Bericht zur Prüfung im Oktober 2004 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht, *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim) und
Raimond Maurer (Frankfurt)

Am 23. Oktober 2004 wurde zum vierten Mal eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. Hierbei waren 13 Teilnehmer zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der acht Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissensseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erreicht werden

Block I (Albrecht)

1. Aufgabe (20 Minuten)

Fassen Sie die Diskontierungsfaktoren (Werte der Einheits-Zerobonds) $B(t,T)$ bei gegebener Zinsstrukturkurve als normalverteilte Zufallsvariable auf und bestimmen Sie auf dieser Grundlage den (isolierten) Value-at-Risk eines Bonds mit den Zahlungen $\{Z_1, ..., Z_n\}$ über das Zeitintervall [0,h], wobei $h < 1$.
Hinweis: Gehen Sie von $B(h,t) - b(0,t) \sim N(\mu_t h,\ \sigma_t^2 h)$ und $Cov[B(h,t),\ B(h,u)] = h\sigma_{tu}$ für $t \neq u$ aus.

Lösung:

Zunächst gilt für die Barwerte zu den Zeitpunkten 0 bzw. h:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} Z_t b\,(0,t),\ \text{bzw. } P_h = \sum_{t=1}^{n} Z_t B\,(h,t)$$

und damit für die Verlustvariable

$$L_h = P_0 - P_h = \sum_{t=1}^{n} Z_t[b\,(0,t) - B\,(h,t)].$$

L_h ist normalverteilt mit den Parametern $E(L_h)$ und $\sigma(L_h)$.
Es folgt nun:

$$\begin{aligned}
E(L_h) &= \sum Z_t E\,[b(0,t) - B(h,t)] = -h \sum Z_t \mu_t \\
Var(L_h) &= Var\left[\sum Z_t\,[b\,(0,t) - B\,(h,t)]\right] \\
&= Var\left[\sum Z_t B(h,t)\right] \\
&= \sum Z_t^2 Var\,[B(h,t)] + \sum_{u \neq v} Z_u\, Z_v\, Cov\,[B(h,u), B(h,v)] \\
&= h \sum Z_t^2 \sigma_t^2 + h \sum_{u \neq v} Z_u Z_v \sigma_{uv}\ .
\end{aligned}$$

Für normalverteilte Verlustvariable gilt ferner (geg. α, h):
$VaR = E(L_h)+N_{1-\alpha}\,\sigma\,(L_h)$, wobei $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$–Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne.
Damit gilt insgesamt:

$$VaR = N_{1-\alpha}\,\sqrt{h}\left[\sum Z_t^2\,\sigma_t^2 + \sum_{u\neq v} Z_u\,Z_v\,\sigma_{uv}\right]^{1/2} - h\sum Z_t\,\mu_t \quad .$$

2. Aufgabe (40 Minuten)

Unterstellen Sie das Kreditrisikomodell nach Merton sowie Black/Scholes-Optionspreise.

a) Bestimmen Sie den Wert des Fremdkapitals zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$.

b) Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeiten p bzw. q des Unternehmens in $t = 0$ (bei gegebenem Ausfallzeithorizont T) unter dem "physischen" Wahrscheinlichkeitsmaß P bzw. unter dem "risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

c) Weisen Sie den folgenden Zusammenhang nach, wobei r die risikolose Zinsrate bezeichne:

$$q = N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right] \quad .$$

d) Bestimmen Sie den *Credit Spread* $cs = cs(T)$ in $t = 0$ allgemein als Differenz zwischen den (konstanten) Zinsraten des ausfallbedrohten und des ausfallfreien Zerobonds mit jeweiligem Nennwert $F = 1$. Welches Resultat ergibt sich im Merton-Black/Scholes-Fall?

Hinweise:

1) Die Black/Scholes-Formel für eine Europäische Put-Option lautet (in kondensierter Darstellung):

$$P_t = F\exp\left(-r(T-t)\right)N(-d_2) - S_t\,N(-d_1)$$

2) Es gilt: $N(-x) = 1 - N(x)$

3) Allgemein gilt (für jedes feste t) für den Prozess $\{A_t\}$, der die stochastische Dynamik der Aktiva des Unternehmens kennzeichnet:
$A_t = A_0\exp[mt + \sigma\sqrt{t}W]$, mit $W \sim N(0,\,1)$, wobei $m := \mu - \sigma^2/2$.

Lösung:

Zu a)

Allgemein gilt im Merton-Modell für den Wert des ausfallbedrohten Fremdkapitals:

$$L_t = F\exp(-r(T-t)) - P_t \quad .$$

Gemäß den Hinweisen 1) und 2) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} L_t &= A_t\,N(-d_1) + F\exp(-r(T-t))[1 - N(-d_2)] \\ &= A_t[1 - N(d_1)] + F\exp(-r(T-t))N(-d_2)\ . \end{aligned}$$

Zu b)
Zu bestimmen ist $p := P(A_T < F)$ bzw. $q := Q(A_T < F)$.
Gemäß Hinweis 3) folgt:

$$\begin{aligned} p &= P(A_T < F) \\ &= P\left[mT + \sigma\sqrt{T} Z_T < \ln(F/A_0)\right] \\ &= P\left[Z_T < \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right] \ . \end{aligned}$$

Im Falle des risikoneutralen Maßes liegt die gleiche stochastische Dynamik zugrunde, wobei nur der Parameter m durch den Parameter $m^* = r - \sigma^2/2$ zu ersetzen ist. Mithin gilt:

$$q = N\left[\frac{\ln(F/A_0) - m^*T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \ .$$

Zu c)
Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} &1. \quad N^{-1}(p) = \frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} \ . \\ &2. \quad m^* = m + (r - \mu) \ . \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} q &= N\left[\frac{\ln(F/A_0) - mT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\mu - r)\,T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &= N\left[N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right] \ . \end{aligned}$$

Zu d)
Für den ausfallfreien Zerobond gilt $(F = 1)$ in $t = 0$:

$$B(0,T) = \exp(-r\,T)$$

Ansatz für den ausfallbedrohten Bond:

$$\begin{aligned} B^d(0,T) &= \exp(-r^*\,T) \\ &= \exp\left[-(r + cs)\,T\right] \\ &= B(0,T)\exp\left[-cs\,T\right] \end{aligned}$$

Folgerung:

$$cs = -\frac{1}{T}\ \ln\left[B^d(0,T)/B(0,T)\right]$$

Black/Scholes-Fall:

$$B^d(0,T) = A_0\left[1 - N(d_1)\right] + F\ \exp(-r\,T)N(d_2).$$

Folgerung:

$$cs = -\frac{1}{T} \ln \left[N(d_2) + \frac{A_0}{F} [1 - N(d_1)] e^{rT} \right]$$

Determinanten des Credit Spreads sind somit der Zeithorizont T, der sichere (ausfallfreie) Zins, die Volatilität der Aktiva des Unternehmens (implizit in d_1 bzw. d_2), sowie die (anfängliche) Leverage Ratio A_0/F.

Block II (Bartels)

3. Aufgabe (20 Minuten)

Man berechne mit Hilfe der Itô-Formel das stochastische Differenzial $dX(t)$, dabei bezeichnet $X(t) := \exp((1/2)\,t)\,\cos(w(t))$, und $w(t)$ steht für den standardisierten Wienerprozess.

Lösung:

Es ist nach Itô :

$$\begin{aligned} dX(t) &= 1/2 \exp((1/2)t) \cos(w(t))dt - \exp((1/2)t) \sin(w(t))dw(t) \\ &\qquad\qquad\qquad -1/2 \exp((1/2)t) \cos(w(t))dt \\ &= -\exp((1/2)t) \sin((w(t))dw(t)\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$X(t) - X(0) = -\int_0^t e^{\frac{1}{2}t} \sin(w(t))dw(t)\,,$$

und damit ist $X(t)$ selbst wieder Martingal.

4. Aufgabe (40 Minuten)

Um die Durchschnittsverzinsung des Kapitalanlagebestandes auf einem hohen Niveau zu halten, kauft der Vermögensanleger eines Versicherungsunternehmens VU zu Jahresbeginn 10.000 Aktien eines Unternehmens U zum aktuellen Börsenpreis von 400 € .
Die Bank handelt mit Optionen und bietet unter anderem auch europäische Put- und Call-Optionen auf Aktien des Unternehmens U zum Ausübungspreis 380 € und Ausübungszeitpunkt 31.12. an zu folgenden Preisen:
Preis der Call-Option: 41.80 €
Preis der Put-Option: 8.20 € .
Der Basispreis ist jeweils 380 € , und der Ausübungstermin ist bei beiden Optionen der 31.12. Für einjährige Kapitalanlagen beträgt der aktuelle Einjahreszins 4.1%.
Durch Kauf von 10.000 Put-Optionen zum Ausübungstag 31.12. und Ausübungspreis 380 sichert der Vermögensanleger von VU die obige Kapitalanlage so ab, dass zum 31.12. der Wert von 3.800.000 € für das Versicherungsunternehmen VU nicht unterschritten werden kann.

(i) Mit welcher alternativen Anlagestrategie hätte der Vermögensanleger dieselben Gewinnchancen zum 31.12. realisieren können, aber bei geringeren Kosten?

(ii) Beschreiben Sie explizit Arbitrage-Strategien, die sich aufgrund der hier vorliegenden Put-Call-Preisrelation ergeben.

(iii) Man gehe von korrekten Aktien- und Optionspreisen aus und nehme an, dass die angegebene Zinsrate nicht stimmt. Für welche Jahreszinsrate ergeben sich dann keine Arbitragemöglichkeiten in der oben beschriebenen Situation?

Hinweis: Der Einfachheit wegen sind keine Transaktionskosten zu berücksichtigen!

Lösung:

Zu (i)

Es bezeichne $S = S(t)$ den Preis einer Aktie. Für die Preise $P(S,t)$ und $C(S,t)$ europäische Put- bzw. Call-Optionen auf diese Aktie mit jeweils demselben Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T gilt zum Zeitpunkt $t < T$ die sogenannte Put-Call-Relation:

$$P(S,t) + S(t) = e^{-r(T-t)}K + C(S,t)\,.$$

Diese Relation folgt wegen der No-Arbitrage -Bedingung aus der Tatsache, dass zum Ausübungstermin T die beiden folgenden Portfolios:

Portfolio 1 : 1 Aktie + 1 Put-Option auf diese Aktie mit Ausübungspreis K zum Ausübungszeitpunkt T ;

Portfolio 2 : 1 Call-Option auf die betreffende Aktie mit Ausübungspreis K und Ausübungszeitpunkt T + Barbetrag K zum Zeitpunkt T

exakt denselben Wert haben. Dabei entspricht der Faktor $e^{-r(T-t)}$ einem Diskontierungsfaktor, nur dass anders als in klassischer versicherungsmathematischer Schreibweise die kontinuierliche Verzinsung exponentiell geschrieben wird, wie bei zeitstetigen Modellen allgemein üblich. Portfolio 1 entspricht der Anlagestrategie des Vermögensanlegers und bedeutet bezogen auf den Jahresbeginn Gesamtkosten in Höhe von 4 000 000 + 82 000 = 4 082 000 € . Alternativ kann der Anleger aber auch den abdiskontierten Betrag 3 800 000 / 1.041 = 3 650 336.22 € zum Jahreszins von 4,1 % anlegen und 10 000 Calls kaufen zum Preis von 418 000 € , das bedeutet ein niedrigeres Gesamtinvestment von 4 068 336.22 € bei exakt den gleichen Ertragschancen zum 31.12. Die Differenz von 13663.78 € dürfte für einige "Free Lunch" reichen.

Zu (ii)

Eine explizite Arbitrage-Strategie zur Ausnutzung der Preisinkonsistenz bei den Puts und Calls wäre etwa:
Man verkauft je eine Aktie und eine Put-Option zur Zeit $t = 0$, Ergebnis: 408.20 € und kauft gleichzeitig je einen Call und legt den Geldbetrag 380 / 1.041 = 365.03 zu 4,1% für ein Jahr an, Aufwand insgesamt 406.83 € . Das reicht , um die aus dem Verkauf der Aktie und der Put-Option eingegangenen Verpflichtungen zum Jahresende exakt einzulösen, es liegt also eine kongruente Deckung vor. Die Differenz von 408.20 - 406.83 = 1.37 ist dann der realisierte Arbitragegewinn pro Position zum Jahresbeginn.

Zu (iii)

Gesucht wird derjenige Zins i, für den gilt: $P(S,0) + S(0) = K/(1+i) + C(S,0)$, d.h. hier mit konkreten Zahlenwerten: 8.20 + 400 = 380 / (1+i) + 41.80 . Hieraus ergibt sich für i der Wert 3.71 % .

Block III (Maurer)

5. Aufgabe (30 Minuten)

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.

R_i:= lokale Rendite von Wertpapier i ($i = 1, 2$),
e_2 : = Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen:

$$\begin{array}{lll} \mu(R_1) = 0,2725; & \mu(R_2) = 0,1075; & \mu(e_2) = 0,04 \\ \sigma(R_1) = 0,3; & \sigma(R_2) = 0,1; & \sigma(e_2) = 0,08 \end{array}$$

Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$$r_1 = 0,10 \text{ bzw. } r_2 = 0,05.$$

Die Rendite-Kovarianzmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	-0,0045
R_2		0,01	-0,0032
e_2			0,0064

Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_2e_2) Kreuzprodukte.
Führen Sie alle Berechnungen mit 4 Nachkommastellen durch.
Beachten Sie die Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang.

a) Ein Investor fordert eine Portfoliorendite (ohne Währungssicherung), die mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% über einer Mindestrendite von 2% liegt. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite besitzt das Portfolio, welches die obige Bedingung erfüllt und die erwartete Rendite maximiert? Unterstellen Sie zur Lösung des Problems normalverteilte Renditen.

   Hinweis: Der effiziente Rand der aus Wertpapier 1 und 2 konstruierbaren Portfolios hat die Form $\mu = 0,16 + \sqrt{0,15625\,(\sigma^2 - 0,009)}$.

b) Gehen Sie davon aus, der Investor wünscht nun ein varianzminimales Portfolio. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite ergeben sich?

c) Unterstellen Sie nunmehr, der Investor korrigiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen gemäß dem James-Stein-Verfahren mit einem ,,Schrumpfungsfaktor" ω (hin zum MVP). Berechnen Sie zunächst die korrigierten erwarteten Renditen. Unterscheiden Sie drei Fälle:

   i) $\omega = 0,2$

ii) $\omega = 1$

iii) $\omega = 0$

Der Investor versucht wiederum die erwartete Portfoliorendite zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% eine Mindestrendite von 2% erzielt wird. Welche Struktur (relative Investitionsgewichte), welche Standardabweichung und welche erwartete Rendite ergeben sich nun? Vergleichen Sie Ihre Resultate mit denen aus Teilaufgabe a). Skizzieren Sie Ihre Ergebnisse in Aufgabenteil a) und c) in einer Grafik.

Hinweis: Der effiziente Rand im Fall $\omega = 0,2$ hat die Form $\mu = 0,16 + \sqrt{0,1\,(\sigma^2 - 0,009)}$.

d) Der Investor möchte nun das Währungsrisiko des ursprünglichen Investitionsbetrags vollständig mit Devisenforwards sichern. Berechnen Sie die faire Forwardprämie über das Zinsparitätstheorem und die erwartete Rendite des Wertpapiers 2 aus Sicht des inländischen Investors bei einem vollständigen Forward-Hedge.

e) Ermitteln Sie analytisch die Menge aller (μ, σ)-Kombinationen der durch Mischung der beiden Anlagen erzielbaren Portfolios für den Fall mit vollständiger Währungssicherung (des ursprünglichen Investitionsbetrags) unter Einsatz von Devisenforwards (Forwardprämie 0,0476). Berechnen Sie ferner die Struktur des optimalen Portfolio, welches die (μ, σ)-Nutzenfunktion $\Phi = \mu - 2\sigma^2$ maximiert.

Lösung:

Es ergibt sich für die ungesicherten Wertpapiere in inländischer Währung:

$$\begin{array}{ll} \mu(R_1) = 0,2725; & \mu\,(R_2 + e_2) = 0,1475; \\ \sigma(R_1) = 0,3; & \sigma\,(R_2 + e_2) = 0,1\,; \end{array}$$

Weiterhin gilt: $\mathrm{Cov}(R_1, R_2 + e_2) = \mathrm{Cov}(R_1, e_2) + \mathrm{Cov}(R_1, R_2) = 0\,.$

Zu a)

1) Effizienter Rand

$$\mu = 0,16 + \sqrt{0,15625(\sigma^2 - 0,009)}$$

2) Sei $N_{0,9}$ das 90% Quantil der Standardnormalverteilung; dann resultiert für die Shortfallrestriktion $\mu = 0{,}02 + N_{0,9}\sigma$. Gemäß beigefügter Tabelle der N(0,1)-Verteilung gilt $1{,}28 < N_{0,9} < 1{,}29$. Im Folgenden wird (approximativ von der sicheren Seite) $N_{0,9} = 1{,}29$ gesetzt.

$$\rightarrow \mu = 0,02 + 1,29\sigma$$

Setze 1) = 2)

$$0,02 + 1,29\sigma = 0,16 + \sqrt{0,15625\,(\sigma^2 - 0,009)}$$

Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \sigma_{opt} = 0,1401 \\ \rightarrow & \mu = 0,2007 = 0,2725x + 0,1475(1 - x); \\ \rightarrow & x_1 = 0,4261; \quad x_2 = 0,5739 \end{array}$$

Zu b)
Mit Hilfe des effizienten Rands aus Aufgabe a) folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}&\sigma^2(MVP) = 0,009, \quad \sigma(MVP) = 0,0949;\\ &\mu(MVP) = 0,16 = 0,2725x + 0,1475(1-x);\\ &\rightarrow x_1 = 0,1; x_2 = 0,9\end{aligned}$$

Zu c)

i) $\mathrm{E}(R_{1,JS}) = 0,2725(1-\omega) + 0,16\omega = 0,25$

$\mathrm{E}(R_{1,JS} + e_{2,JS}) = 0,1475(1-\omega) + 0,16\omega = 0,15$

1) Effizienter Rand $\mu = 0,16 + \sqrt{0,1\,(\sigma^2 - 0,009)}$

2) Shortfallrestriktion $\mu = 0,02 + 1,29\sigma$

1) = 2)

$$0,02 + 1,29\sigma = 0,16 + \sqrt{0,1\,(\sigma^2 - 0,009)}$$

Maximaler Erwartungswert unter Einhaltung der Shortfallrestriktion.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad \sigma_{opt} = 0,1305\\ &\rightarrow \quad \mu = 0,1883 = \quad 0,25x + 0,15(1-x)\\ &\rightarrow \quad x_1 = 0,3833; \quad x_2 = 0,6167\end{aligned}$$

ii) Der effiziente Rand schrumpft auf den Punkt des MVP zusammen. Das MVP erfüllt offensichtlich die Shortfall-Restriktion, d.h. $\mathrm{Prob}(R_{MVP} < 0,02) = \Phi(-1,476) = 6,94\% < 10\%$. In diesem Fall fällt das Ergebnis mit dem MVP aus Teilaufgabe b) zusammen.

iii) Keine Adjustierung der Erwartungswerte, d.h. der effiziente Rand ist identisch zu Teilaufgabe a). Ergebnisse siehe a).

Zu d)
Nach dem Zinsparitätstheorem gilt $1 + f_2 = \dfrac{1+r_1}{1+r_2} \Rightarrow f_2 = \dfrac{1,10}{1,05} - 1 \Leftrightarrow f_2 = 0,0476$.
Erwartete Rendite des Wertpapiers 2 aus Sicht des inländischen Investors $= 0,1075 + f_2 = 0,1551$.

Zu e)
Portfoliorendite aus Sicht des inländischen Investors bei Hedge-Ratio von $h = 1$:

$$R^{h=1} = xR_1 + (1-x)\,[R_2 + f_2]$$

$$\mu = 0,2725x + 0,1551(1-x) = 0,1174x + 0,1551 \rightarrow x = (\mu - 0,155)/0,1174$$

$$\sigma^2 = 0,09x^2 + 0{,}01(1-x)^2 + 2x(1-x)0{,}0045 = 0,091x^2 - 0,011x + 0,01$$

$\rightarrow$ Menge aller (μ,σ)-Kombinationen:

$$\sigma^2 = 0,091\left[\frac{(\mu - 0,155)}{0,1174}\right]^2 - 0,011\left[\frac{(\mu - 0,155)}{0,1174}\right] + 0,01$$

Maximiere Präferenzfunktional

$$\begin{aligned}
\Phi(x) = \mu - 2\sigma^2 &= 0,1174x + 0,1551 - 2\left[0,091x^2 - 0,011x + 0,01\right] \\
\rightarrow \quad & \frac{d\Phi}{dx} = 0,1174 - 0,364x + 0,022 = 0 \\
\rightarrow \quad & x_1 = 0,3830; x_2 = 0,6170
\end{aligned}$$

6. Aufgabe (15 Minuten)

Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen eines Immobilienindex ergibt für die mittlere Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 2\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung AR(1) = 0,6.
Unterstellen Sie im Folgenden normalverteilte iid-Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell/Ward-Verfahren.

a) Berechnen Sie in einem ersten Schritt die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtrendite des Investments nach einem bzw. nach neun Jahren eine Mindestverzinsung von 0% verfehlt.

b) Berücksichtigen Sie in einem nächsten Schritt weiterhin, dass beim Kauf von Immobilien einmalige Transaktionskosten in Höhe von 6% des Kaufpreises und beim Verkauf von 2% des Verkaufspreises anfallen. Berechnen Sie wiederum die Wahrscheinlichkeit, die nominale Kapitalerhaltung nach einem bzw. neun Jahren zu verfehlen.

c) Nunmehr wird die Mindestrendite auf 2% p.a. (Log-Rendite) erhöht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das geforderte Renditeziel nach einem bzw. neun Jahren zu verfehlen.

Lösung:

Korrektur von Varianz bzw. STD der einperioden Log-Rendite gemäß dem Blundell/Ward-Verfahren:

$$\begin{aligned}
\sigma\left(r_t^*\right) &= STD\left(r_t\right)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} \\
&= 2\% \cdot \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} \\
&= 2\% \cdot 2 = 4\%
\end{aligned}$$

Bei (bereinigten) iid. Einperioden-Renditen $r_t^* \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma) = \mathrm{N}(5\%;\ 4\%)$ resultiert für kumulierte Logrendite bis T $\quad \sum_{t=1}^{T} r_t^* = r_{0,T} \sim \mathrm{N}\left(T\mu; \sigma\sqrt{T}\right)$

Zu a)

$SW = P\left(r_{0,T} < 0\right) = \Phi\left(-\frac{T\mu}{\sigma\sqrt{T}}\right)$
Für $T = 1$ resultiert $SW = \Phi(-1,25) = 10,6\%$
Für $T = 9$ resultiert $SW = \Phi(-3,75) < 0,1\%$

Zu b)

Für kumulierte Logrendite bis T nach Transaktionskosten i.H.v. $100a\% = 6\%$ des Kaufpreises und $100b\% = 2\%$ des Verkaufpreises gilt:

$$r_{0,T}^{TK} = r_{0,T} + \ln(1-b) - \ln(1+a) \sim N\left[T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a), \sqrt{T}\sigma\right]$$

$$\rightarrow \quad SW = P\left(r_{0,T}^{TK} < 0\right) = \Phi\left(-\frac{T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für $T = 1$ resultiert $SW = \Phi(0,71) = 76,1\%$
Für $T = 9$ resultiert $SW = \Phi(-3,1) = 0,1\%$

Zu c)

Bei einer kontinuierlichen Zielrendite von $z = 2\%$ per annum resultiert für die kumulierte Zielrendite $z_{0,T} = Tz$

$$\rightarrow \quad SW = P\left(r_{0,T}^{TK} < Tz\right) = \Phi\left(\frac{Tz - [T\mu + \ln(1-b) - \ln(1+a)]}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Für $T = 1$ resultiert $SW = \Phi(1,21) = 88,7\%$
Für $T = 9$ resultiert $SW = \Phi(-1,60) = 5,5\%$

7. Aufgabe (6 Minuten)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Mit einer vollständigen Währungssicherung durch Forwards lässt sich das Wechselkursrisiko eines Investments vollständig eliminieren.

b) Die Volatilität eines international diversifizierten Portfolios nach Währungssicherung ist stets geringer als ohne Währungssicherung.

c) Das aktive Information-Ratio ist das Verhältnis der durch Abweichung vom risikolosen Zinssatz zusätzlich erzielten erwarteten Rendite zum aufgrund dieser Abweichung in Kauf genommenen zusätzlichen Risiko.

Lösung:

Zu a)

Falsch: Problematisch bei der Sicherung des kompletten Währungsrisikos ist die Unkenntnis über die zukünftigen Mittelrückflüsse aus ausländischen Anlagen z.B. bei Aktien. Durch den gewöhnlichen Forward-Hege kann nur eine fixe Menge an Fremdwährungseinheiten gesichert werden. Nur für die risikolose (Zerobond-)Anlage im Ausland sind die Rückflüsse bekannt und damit ein vollständiges Währungs-Hedging möglich.

Zu b)

Falsch: Da mitunter negative Kovarianzterme der Fremdwährungsrendite mit den lokalen Asset-Renditen bestehen, können (allerdings wohl nur im Ausnahmefall) möglicherweise daraus resultierende Diversifikationspotentiale die Eigenvolatilität der Fremdwährungsposition überkompensieren.

Zu c)

Falsch: Das aktive Information Ratio bezeichnet das Verhältnis der durch Abweichung vom einem Benchmarkportfolio zusätzlich erzielten erwarteten Rendite zum infolge der Abweichung in Kauf genommenen zusätzlichen Risiko.

8. Aufgabe (9 Minuten)

Erläutern Sie kurz folgende Fragestellungen:

a) Erläutern Sie die Charakteristika und Unterschiede eines geschlossenen Immobilienfonds, eines offenen Immobilienfonds und einer Immobilienaktiengesellschaft.

b) Erläutern Sie kritisch die drei wesentlichen Verfahren zur statistischen Identifikation von Multifaktorenmodellen.

c) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Multifaktorenmodellen und der Arbitrage-Pricing-Theorie (APT).

Lösung:

Zu a)

- Geschlossener Immobilienfonds: Typischerweise werden bei geschlossenen Immobilienfonds die einzelnen Immobilienobjekte, in die das Fondsvermögen investiert werden soll, bereits bei Auflage von den Initiatoren des Fonds festgelegt. Finanzierung durch Eigen- und Fremdkapital. Ist das notwendige Eigenkapital beschafft, werden keine neuen Anteile mehr angeboten, d.h. der Fonds wird geschlossen. Hinsichtlich der Rechtsform sind geschlossene Fonds meist als Personengesellschaft organisiert, ohne dass spezielle gesetzliche Regelungen, etwa hinsichtlich der Art und Zusammensetzung des Fondsvermögens, existieren. Für Anteile an geschlossenen Immobilienfonds existiert i.d.R. weder ein geregelter Sekundärmarkt noch besteht eine gesetzliche oder vertragliche Rücknahmeverpflichtung der ausgegebenen Anteile seitens der Fondsgesellschaft. Insofern verbleibt nur die Veräußerung der Anteile über einen wenig organisierten Sekundärmarkt, was deren Liquidität einschränkt.
- Offener Immobilienfonds: Hierbei handelt es sich um rechtlich eigenständige Sondervermögen mit einem Anlageschwerpunkt in Immobilien, die von Investmentgesellschaften im Sinne des Investmentgesetzes verwaltet werden. Es existieren zahlreiche gesetzliche Anlegerschutzvorschriften. Im Unterschied zum geschlossenen Immobilienfonds sind weder die Höhe des Fondsvermögens noch die Anzahl der ausgegebenen Anteilsscheine begrenzt. Es gibt auch keine Festlegung auf einzelne Immobilienobjekte, vielmehr kann das Fondsmanagement im Rahmen des durch das Investmentgesetz festgelegten Rahmens jederzeit Objekte des Sondervermögens veräußern und neue erwerben. Kapitalanlagegesellschaft ist gemäß dem Open-End-Prinzip ständig zur Ausgabe neuer und zur Rücknahme alter Anteile gemäß dem (anteiligen) aktuellen Marktwert des Sondervermögens verpflichtet.
- Immobilien-Aktiengesellschaft: Hierbei handelt es um i.d.R. börsennotierte Aktiengesellschaften, deren Hauptgeschäftstätigkeit im Immobiliensektor liegt. Solche Gesellschaften sind nicht nur auf die Anlage in Immobilien spezialisiert (so genannte Bestandshalter), sondern treten auch als Bauträger, Projektentwickler, Makler oder Verwalter auf. In bestimmten Ländern existieren jedoch steuerliche Besonderheiten, anhand derer Immobilienaktien, deren Geschäftserfolg maßgeblich aus Miet- und Pachteinnahmen sowie Wertsteigerungen von im eigenen Bestand gehaltenen Immobilien abhängt, abgegrenzt werden können (etwa in den USA sogenannte Real Estate Investment Trusts).

Zu b)

1. Vorgabe der Faktoren und Bestimmung der Faktorladungen (meist für makroökonomische Faktoren wie Sozialprodukt, Inflation, Zinsniveau).

2. Vorgabe der Faktorladungen und Bestimmung der Faktoren im Rahmen von Querschnittanalysen (meist für mikroökonomische Faktoren wie Dividendenrendite, KGV, Buch-/Marktwertverhältnis).
3. Simultane Spezifikation von Faktoren- und Faktorladungen mittels statistischer Faktorenanalyse.

Zu c)

Ziel der APT ist die folgende Gleichung für die erwarteten Renditen der Aktien eines betrachteten Marktes entweder exakt oder aber zumindest in asymptotischer Form (für "sehr große" Wertpapiermärkte) abzuleiten:

$$E(R_i) = \lambda_0 + b_{i1}\,\lambda_1 + \,...\, + b_{im}\,\lambda_m \ .$$

Dabei entspricht λ_0 der Verzinsung r_0 einer risikolosen Anlage, falls eine solche am Markt existiert. Die Größen λ_j können als Risikoprämien hinsichtlich des j-ten Faktors (Faktorprämien) interpretiert werden. Die Preisgleichung weist eine „Multi-Faktor-Struktur" auf. Alle APT-Varianten weisen die gemeinsame Prämisse auf, dass die Wertpapiere des betrachteten Marktes einem Multifaktormodell folgen.