ln\left\{\frac{LGD}{B^d(0,T)\exp(rT) - rc}\right\}.$$

Block II (Bartels)

Aufgabe 3: **(20 Minuten)**

Es gelte $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ mit einer standardisierten Brownschen Bewegung W.

(i) Welcher stochastischen Differentialgleichung genügt der Prozess $Y_t := \ln(1+S_t)$?

(ii) Man berechne (als Integral) $\langle Y,Y\rangle_t$.

Hinweise: Für (i) benutze man Itôs Formel, und für einen Itô-Prozess $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$ berechnet sich die quadratische Variation zu $\langle X,X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Lösungsskizze:

Zu (i) : Mit der Itô-Formel ergibt sich wegen

$$\frac{d}{dx}(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad \frac{d^2}{(dx)^2}\ln(1+x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ direkt}$$

$$dY_t = \frac{1}{1+S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+S_t)^2}d\langle S,S\rangle_t = \frac{1}{1+S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+S_t)^2}\sigma^2 S_t^2 dt =$$

$$= \frac{(1+S_t)\mu S_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2}{(1+S_t)^2}dt + \frac{1}{1+S_t}\sigma S_t dW_t .$$

Sinnvollerweise ist in dieser Darstellung noch der Prozess S_t durch den Prozess Y_t zu darzustellen. Nach Definition von Y_t ist $1 + S_t = e^{Y_t}$ und damit folgt $S_t = e^{Y_t} - 1$.
Fügt man dies in oben abgeleitete stochastische Differentialgleichung für Y_t ein, ergibt sich insgesamt:

$$dY_t = ((1-e^{-Y_t})\,\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(1-e^{-Y_t})^2)dt + (1-e^{-Y_t})\,\sigma\, dW_t \; .$$

Zu (ii) :

Mit dem Ergebnis aus (i) berechnet sich $\langle Y,Y\rangle_t$ zu $\int_0^t \frac{\sigma^2 S_t^2}{(1+S_t)^2}dt = \sigma^2\int_0^t \frac{S_t^2}{(1+S_t)^2}dt$

oder:

$$\langle Y,Y\rangle_t = \sigma^2\int_0^t (1-e^{-Y_s})^2 ds \; .$$

<u>Aufgabe 4:</u> (40 Minuten)

Für eine fondsgebundene Rentenversicherung mit einer kurzen Aufschubdauer von einem Jahr wird von der Kapitalanlagegesellschaft des Versicherungsunternehmens zu Beginn eines Jahres ein einjähriges spezielles Zertifikat angeboten, das sich an dem Verlauf eines Aktienpapiers orientiert.
Bezeichnen x(0) den Stand der zugrunde liegenden Aktie zu Beginn, x(1) den Stand nach Ablauf eines Jahres, so sieht das Zertifikat pro Stück folgende Leistungsversprechen vor:

- Falls das Kursniveau der Aktie nach einem Jahr gleich geblieben ist oder unter den Ausgangswert gefallen ist, erhält der Kunde pro Stück den Wert x(1), mindestens aber den Wert 0.95 x(0), d.h. Max(0.95x(0),x(1)) ist in diesem Fall das Ergebnis;
- Falls das Kursniveau x(1) über dem Ausgangswert x(0) liegt, dann erhält der Kunde $x(0) + \text{Min}\ (0.5(\frac{x(1)}{x(0)} - 1)^+, 0.25) \cdot x(0)$, d.h. er partizipiert zur Hälfte an den Steigerungen des zugrunde liegenden Wertpapiers, die maximal mögliche Rendite wird aber auf 25 % begrenzt.

Gehandelt werden neben dem Basispapier mit dem Anfangswert x(0) = 40 auch Europäische Put- und Call-Optionen auf dieses Papier gemäß folgender Tabelle:

Basispreis	Ausübungstermin		
	Put-Optionen		
	30.06.	30.09.	31.12.
38	0.77	1.54	2.50
40	1.78	2.61	3.44
42	1.96	3.11	3.58
	Call-Optionen		
50	0.60	1.10	3.50

(i) Wie kann der Anleger der Kapitalgesellschaft mit den oben angegebenen handelbaren Papieren eine Deckung des Gewinnversprechens für das ausgegebene Zertifikat möglichst kostengünstig erreichen, wenn der Ausgabepreis € 40 pro Stück beträgt ?

(ii) Welcher minimale Ertrag pro Stück bleibt in jedem Fall bei der Gesellschaft, d.h. bei allen denkbaren Kursverläufen des Basispapiers?

(iii) Die Kapitalanlagegesellschaft möchte durch „Kurspflege“ den Stand des zugrunde liegenden Basispapiers zum Fälligkeitsdatum des Zertifikats so beeinflussen, dass sie selbst den besten Ertrag aus dem verkauften Zertifikat realisiert. Bei welchem Stand des Aktienpapiers am Ende des Jahres ist der Ertrag für die Gesellschaft am größten?

<u>Hinweis:</u> Der Einfachheit halber wird angenommen, dass keine Transaktionskosten anfallen, weder bei Käufen noch bei Verkäufen aller hier genannten Anlagearten und dass für die erwähnten Aktien in dem betrachteten Jahr keine Dividenden ausgeschüttet werden.

Lösungsskizze:

(i): Zur Abdeckung des Leistungsversprechens wird pro Stück des verkauften Papiers

- zum einen je eine Aktie und eine Europäische Put-Option mit Basispreis 38 und Ausübungstermin 31.12. gekauft, das begrenzt die möglichen Verluste auf 95 % des Anfangsniveaus,
- zum anderen verkauft man, um die Kosten dieser Absicherungsstrategie zu finanzieren, pro gekaufter Aktie noch eine Call-Option mit Ausübungsdatum 31.12. und Ausübungspreis 50. Das limitiert allerdings die Gewinnchancen aus der Aktienanlage nach oben: Der Inhaber der Call-Option wird im Falle x(1) > 50, diese ausüben, und damit sind die Gewinne für die Kapitalanlagegesellschaft aus der Aktienanlage automatisch auf maximal 25 % begrenzt. Das Leistungsversprechen kann aber in jedem Fall eingehalten werden. Da in diesem Beispiel der Verkauf der Call-Option mehr einbringt als der Kauf der Put-Option kostet, nämlich € 3.50 minus € 2.50, hat man in keinem Fall bei Ausgabe dieses Zertifikats als Gesellschaft einen Verlust gemacht.

(ii): Aus den letzten Feststellungen unter (i) folgt, dass man mindestens 1€ pro Stück des verkauften Zertifikats als Ertrag behält.

(iii): Falls der Wert x(1) des Basispapiers nach einem Jahr nicht über dem Ausgangswert x(0) liegt, wird im Fall x(1) < 38 die Put-Option einzusetzen sein, um das versprochene Auszahlungsniveau einzuhalten, im Falle $38 \le x(1) \le 40$ wird man die Aktie verkaufen und diesen Ertrag an den Käufer des Zertifikats weitergeben. In beiden diskutierten Fällen hat man als Kapitalanlagegesellschaft keine weiteren Erträge als die unter (ii) genannten Werte, da davon ausgegangen wurde, dass keine Dividenden auf Aktien ausgeschüttet wurden.

Liegt nun der Wert x(1) des Basispapiers über dem Ausgangswert x(0), so erhält der Käufer des

Zertifikats $\mathrm{x}(0) + \operatorname{Min}\left(0.5\left(\frac{\mathrm{x}(1)}{\mathrm{x}(0)} - 1\right)^{+}, 0.25\right) \cdot \mathrm{x}(0)$.

Nun ist

$$\mathrm{x}(0) + 0.5\left(\frac{\mathrm{x}(1)}{\mathrm{x}(0)} - 1\right)^{+} \cdot \mathrm{x}(0) = \mathrm{x}(0) + 0.5(\mathrm{x}(1) - \mathrm{x}(0))^{+}$$

$$= 40 + 0.5(\mathrm{x}(1) - 40))^{+}$$

eine monoton wachsende Funktion von x(1) und ebenso auch die Differenz

$\mathrm{x}(1) - (\mathrm{x}(0) + 0.5\left(\frac{\mathrm{x}(1)}{\mathrm{x}(0)} - 1\right) \cdot \mathrm{x}(0)) = 0.5\,(\mathrm{x}(1) - \mathrm{x}(0))$. Damit steigt der Gewinn des Unternehmens mit wachsendem Wert x(1). Begrenzt wird aber alles durch die verkaufte Call-Option: Ist nämlich x(1) > 50, hat man pro Call eine Aktie zum Preis von € 50 zu liefern und damit ist der maximal mögliche Gewinn begrenzt. Der optimale Gesamtertrag für die ausgebende Gesellschaft beläuft sich dann also auf 0.5 (50-40) = 5 pro ausgegebenem Stück des Papiers zuzüglich dem Ertrag 1 zu Beginn des Jahres, der aus der Preisdifferenz des gekauften Puts und des verkauften Calls resultiert. Bei „Kurspflege" an den Kapitalmärkten wird man also versuchen, den Wert des Basispapiers auf das Niveau 50 zu heben oder darüber.

Block III (Maurer)

Aufgabe 5: Portfolioselektion / Internationale Investments (20 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite des Wertpapiers i (i = 1, 2),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien die Erwartungswerte p.a. und Standardabweichungen p.a. der diskreten Renditen:

$$\mu(R_1) = 0{,}30;\quad \mu(R_2) = 0{,}20;\quad \mu(e_2) = 0{,}08$$
$$\sigma(R_1) = 0{,}25;\quad \sigma(R_2) = 0{,}2;\quad \sigma(e_2) = 0{,}15.$$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$r_1 = 0{,}08$ bzw. $r_2 = 0{,}05$.

Die Kovarianzmatrix p. a. ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,0625	0	0
R_2		0,04	0,01
e_2			0,0225

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
- Gehen Sie von normalverteilten Renditen aus.
- Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

a) Berechen Sie die faire Forwardprämie f_2 gemäß dem Zinsparitätentheorem. **(2 Minuten)**

b) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglich investierten Investitionsbetrags durchführt. **(4 Minuten)**

Hinweis: Sollten Sie Aufgabe a) nicht gelöst haben, rechnen Sie mit einer Forwardprämie von $f_2 = 0{,}0286$.

c) Berechnen Sie die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung desjenigen Portfolios aus dem in- und dem ausländischen Wertpapier, dass mit 95%iger Wahrscheinlichkeit eine Mindestverzinsung von 1% p.a. erwirtschaftet und gleichzeitig die erwartete Rendite maximiert. Gehen Sie davon aus, dass eine vollständige Wechselkurssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrags durchgeführt wird. **(5 Minuten)**

Hinweis: Das Tangentialportfolio bei vollständiger Wechselkurssicherung ist zu 48,66% in Wertpapier 1 und zu 51,34% in Wertpapier 2 investiert. Der effiziente Rand hat die Form $\mu = r_1 + SR_{TP} \cdot \sigma$, wobei SR_{TP} die Sharpe-Ratio des Tangentialportfolios bezeichnet.

d) Der Investor wählt im Vorfeld eine Asset-Allokation von 50% Wertpapier 1 und 50% Wertpapier 2. Sein Präferenzfunktional hat die Form $U = \mu - 2\sigma^2$. Ermitteln Sie den optimalen Umfang der Wechselkurssicherung. Ist es sichergestellt, dass das global optimale Portfolio ermittelt wurde? **(5 Minuten)**

e) Der Investor adjustiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen (ohne Wechselkurssicherung) gemäß dem James/Stein-Verfahren. Er verwendet einen Schrumpfungsfaktor hin zum MVP von ω = 0,5. Berechnen Sie die adjustierten erwarteten Renditen. Interpretieren Sie den ω-Parameter.

Hinweis: Der effiziente Rand bestehend aus rein riskanten Anlagen (ohne Wechselkurssicherung) hat die Form $\mu = 0{,}2914 + \sqrt{0{,}003(\sigma^2 - 0{,}0356)}$ **(4 Minuten)**

Lösungsskizze:

a) Nach dem Zinsparitätstheorem gilt: $f = \dfrac{1+r_1}{1+r_2} - 1 \Rightarrow f = \dfrac{1{,}08}{1{,}05} - 1 \Leftrightarrow f = 2{,}8571\%$

b) Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors bei „vollständiger" Wechselkurssicherung mit Devisenforwards (h=1):

$$R_{PF}^{h=1} = xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2 + R_2 e_2] \approx xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der ($R_2 e_2$)-Kreuzprodukttterme zu vernachlässigen, also:

$$Var(R_{PF}^{h=1}) = x^2 Var(R_1) + (1-x)^2 Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1, R_2)$$

$$= 0{,}1025x^2 - 0{,}08x + 0{,}04$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R_{PF}^{h=1})}{dx} = 0{,}205x - 0{,}08 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{MVP}^{h=1} = 0{,}3902$$

$$\rightarrow E(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}2565$$

$\rightarrow Var(R_{PF}^{h=1,MVP}) = 0{,}0244 \quad ; \quad STD(R_{PF.}^{h=1,MVP}) = 0{,}1562$

c) Sei $N_{0.95}$ das 95% Quantil der Standardnormalverteilung dann resultiert für die Shortfall-restriktion $\mu = 0.01 + N_{0.95}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0, 1)-Verteilung gilt 1,64 < $N_{0,9}$ < 1,65. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0.95}$ = 1,65 gesetzt.

$$\rightarrow \mu = 0{,}01 + 1{,}65\,\sigma$$

Effizienter Rand (bestehend aus risikolosem inländischen Asset und riskanten in-/ausländischen Assets gemäß Tangentialportfolio)

$$\mu = r_1 + SR \cdot \sigma = r_1 + \frac{\mu_{TP} - r_1}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma = 0{,}08 + \frac{\mu_{TP} - 0{,}08}{\sigma_{TP}} \cdot \sigma$$

$$\mu_{TP} = 0{,}4866 \cdot \mu(R_1) + (1 - 0{,}4866) \cdot \mu(R_2 + f_2) = 0{,}4866 \cdot 0{,}3 + 0{,}5134 \cdot 0{,}2286 = 0{,}2633$$

$$\sigma_{TP} = \sqrt{0{,}4866^2 \sigma^2(R_1) + 0{,}5134^2 \sigma^2(R_2)} = \sqrt{0{,}4866^2 \cdot 0{,}0625 + 0{,}5134^2 \cdot 0{,}04} = 0{,}1591$$

$$\Rightarrow SR = \frac{0{,}2633 - 0{,}08}{0{,}1591} = 1{,}1521$$

$$\Rightarrow \mu = 0{,}08 + 1{,}1521 \cdot \sigma$$

Schnittpunkt Effizienzlinie / Shortfallgerade

$$0{,}01 + 1{,}65\sigma = 0{,}08 + 1{,}1521\sigma$$

$$\Rightarrow \sigma_{opt} = 0{,}1406$$

$$\Rightarrow \mu_{opt} = 0{,}2420$$

Sei a derjenige Teil des Portfolios, welcher in das (riskante) Tangentialportfolio investiert wird, dann gilt: $\sigma_{opt} = a \cdot \sigma_{TP}$ und somit

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma_{opt}}{\sigma_{TP}} = \frac{0{,}1406}{0{,}1591} \approx 88{,}37\%$$

Insgesamt werden 0,8837*0,4866 = 43% in Wertpapier 1, 0,8837*0,5134 = 45,37% in Wertpapier 2 und 1-0,8837= 11,63% in die risikolose inländische Anlage angelegt.

d) <u>Bestimmung der erwarteten Rendite in Abhängigkeit von *h*:</u>

$$\mu = xE(R_1) + (1-x)E(R_2 + (1-h)e_2 + hf_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5(0{,}2 + 0{,}08 - 0{,}08h + 0{,}0286h)$$
$$= 0{,}15 + 0{,}14 - 0{,}0257h = 0{,}29 - 0{,}0257h$$

<u>Bestimmung der Varianz in Abhängigkeit von *h*:</u>

$$\sigma^2 = x^2 Var(R_1) + (1-x)^2[Var(R_2) + (1-h)^2 Var(e_2) + 2(1-h)Cov(R_2, e_2)]$$
$$+ 2x(1-x)[Cov(R_1, R_2) + (1-h)Cov(R_1, e_2)]$$
$$\sigma^2 = 0{,}015625 + 0{,}25[0{,}04 + (1-h)^2 0{,}0225 + 2(1-h)0{,}01]$$
$$= 0{,}03625 + 0{,}005625h^2 - 0{,}01625h$$

Maximierung Präferenzfunktional:

$$U = (0{,}29 - 0{,}0257h) - 2(0{,}03625 + 0{,}005625h^2 - 0{,}01625h)$$

$$\frac{dU}{dh} = 0{,}0068 - 0{,}0225h = 0 \Rightarrow h = 0{,}3022$$

Es wurde ein Currency Overlay angewendet. Bei diesem vereinfachten Optimierungsverfahren wird i.d.R. nur ein lokales, nicht jedoch ein globales Optimum erreicht.

e) h = 0, ω = 0,5 sowie E(R_{MVP}) = 0,2914 (gemäß effizienter Rand)

$$E(R_{1,\omega}^{h=0}) = (1-\omega)E(R_1) + \omega E(R_{MVP}) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}2914 = 0{,}2957$$
$$E(R_{2,\omega}^{h=0}) = (1-\omega)[E(R_2) + E(e_2)] + \omega E(R_{MVP}) = 0{,}5 \cdot 0{,}28 + 0{,}5 \cdot 0{,}2914 = 0{,}2857$$

ω = 0,5 ist der Glaubwürdigkeitsfaktor, der angibt wie stark das Vertrauen in die (geschätzen) Erwartungswerte ist.

<u>Aufgabe 6:</u> „Fisher/Weil Duration“ (20 Minuten)

Unterliegt die anfängliche zeitstetige Zinsstruktur $u(t)$ einem additiven Shift λ, so ergibt sich die neue Zinsstruktur zu $u(t)^* = u(t) + \lambda$. Gegeben sei nun ein Bond mit der Zahlungsreihe $X = \{X(t_i)\}$ mit i=1,...,n.

a) Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt, zu dem der Wert des Bonds immunisiert ist, gerade der Fisher/Weil-Duration

$$D_{FW} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} t_i \; X\,(t_i)\; e^{-u_i t_i}$$

entspricht. Berücksichtigen Sie dabei die Anforderung an den immunisierenden Durationszeitpunkt s: $\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0$. **(5 Minuten)**

b) Es seien $X_1 = \{X_1(t_i)\}$ und $X_2 = \{X_2(t_i)\}$ die Zahlungsreihen zweier Bonds mit zugehörigen Barwerten P_1 und P_2 bzw. Fisher/Weil-Durationen $D_{FW,1}$ und $D_{FW,2}$. Von Bond 1 werden a Einheiten, von Bond 2 werden b Einheiten erworben. Nun möchten Sie wissen, zu welchem Zeitpunkt Ihr Bond-Portfolio gegenüber einem additiven Zinsshift immunisiert ist. Wie Sie in Teilaufgabe a) bewiesen haben, entspricht dieser Zeitpunkt gerade der Fisher/Weil-Duration des Portfolios. Zeigen Sie, dass für diese gilt: **(5 Minuten)**

$$D_{FW,P} = \frac{aP_1D_{FW,1} + bP_2D_{FW,2}}{aP_1 + bP_2}.$$

Gehen Sie nun von folgender zeitstetiger Zinsstruktur aus:

Laufzeit (Jahre) t	1	2	3	4	5	6	7
Spot Rate $u(t)$	4,0%	5,0%	6,0%	6,5%	7,0%	7,5%	8,0%

c) Es seien Zero Coupon Bonds mit Laufzeit T = 7 und Nennwert 100 und Standardbonds mit Coupon 5%, Nennwert 100 und Laufzeit $T = 3$ verfügbar. Wie hoch müssen die Stückzahlen der Bonds in Ihrem Portfolio gewählt werden, wenn der Gesamtanlagebetrag EUR 10.000,- beträgt und es im Zeitpunkt $T = 4$ gegenüber einem additivem Zinsshift immunisiert sein soll. (Vernachlässigen Sie Ganzzahligkeitsbedingungen!) **(5 Minuten)**

d) Nehmen Sie den Zinsshift $\lambda = 0{,}5\%$ an. Berechnen Sie den genauen Wert Ihres eben berechneten Portfolios nach 4 Jahren einmal mit und einmal ohne Zinsshift! Benutzen Sie dazu die oben errechneten Stückzahlen bzw. die Stückzahlen a = 48,38 und b = 74,58, falls c) nicht gelöst wurde. **(5 Minuten)**

Lösungsskizze:

a)

$$K_s(\lambda) = e^{[u(s)+\lambda]s} \sum_{i=1}^{n} X(t_i) e^{-(u_i+\lambda)t_i} = e^{u(s)s} \sum_{i=1}^{n} X(t_i) e^{-u_i t_i} \; e^{\lambda(s-t_i)}$$

$$\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda} = e^{u(s)s} \sum_{i=1}^{n} (s-t_i)\, Z(t_i) e^{-u_i t_i} \; e^{\lambda(s-t_i)}$$

$$\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = e^{u(s)s} \sum_{i=1}^{n} (s-t_i)\, Z(t_i) e^{-u_i t_i} = 0$$

$$\Rightarrow s \sum_{i=1}^{n} Z(t_i) e^{-u_i t_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i Z(t_i) e^{-u_i t_i} \Leftrightarrow s = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i Z(t_i) e^{-u_i t_i}}{\sum_{i=1}^{n} Z(t_i) e^{-u_i t_i}} = D_{FW.}$$

b)

$$D_{FW,P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (aX_1(t_i) + bX_2(t_i)) e^{-u_i t_i}}{\sum_{i=1}^{n} (aX_1(t_i) + bX_2(t_i)) e^{-u_i t_i}} = \frac{a\sum_{i=1}^{n} t_i X_1(t_i) e^{-u_i t_i} + b\sum_{i=1}^{n} t_i X_2(t_i) e^{-u_i t_i}}{a\sum_{i=1}^{n} X_1(t_i) e^{-u_i t_i} + b\sum_{i=1}^{n} X_2(t_i) e^{-u_i t_i}}$$

$$\Rightarrow D_{FW,P} = \frac{aP_1 D_{FW,1} + bP_2 D_{FW,2}}{aP_1 + bP_2}$$

c)

$$D_{FW,P} = \frac{aP_1 D_{FW,1} + bP_2 D_{FW,2}}{aP_1 + bP_2} \stackrel{!}{=} 4$$

$$I = aP_1 + bP_2 \stackrel{!}{=} 10000$$

$$P_1 = 100e^{-7\cdot 0,08} = 57,1209$$

$$P_2 = 5e^{-1\cdot 0,04} + 5e^{-2\cdot 0,05} + 105e^{-3\cdot 0,06} = 97,0315$$

$$D_{FW,1} = \frac{1}{P_1}\sum_{i=1}^{n} t_i\ X_1\ (t_i)\ e^{-u_i t_i} = 7(ZeroBond!),$$

$$D_{FW,2} = \frac{1}{P_2}\sum_{i=1}^{n} t_i\ X_2\ (t_i)\ e^{-u_i t_i} = \frac{1}{97,0315}\left(1\cdot 5e^{-1\cdot 0,04} + 2\cdot 5e^{-2\cdot 0,05} + 3\cdot 105e^{-3\cdot 0,06}\right) = 2,8544$$

Rest: 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten a und b:

$$a = \frac{(I - bP_2)}{P_1}$$

$$D_{FW,P} = \frac{\frac{(I - bP_2)}{P_1} P_1 D_{FW,1} + bP_2 D_{FW,2}}{I} = 4$$

$$(I - bP_2)D_{FW,1} + bP_2 D_{FW,2} = 4I$$

$$ID_{FW,1} - bP_2 D_{FW,1} + bP_2 D_{FW,2} = 4I$$

$$b = \frac{I(4 - D_{FW,1})}{P_2(D_{FW,2} - D_{FW,1})} = 74,579$$

$$a = \frac{(I - bP_2)}{P_1} = 48,3796$$

d)

$$K_s(\lambda) = aK_{1,s}(\lambda) + bK_{2,s}(\lambda)$$

$$= ae^{[u(s)+\lambda]s}\sum_{i=1}^{n} X_1(t_i)e^{-(u_i+\lambda)t_i} + be^{[u(s)+\lambda]s}\sum_{i=1}^{n} X_2(t_i)e^{-(u_i+\lambda)t_i}$$

<u>Für λ=0%</u>

$$K_s(\lambda) = aK_{1,s}(\lambda) + bK_{2,s}(\lambda)$$

$$= 74.0818a + 125.8431b$$

$$= 12969,3009$$

<u>Für λ=0,5%</u>

$$K_s(\lambda) = aK_{1,s}(\lambda) + bK_{2,s}(\lambda)$$

$$= 72.9789a + 126.5664b$$

$$= 12969,8828$$

<u>Aufgabe 7:</u> "Langfristinvestments in Immobilien" (20 Minuten)

Als gut ausgebildeter Aktuar analysieren Sie die Vorteile einer Investition in einen offenen Immobilienfonds. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen r_t des betreffenden Immobilienfonds ergibt für die mittlere Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 2\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung $a = 0{,}6$. Der heutige Rücknahmepreis des Fonds beträgt € 100, der Ausgabepreis liegt bei € 106. Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Sie investieren €10.000 in den Immobilienfonds. Berechnen Sie für das Endvermögen nach einem und neun Jahren: den Erwartungswert, die Standardabweichung sowie das Mindestvermögen, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 95\%$ nicht unterschritten wird. **(5 Minuten)**

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Ihr anfänglich investiertes Kapital von €10.000 nach einem bzw. nach Ablauf der 9 Jahre mindestens mit einer (kontinuierlichen) Rendite von 2% p.a. verzinst hat? **(5 Minuten)**

c) Welchen Gesamtbetrag benötigen Sie für Ihre Investition heute, um nach 9 Jahren mit einer 95%-igen Wahrscheinlichkeit ein Vermögen von mindestens € 12.000,- zu realisieren? **(5 Minuten)**

d) Erläutern Sie die Run-Problematik bei einem Offenen Immobilienfonds. **(5 Minuten)**

<u>Hinweise:</u> Sei $X \sim LN(m, v^2)$ eine logarithmisch normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern m und v^2, und N_α das α-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle im Anhang), dann gilt $aX^b \sim LN(\ln a + bm, b^2v^2)$ sowie für Erwartungswert, Varianz, und α-Quantil :

$$E(X)=e^{m+0,5v^2}$$
$$Var(X)=E(X)^2\left(e^{v^2}-1\right)$$
$$LN_\alpha(m,v^2)=e^{m+N_\alpha \cdot v}=e^{m-N_{1-\alpha}\cdot v}$$

Das Blundell/Ward-Verfahren korrigiert die Varianz gemäß: $VAR(r_t^*) = VAR(r_t)\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}$

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Korrektur von STD der Einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(r_t^*) = STD(r_t)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}6^2}{(1-0{,}6)^2}} = 2\% \cdot 2 = 4\%$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim N(\mu;\sigma)$ = N(5%; 4%) resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim N\left(T\mu;\sigma\sqrt{T}\right)$. Für das Endvermögen nach T Jahren gilt damit $S_T = S_0 \cdot e^{r^*_{0,t}} \sim LN(m; v^2) = LN(\ln(S_0) + T\mu; T\sigma^2)$. Es können EUR 10.000 / EUR 106 = 94,33962 Anteile gekauft werden, d.h. das anfängliche Fondskapital nach Ausgabeaufschlag beträgt S_0 = 94,33962 * 100 = EUR 9.433,96. Mit den Hinweisen ergibt sich dann

$$E(S_T) = S_0 \cdot e^{T(\mu + 0{,}5 \cdot \sigma^2)} = 9.433{,}96 \cdot e^{T(0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}04^2)}$$

$$STD(S_T) = E(S_T) \cdot \sqrt{e^{T \cdot \sigma^2} - 1}$$

$$LN_{\alpha=5\%}(S_T) = S_0 \cdot e^{T\mu - \sqrt{T} \cdot 1{,}645 \cdot \sigma)} = 9.433{,}96 \cdot e^{T \cdot 0{,}05 - \sqrt{T} \cdot 1{,}645 \cdot 0{,}04)}$$

$E(S_1)$ = 9.985,59 ; $E(S_9)$ = 14.902,31
$STD(S_1)$ = 397,78 ; $STD(S_9)$ = 1.794,73
$LN_{5\%}(S_1)$ = 9.286,07; $LN_{5\%}(S_9)$ = 12.144,98

b) Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. 100a% = 6% des Kaufpreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} - \ln(1+a) \sim N[T\mu - \ln(1+a), \sqrt{T}\sigma]$$

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von z = 2% per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T}$ = Tz

$$\rightarrow \text{SW} = \text{P}(r_{0,T}^{TK} < Tz) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für $T = 1$ resultiert SW = Φ(0,7067) = 76,1%
Für $T = 9$ resultiert SW = Φ(-1,76) = 3,9%

c) Sei $V_0 = S_0$ / 1+a = S_0 / 1,06 das benötigte Investitionsbudget vor Abzug des Ausgabeaufschlages. Dann gilt

$$LN_{\alpha=5\%}(S_{T=9}) = S_0 \cdot e^{T\mu - \sqrt{T} \cdot 1{,}645 \cdot \sigma)} = \frac{V_0}{1{,}06} \cdot e^{0{,}45 - 1{,}645 \cdot 0{,}12} = 12.000$$

$$\Rightarrow V_0 = 9.880{,}62$$

d) Run-Problematik bei Offenen Immobilienfonds: Vermögenswerte im Immobiliensondervermögen sind zum großen Teil in relativ illiquiden Asset (= Immobilien) angelegt. Anteilsscheine können von den Inhabern täglich zum Inventarwert an das Sondervermögen zurückgegeben werden. Eine derartige Diskrepanz zwischen Liquidität Aktiv-/Passivseite ist u.a. auch typisch für Kreditbanken (Aktivseite: langfristige Kredite ; Passivseite: kurzfristige Sicht-, Termin-, Spareinlagen). Wenn nunmehr (etwa aufgrund von Vertrauenskrisen) eine Vielzahl von Anlegern ihre Zertifikate an das Sondervermögen zurückgeben, die Liquidität des Fonds (Kasse, Bonds) inkl. Kreditrahmen (bis max. 50% des Fondsvermögens dürfen temporär beliehen werden) aufgebraucht ist, müssten Immobilen ggf. unter hohen Preisdruck kurzfristig verkauft werden bzw. es lassen sich kurzfristig keine Käufer finden. Das Investmentgesetz lässt es u.a. in einer derartigen Run-Situation zu, die Rücknahme der Anteile bis zu zwei Jahren auszusetzen (d.h. temporäre Schließung des Fonds). Eine andere Möglichkeit um einen derartigen Run in praxi zu bewältigen ist, dass die Muttergesellschaft die Fondsanteile der verkaufenden Anleger temporär in ihren eigenen Bestand nimmt. In den Jahren 2005/06 kam es zu einer derartigen Situation bei einzelnen Offenen Immobilienfonds in Deutschland.

Anhang: Tabelle der Standardnormalverteilung:

Φ(z)	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998