Bericht zur Prüfung im Oktober 2005 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim)
und *Raimond Maurer* (Frankfurt)

Am 22. Oktober 2005 wurde zum fünften Mal eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. Hierbei waren 25 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der elf Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissensseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erreicht werden

Block I (Albrecht)

1. Aufgabe (20 Minuten)

Ermitteln Sie den Value at Risk über eine Zeitperiode der Länge h für einen synthetisch erzeugten Covered Short Call (Basisobjekt long, Call short) auf Basis der Delta-Normal-Methode.

Hinweise:

1. Der Covered Short Call werde auf der Basis der Black/Scholes-Formel für einen Europäischen Call erzeugt:
   $C_t = N\,[d_1(t)]\,S_t - X\,e^{-r(T-t)} N[d_2(t)]$.
2. $1 - N(-x) = N(x)$.
3. Die Rendite des Basisobjekts sei gegeben durch $R_h \sim N(\mu\, h, \sigma^2 h)$.
4. Gehen Sie davon aus, dass das Call-Delta eines Europäischen Calls gleich $N\,[d_1(t)]$ ist.

Lösung:

i) Für den synthetischen Covered Short Call gilt:

$$CSC_t = S_t - C_t\,.$$

ii) Delta-Approximation für die Veränderung des Preises des Covered Short Call:

$$\begin{aligned}\partial CSC_t/\partial S_t &= \partial S_t/\partial S_t - \partial C_t/\partial S_t = 1 - N[d_1(t)]\\ &= N[-d_1(t)]\,.\end{aligned}$$

iii) Verlustvariable inkl. Delta-Approximation

$$L_h = CSC_t - CSC_{t+h} = N[-d_1(t)]\,(S_t - S_{t+h}).$$

iv) Es gilt:

$$S_t - S_{t+h} = -S_t R_h \sim N(-S_t\,\mu h, S_t^2\,\sigma^2\,h).$$

v) Im Falle der Normalverteilung gilt:

$$VaR_h = E(L_h) + N_{1-\alpha}\,\sigma(L_h).$$

vi) Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} VaR_h &= -N[-d_1(t)]\, S_t \mu h + N[-d_1(t)] N_{1-\alpha} S_t \sigma \sqrt{h} \\ &= N[-d_1(t)]\, S_t \left[N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} - \mu h\right]. \end{aligned}$$

2. Aufgabe (20 Minuten)

Gehen Sie zu der Bewertung eines ausfallbedrohten Zerobonds aus von einem Intensitätsmodell unter der Annahme einer Recovery Rate von null. Der Spot Rate-Prozess unter Q sei gegeben durch $b + R_t$, wobei R_t den Cox/Ingersoll/Ross-Prozess bezeichne, d.h.

$$dR_t = \alpha(\mu - R_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}\, dW_t.$$

Der Prozess für die Ausfallintensität unter Q sei gegeben durch $c+\lambda_t$, wobei λ_t den Vasicek-Prozess bezeichne, d.h.

$$d\lambda_t = a(m - \lambda_t)dt + v\, dW_t.$$

Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen den Wert $B^d(t,T)$ eines ausfallbedrohten Zerobonds im Duffie/Singleton-Kontext.

Hinweise:

1. Setzen Sie die Werte $B_V(t,T)$ bzw. $B_{CIR}(t,T)$ eines ausfallfreien Zerobonds im Kontext des Vasicek- bzw. Cox/Ingersoll/Ross-Modells als bekannt voraus!
2. Nehmen Sie die stochastische Unabhängigkeit von R_t und λ_t unter Q an.

Lösung:

Im Duffie/Singleton-Kontext gilt für $rc = 0$

$$B^d(t,T) = E_Q^t\left[e^{-\int_t^T [c+R_s+b+\lambda_s]ds}\right]$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von R_t und λ_t gilt damit:

$$\begin{aligned} B^d(t,T) &= e^{-(c+b)(T-t)}\, E_Q^t\left[e^{-\int_t^T R(s)ds}\right] E_Q^t\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}\right] \\ &= e^{-(c+b)(T-t)}\, B_V(t,T)\, B_{CIR}(t,T). \end{aligned}$$

3. Aufgabe (20 Minuten)

Wie bestimmt sich der Distance to Default (DD) im Rahmen des KMV-Modells?
Weisen Sie in diesem Kontext die fundamentale Beziehung

$$PD = N(-DD)$$

nach. Dabei bezeichne PD die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt T und N die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Hinweis:

Die stochastische Differentialgleichung $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ besitzt die Lösung

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t + \sigma\sqrt{t}\, Z_t\}, \text{ wobei } Z_t \sim N(0,1).$$

Lösung:

i) Definition von $DPT = DPT(T)$:

$$DPT := \text{Short Term Debt} + \frac{1}{2}\,\text{Long Term Debt}$$

ii) Definition Distance to Default (DD):

$$DD := \frac{E[\ln(A_T)] - \ln(DPT)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Dabei bezeichne $\{A_t\}$ die Wertentwicklung der Aktiva des betrachteten Unternehmens.

iii) Allgemein gilt im Merton-Modell für $t = T$ mit $m := \mu - \sigma^2/2$:

$$A_T = A_0 \exp\left[mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T\right], \text{ mit } Z_T \sim N(0,\,1).$$

iv) Im Merton-Modell folgt somit $E\left[\ln(A_T)\right] = \ln(A_0) + mT$ und damit:

$$DD = \frac{\ln(A_0/DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

v) Hieraus folgt des Weiteren:

$$\begin{aligned} PD &= P(A_T \le DPT) \\ &= P\left[mT + \sigma\sqrt{T}\,Z_T \le \ln\left(DPT/A_0\right)\right] \\ &= P\left[Z_T \le \frac{-\ln(A_0/DPT) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[-\frac{\ln(A_0/DPT) + mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left(-DD\right). \end{aligned}$$

Block II (Bartels)

4. Aufgabe (20 Minuten)

Es gelte: Die stochastischen Prozesse X und Y genügen den stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha\, X_t dt + \sigma\, X_t dW_t, \\ dY_t &= \gamma\, Y_t dt + \delta\, Y_t dW_t, \end{aligned}$$

wobei sowohl X als auch Y von demselben standardisierten Wienerprozess W_t getrieben werden. Man definiere den Prozess Z durch $Z := X/Y$.
Man leite eine stochastische Differentialgleichung für Z her. Falls möglich, eliminiere man dabei X und Y und gebe die Antwort nur in Termen von Z.

Lösung:

Es ist nach Itô :

$$d\left(\frac{1}{Y_t}\right) = -\frac{1}{Y_t^2}dY_t + \frac{1}{2}\,2\,\frac{1}{Y_t^3}\delta^2 Y_t^2 dt = (\delta^{\,2}-\gamma)\frac{1}{Y_t}dt - \delta\frac{1}{Y_t}dW_t$$

und mit der Produktregel folgt:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) &= (dX_t)\frac{1}{Y_t} + X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) - \sigma\,\delta\,X_t\cdot\frac{1}{Y_t}dt \\ &= \alpha\,Z_t dt + \sigma\,Z_t dW_t + (\delta^{\,2}-\gamma)Z_t dt - \delta\;Z_t dW_t - \sigma\,\delta\,Z_t dt. \end{aligned}$$

Fasst man die entsprechenden Terme zusammen, so ergibt sich :

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = dZ_t = (\alpha\,+\delta^{\,2}-\gamma\,-\sigma\,\delta\,)Z_t dt + (\sigma-\delta)Z_t dW_t \quad ,$$

also wieder die Differentialgleichung einer geometrischen Brownschen Bewegung allerdings mit modifizierten Parametern.
Alternativ hätte man dies auch so ableiten können:
Lösungen X_t , Y_t sind explizit angebbar:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0\cdot\exp\left(\left(\alpha-\frac{\sigma^{\,2}}{2}\right)t+\sigma\,W_t\right)\ , \\ Y_t &= Y_0\cdot\exp\left(\left(\gamma-\frac{\delta^{\,2}}{2}\right)t+\delta\,W_t\right) \end{aligned}$$

und man prüft leicht nach mit Hilfe des Additionstheorems der Exponentialfunktion, dass durch Division der beiden Prozesse wieder eine geometrische Brownsche Bewegung entsteht mit neuen konstanten Parametern (siehe oben).

5. Aufgabe (20 Minuten)

Im Vasicek-Modell genügt die Shortrate $r(t)$ einer stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) = b(c-r(t))dt + \sigma\;dW_t \text{ mit } b>0, c>0.$$

(i) Man zeige, dass

$$r(t) = (r(0)-c)exp(-bt) + c + \sigma\;\exp(-b\,t)\int_0^t \exp(bs)dW_s$$

Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist.

(ii) Man erläutere den sogenannten Mean Reversion Effekt, indem man den Erwartungswert von $r(t)$ für $t\to\infty$ betrachtet.

Anleitung:

Man benutze ohne Beweis, dass $M_t := \int_0^t \exp(bs)dW_s$ ein Martingal ist.

Lösung:

Zu (i)
Es gilt nach Itô bzw. der Produktregel für das angegebene $r(t)$:

$$
\begin{aligned}
dr(t) = & -b(r(0)-c)exp(-bt)dt - b\sigma \exp(-bt)\int_0^t \exp(bs)dW_s dt + \sigma \exp(-bt)\exp(bt)dW_t \\
= & -b\left((r(0)-c)\,exp(-bt) + \sigma \exp(-bt)\int_0^t \exp(bs)dW_s\right)dt + \sigma dW_t \\
= & \, b(c-r(t))dt + \sigma dW_t
\end{aligned}
$$

damit ist der angegebene Prozess wirklich Lösung der gegebenen stochastischen Differentialgleichung.

Zu (ii)
Der Erwartungswert von $r(t)$ berechnet sich wegen der Martingal-Eigenschaft von $M_t := \int_0^t \exp(bs)dW_s$ zu $(r(0)-c)exp(-bt)+c$ und strebt damit gegen c für $t \to \infty$. $r(t)$ wird also von dem Wert c „angezogen“, Abweichungen nach oben oder unten werden durch den deterministischen Anteil der stochastischen Differentialgleichung dahin korrigiert, dass $r(t)$ immer zum Mittelwert „zurückgezogen“ wird. Dieser Effekt ist gerade die sogenannte „Mean Reversion“.

6. Aufgabe (20 Minuten)

Für eine europäische Call-Option auf eine Aktie ohne Dividendenzahlung berechnet sich der Preis nach Black-Scholes zu € 2.17, dabei beträgt der aktuelle Aktienpreis € 30, der Ausübungspreis der Option ist € 31, die risikolose Zinsrate ist 4% pro Jahr, die jährliche Volatilität beträgt 25 % und die Laufzeit der Option ist 6 Monate.
Der aktuelle Preis der Call-Option an den Terminbörsen entspreche diesem angegebenen Black-Scholes-Preis.
Der an der Terminbörse beobachtete Preis der entsprechenden Put-Option (mit sonst gleichen Daten wie bei dem Call) beträgt € 2.20.
Man gebe eine einfache Handelsstrategie an, die Arbitrage-Gewinne realisiert. Wie hoch ist der Gewinn bei der angegebenen Strategie?

Hinweise:

Transaktionskosten sind bei dieser Rechnung der Einfachheit halber mit 0 anzusetzen, Leerverkäufe seien zulässig und die Zinsrate, zu der man sich Geld ausleihen kann, betrage auch 4% pro Jahr.

Lösung:

Es bezeichne $S = S(t)$ den Preis einer Aktie. Für die Preise $P(S,t)$ und $C(S,t)$ europäischer Put- bzw. Call-Optionen auf diese Aktie mit jeweils demselben Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T gilt zum Zeitpunkt $t < T$ die sogenannte Put-Call-Relation:

$$P(S,t) + S(t) = e^{-r(T-t)}K + C(S,t)\,.$$

Diese Relation folgt wegen der No-Arbitrage-Bedingung aus der Tatsache, dass zum Ausübungstermin T die beiden folgenden Portfolios:

Portfolio 1: 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T ;

Portfolio 2: 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T + Barbetrag K zum Zeitpunkt T

exakt denselben Wert haben. Dabei entspricht der Faktor $e^{-r(T-t)}$ einem Diskontierungsfaktor, nur dass anders als in klassischer versicherungsmathematischer Schreibweise die kontinuierliche Verzinsung exponentiell geschrieben wird, wie bei zeitstetigen Modellen allgemein üblich.

Nun zur Frage der Aufgabe:
Der sich nach der Put-Call-Parität ergebende „richtige" Wert der Put-Option beträgt:

$$P(S,t) = C(S,t) - S(t) + 31(1.04)^{-0.5} = 2.56,$$

danach ist der an der Terminbörse beobachtete Wert der Put-Option von € 2.20 zu niedrig verglichen mit den Call-Preisen bei den angegebenen übrigen Daten.

Eine explizite Arbitrage-Strategie zur Ausnutzung dieser Preisinkonsistenz bei den Puts und Calls wäre etwa:
Man kauft eine Aktie und eine Put-Option mit den angegebenen Daten, dazu benötigt man € 32.20. Verkauft man gleichzeitig je einen Call und leiht sich den restlichen Geldbetrag in Höhe von € 30.03 , so ergibt sich zum Ausübungszeitpunkt sechs Monate später folgender Ertrag:
Der Ertrag aus Aktie und Put-Option ergibt den Wert $\max(S(T), 31)$, während man den Geldbetrag $30.03(1.04)^{0.5} = 30.62$ zurückzuzahlen hat und gleichzeitig den Call einzulösen hat, falls $S(T)$ den Wert 31 übersteigt. Die Differenz von $31 - 30.62 = 0.38$ behält man in jedem Fall als Arbitrage-Gewinn.

Block III (Maurer)

7. Aufgabe „Devisentermingeschäfte" (5 Minuten)

Der Zinssatz für Jahresgeld im Euroraum beträgt 2,50% p.a. und für britische Pfund 5,00% p.a. Der aktuelle Devisenkurs beträgt 1,4505 Euro/Pfund und der einjährige Devisenterminkurs 1,4405 Euro/Pfund. Bewerten Sie diese Marktsituation und geben Sie ggf. eine Arbitragestrategie an, falls die Möglichkeit besteht 10.000 Pfund in Großbritannien anzulegen (konkrete Berechnungen).

Lösung:

Nach dem Zinsparitätstheorem gilt

$$\frac{F}{S} = 1 + f = \frac{1 + r_{EUR}}{1 + r_{Pfund}} \Rightarrow f = \frac{1,025}{1,05} - 1 \Leftrightarrow f = -2,3810\% > 0,6894\%$$

Die beobachtete Forwardprämie liegt bei $f = -0,6894\%$. Der Forward ist offensichtlich fehlbewertet, daraus ergibt sich folgende Arbitragestrategie: Geldanlage von 10.000 Pfund in Großbritannien zu Zinserträgen i.H.v. 5%. Finanzierung des Anlagebetrags durch Kreditaufnahme i.H.v. 10.000 Pfund · 1,4505 Euro/Pfund = 14505 Euro zu Zinskosten von

2,5% p.a. Dies führt zu sicheren Nettokosten in einem Jahr für die Ablösung des Kredits i.H.v. 14.505 · 1,025 = 14.867,63 Euro. Der Verkauf des zukünftigen Rückzahlungsbetrags der Fremdwährungsanlage 10.000 · 1,05 = 10.500 Pfund mittels Forwards führt zu einem sicheren Cash-Flow i.H.v. zu einem Preis 1,4405 = 15.125,25 Euro. Es wurde damit ein Arbitragegewinn von 257,63 EUR erzielt.

8. Aufgabe „Wechselkurssicherung mit Devisenforwards" (15 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 (Ausland). Die Erwartungswerte für die Rendite der Wertpapiere sind $E(R_1) = 0,25$; $E(R_2) = 0,10$ bzw. für die Wechselkursrendite $E(e_2) = 0,05$. Die Kovarianzen sind:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	0,0003
R_2		0,0225	-0,0014
e_2			0,0064

Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle (R_ie_2)-Kreuzproduktterme.

a) Berechnen Sie Struktur und Volatilität des Minimum-Varianz-Portfolios (MVP), wenn der Investor keine Wechselkurssicherung durchführt.

b) Der Investor beschließt, den ursprünglichen Investitionsbetrag für Wertpapier 2 in voller Höhe durch Devisenforwards abzusichern. Welche Struktur und Volatilität hat das MVP?

c) Der Investor entschließt sich nun, die Währungsposition im Rahmen eines Currency-Overlay zu optimieren. Dabei hat die Asset-Allocation-Abteilung ohne Berücksichtigung einer Wechselkurssicherung ein MVP berechnet, das sich zu 20% aus Wertpapier 1 und zu 80% aus Wertpapier 2 zusammensetzt. Berechnen Sie für diese Gewichte den optimalen Umfang der Währungssicherung welche die Portfoliovarianz minimiert. Welche Volatilität hat dieses Portfolio?

Lösung:

Zu a)

Keine Wechselkurssicherung ($h = 0$)

Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors:

$$R_{PF,inl.}^{h=0} = xR_1 + (1-x)[R_2 + e_2 + R_2e_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$\begin{aligned} Var(R_{PF,inl.}^{h=o}) &= x^2Var(R_1) + (1-x)^2[Var(R_2) + Var(e_2) + 2Cov(R_2, e_2)] \\ &\quad + 2x(1-x)[Cov(R_1, R_2) + Cov(R_1, e_2)] \\ &= 0,09x^2 + (1-x)^2[0,0261] + 2x(1-x)[0,0048] \\ &= 0,1065x^2 - 0,0426x + 0,0261 \end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R^{h=0}_{PF,inl.})}{dx} = 0,213x - 0,0426 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^{h=0}_{MVP} = 0,2$$

Ergebnisse:

- $x^{h=0}_{MVP} = 0,2$
- $Var(R^{h=o,MVP}_{PF,inl.}) \approx 0,0218 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{Var(R^{h=o,MVP}_{PF,inl.})} \approx 0,1478$

Zu b)
„Vollständige“ Wechselkurssicherung mit Devisenforwards ($h = 1$)
Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors:

$$R^{h=1}_{PF,inl.} = xR_1 + (1-x)[R_2 + f_2 + R_2e_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$\begin{aligned} Var(R^{h=1}_{PF,inl.}) &= x^2Var(R_1) + (1-x)^2Var(R_2) + 2x(1-x)Cov(R_1,R_2) \\ &= 0,09x^2 + 0{,}0225(1-x)^2 + 2x(1-x)(0{,}0045) \\ &= 0,1035x^2 - 0,036x + 0,0225 \end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R^{h=1}_{PF,inl.})}{dx} = 0,207x - 0,036 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^{h=1}_{MVP} = 0,173913...$$

Ergebnisse:

- $x^{h=1}_{MVP} \approx 0,1739...$
- $Var(R^{h=1,MVP}_{PF,inl.}) \approx 0,0194 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{Var(R^{h=o,MVP}_{PF,inl.})} \approx 0,1392$

Zu c)
Currency-Overlay-Management mit Devisenforwards (h=opt.)
Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors:

$$R^{h=opti}_{PF,inl.} = \bar{x}R_1 + (1-\bar{x})[R_2 + e_2 + R_2e_2 + h(f_2 - e_2)]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also mit $x = 0,2$:

$$\begin{aligned} Var(R^{h=opti}_{PF,inl.}) &= \bar{x}^2Var(R_1) + (1-\bar{x})^2[Var(R_2) + Var(e_2) + h^2Var(e_2) \\ &\quad + 2Cov(R_2,e_2) - 2hCov(R_2,e_2) - 2hVar(e_2)] \\ &\quad + 2\bar{x}(1-\bar{x})[Cov(R_1,R_2) + Cov(R_1,e_2) - hCov(R_1,e_2)] \\ &= (0,2)^2 \cdot 0,09 + (0,8)^2[0,0225 + 0,0064 + 0,0064h^2 \\ &\quad + 2 \cdot (-0,0014) - 2h(-0,0014) - 2h(0,0064)] \\ &\quad + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot [0,0045 + 0,0003 - h \cdot 0,0003] \\ &= 0,004096h^2 - 0,006496h + 0,02184 \end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar(R_{PF,inl.}^{h=opti})}{dh} = 0,008192h - 0,006496 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad h_{MVP}^{h=opti} = 0,79296875....$$

Ergebnisse:
- $h_{MVP}^{h=opti} \approx 0.7930$
- $Var(R_{PF,inl.}^{h=opti,MVP}) \approx 0,0193 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{Var(R_{PF,inl.}^{h=opti,MVP})} \approx 0,1384$

9. Aufgabe „Fisher/Weil Duration und Konvexität“ (5 Minuten)

Bestimmen Sie die Fisher/Weil-Duration und Fisher/Weil-Konvexität eines Zero-Bond mit Restlaufzeit $t_n = T$.

Lösung:

$$\begin{aligned} D_{FW} &= \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} t_i Z(t_i) e^{-u_i t_i} \\ &= \frac{Te^{-u(T)T}}{e^{-u(T)T}} = T \end{aligned}$$

(Identisch mit Macaulay-Duration)

$$\begin{aligned} C_{FW} &= \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 Z(t_i) e^{-u_i t_i} \\ &= \frac{T^2 e^{-u(T)T}}{e^{-u(T)T}} = T^2 \end{aligned}$$

10. Aufgabe „Key-Rate-Duration und Asset-Liability-Management“ (20 Minuten)

Nehmen Sie an, Sie seien Finanzvorstand eines Pensionsfonds. Sie erwarten jeweils am Ende der nächsten drei Jahre ($i = 1, 2, 3$) Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 40$ Mio., $L_2 = 50$ Mio. und $L_3 = 60$ Mio. Am Markt seien folgende ausfallfreie Standardbonds mit Nennwert von jeweils 100 verfügbar.

	Kurs	Restlaufzeit	Kuponrate	Yield-to-Maturity
Bond 1	107,84	1	10,00%	2,00%
Bond 2	104,84	2	5,00%	2,49%
Bond 3	100,06	3	3,00%	2,98%

a) Bestimmen Sie die Spot Rates $\{R_1, R_2, R_3\}$ für Nullkuponanleihen mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre.

b) Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios aus obigen Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen perfekt gedeckt sind! Was ist der heutige Wert dieses Portfolios P? Vernachlässigen Sie dabei die Ganzzahligkeitsbedingung!

c) Mit welcher Wertänderung des Portfolios ΔP müssen Sie rechnen, wenn die Zinsen um $\{\Delta R_1 = 100\text{bp}, \Delta R_2 = 50\text{bp}, \Delta R_3 = 0\text{bp}\}$ (bp: Basispunkte = 0.01%) steigen? Verwenden Sie dazu das Konzept der (absoluten) Key-Rate-Durationen (KRD)!

d) Sie möchten nun einige Risikokennzahlen berechnen. Wie groß ist die Standardabweichung der Wertveränderung des Portfolios ΔP? Nehmen Sie dazu an, die Zinsänderungen $\{\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3\}$ hätten die Standardabweichungen $\{\sigma_1 = 1\%, \sigma_2 = 0,7\%, \sigma_3 = 0,5\%\}$ und seien perfekt korreliert.

Hinweis:

Verwenden Sie zur Berechnung der Wertveränderung das Konzept der Key-Rate-Durationen mit KRD_1 = 38,45 Mio., KRD_2 = 92,86 Mio., KRD_3 = 159,93 Mio.

e) Nehmen Sie an, die Wertänderung des Portfolios ΔP sei normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung EUR 1,83 Mio. Wie groß ist der Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% nicht überschritten wird?

Lösung:

Zu a)

$R(1)$:

$$R(1) = YTM(1) = 0,02$$

$R(2)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= 104,84 = 5/1,02 + 105/(1+R(2))^2 \\ \Rightarrow \quad 99,938 &= 105/(1+R(2))^2 \\ \Leftrightarrow \quad R(2) &= \sqrt{105/99,938} - 1 = 0,025 \end{aligned}$$

$R(3)$:

$$\begin{aligned} P(3) &= 100,06 = 3/1.02 + 3/1,025^2 + 103/(1+R(3))^3 \\ \Rightarrow \quad R(3) &= 0,03 \end{aligned}$$

Zu b)

$$\begin{array}{lclcl} 103N_3 & = & 60 \text{ Mio} \Rightarrow N_3 & = & 582.524,27 \\ 105N_2 + 3N_3 & = & 50 \text{ Mio} \Rightarrow N_2 & = & 459.546,93 \\ 110N_1 + 5N_2 + 3N_3 & = & 40 \text{ Mio} \Rightarrow N_1 & = & 326.860,84 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P &= 107,84N_1 + 104,84N_2 + 100,06N_3 \\ &= 40 \text{ Mio } (1+R_1)^{-1} + 50 \text{ Mio } (1+R_2)^{-2} + 60 \text{ Mio } (1+R_3)^{-3} \\ &= 141,7149 \text{ Mio} \end{aligned}$$

Zu c)

$$\begin{aligned} \Delta P &= -\sum_{i=1}^{3} KRD_i \Delta R_i \\ P &= 40(1+R_1)^{-1} + 50(1+R_2)^{-2} + 60(1+R_3)^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclclcl} KRD_1 & = & -P'(R_1) & = & 40(1+R_1)^{-2} & = & 38,4468 \\ KRD_2 & = & -P'(R_2) & = & 100/(1+R_2)^{-3} & = & 92,8599 \\ KRD_3 & = & -P'(R_3) & = & 180/(1+R_3)^{-4} & = & 159,9277 \end{array}$$

$$\Delta P = -(38,4468 \cdot 0,01 + 92,8599 \cdot 0,005) = -0,8488 \text{ Mio}$$

Zu d)

$$\begin{aligned}
\Delta P &= -\sum_{i=1}^{3} KRD_i \Delta R_i \\
\Delta P &= -(38,45 \cdot \Delta R_1 + 92,86 \cdot \Delta R_2 + 159,93 \cdot \Delta R_3) \\
Var(\Delta P) &= 38,45^2 0,01^2 + 92,86^2 \cdot 0,007^2 + 159,93^2 \cdot 0,005^2 \\
&\quad + 2 \cdot 38,45 \cdot 92,86 \cdot 0,01 \cdot 0,007 + 2 \cdot 38,45 \cdot 159,93 \cdot 0,01 \cdot 0,005 \\
&\quad + 2 \cdot 92,86 \cdot 159,93 \cdot 0,007 \cdot 0,005 = 3,364 \\
&=> \text{Standardabweichung} = 1,834 \text{ Mio.}
\end{aligned}$$

Zu e)

$$VaR(5\%) = 1.65 \cdot 1.83 \text{ Mio} = 3,0195 \text{ Mio}$$

11. Aufgabe „Immobilien“ (15 Minuten)

Erläutern Sie kurz folgende Fragestellungen:

a) Was versteht man unter dem Liegenschaftszins und welche Rolle spielt er bei der Bewertung von Immobilien?

b) Grenzen Sie einen REIT von einem geschlossenen Immobilienfonds ab.

c) Welche Transaktionskosten sind mit Immobilieninvestments verbunden?

d) Wie ist ein hedonischer Immobilienindex konstruiert?

e) Aus historischen Wertentwicklungen wurde die (empirische) Renditevolatilität eines Immobilienindex mit 4% p.a. geschätzt. Der Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung weist einen Wert von 0.8 auf. Welche bereinigte Volatilität ergibt sich bei Anwendung des Blundell/Ward-Verfahrens?

Lösung:

Zu a)

Der *Liegenschaftszins* LZ ist das Verhältnis des anfänglich erzielbaren Jahresreinertrags eines Mietobjekts zum realisierten Kaufpreis, d.h. die anfänglich akzeptierte Mietrendite.

$$\text{LZ} = \frac{\text{Mieteinnahmen p.a.}}{\text{Kaufpreis}}$$

Es ist auch der Kehrwert dieses Quotienten gebräuchlich, der als Vervielfältiger bezeichnet wird. Durch die Multiplikation des relevanten Vervielfältigers mit den nachhaltig erzielbaren Mieteinnahmen kann damit ein Ausgangspunkt für den aktuellen Marktwert des zu bewertenden Objekts gefunden werden. Liegenschaftszinssätze werden aus zeitnahen Kaufpreissammlungen ermittelt. Von ihrer Konzeption sind Liegenschaftszinssätze Momentaufnahmen des aktuellen (normierten) Preisgefüges in bestimmten Teilsegmenten des Immobilienmarktes, berechnet auf der Basis innerhalb eines bestimmten Zeitraums abgeschlossener Transaktionen.

Zu b)

Geschlossener Immobilienfonds: Typischerweise werden bei geschlossenen Immobilienfonds die einzelnen Immobilienobjekte, in die das Fondsvermögen investiert werden soll, bereits bei Auflage von den Initiatoren des Fonds festgelegt. Finanzierung durch Eigen- und Fremdkapital. Ist das notwendige Eigenkapital beschafft, werden keine neuen Anteile mehr angeboten, d.h. der Fonds wird geschlossen. Hinsichtlich der Rechtsform sind geschlossene Fonds meist als Personengesellschaft organisiert, ohne dass spezielle gesetzliche Regelungen, etwa hinsichtlich der Art und Zusammensetzung des Fondsvermögens, existieren. Für Anteile an geschlossenen Immobilienfonds existiert i.d.R. weder ein geregelter Sekundärmarkt noch besteht eine gesetzliche oder vertragliche Rücknahmeverpflichtung der ausgegebenen Anteile seitens der Fondsgesellschaft. Insofern verbleibt nur die Veräußerung der Anteile über einen wenig organisierten Sekundärmarkt, was deren Liquidität einschränkt.
REIT: Bei den so genannten Real Estate Investment Trusts handelt es um i.d.R. börsennotierte Immobilien-Aktiengesellschaften, deren Hauptgeschäftstätigkeit im Immobiliensektor liegt. In bestimmten Ländern (etwa den USA) existieren steuerliche Besonderheiten, anhand derer Immobilienaktien, deren Geschäftserfolg maßgeblich aus Miet- und Pachteinnahmen sowie Wertsteigerungen von im eigenen Bestand gehaltenen Immobilien abhängt, abgegrenzt werden können. So qualifizieren sich US-amerikanische Aktiengesellschaften als Real-Estate-Investment-Trusts (REITs) mit „tax exempt status“, wenn zumindest 75% des Vermögens in Immobilien- oder Hypothekendarlehn investiert sind, wenigstens 75% der Einkünfte aus Miet-, Pacht- und Darlehnzinsen oder Veräußerungsgewinnen aus Immobilien stammen und mindestens 95% des erzielten Jahresergebnisses an die Aktionäre ausgeschüttet werden.

Zu c)

Direkte Transaktionskosten in Form von Maklergebühren, Grunderwerbssteuern, Register-, und Notariatsgebühren. Indirekte Transaktionskosten in Form von Market Impact.

Zu d)

Diese Kategorie von Immobilienindizes basiert auf der Auswertung von am Markt realisierten Transaktionspreisen für Immobilien innerhalb eines bestimmten Zeitraums. Als Datenbasis wird eine Stichprobe der Preise aus verkauften Immobilienobjekten herangezogen. Bei der Konstruktion eines transaktionsbasierten Immobilienindex muss den Qualitätsunterschieden der im Zeitablauf erfassten Liegenschaften Rechnung getragen werden. *Hedonische Indizes* versuchen die Heterogenitätsproblematik dadurch zu lösen, dass mittels eines ökonometrischen Modells die wesentlichen wertbeeinflussenden Faktoren von Immobilieninvestments erfasst und von zeitlichen Einflussfaktoren separiert werden. Statistisch liegt dem Ansatz ein multiples Regressionsmodell zugrunde, wobei die wertbestimmenden Eigenschaften die unabhängigen Variablen und die beobachteten Transaktionspreise die abhängige Variable bilden. Die ermittelten Regressionskoeffizienten repräsentieren die marginale Zahlungsbereitschaft am Markt für die betreffende Eigenschaft.

Zu e)

Korrektur der STD der Rendite R gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\sigma(R^*) = \mathrm{STD}(R)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,8^2}{(1-0,8)^2}} = 4\% \cdot 3 = 12\%$$

Anhang: Tabelle der Standardnormalverteilung

$\Phi(z)$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998