Bericht zur Prüfung im Oktober 2003 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht, *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim) und *Raimond Maurer* (Frankfurt)

Am 18. Oktober 2003 wurde zum zweiten Mal eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. 18 Teilnehmer waren hierbei zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sieben Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissensseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jeder Block wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erreicht werden.

Block I (Prof. Bartels)

1. Aufgabe

Man betrachte das folgende einperiodige Finanzmarktmodell mit einem Bond B und zwei Aktien S_1 und S_2. Die zugehörigen Preisprozesse werden durch folgende Tabelle beschrieben:

Zeit $t = 0$:	Zeit $t = 1$:
$B = 1$	$B = 10/9$

$$\begin{matrix} S_1 = 5 \\ S_2 = 10 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \begin{matrix} S_1 = X \\ S_2 = \frac{40}{3} \end{matrix} & \text{mit WS} \quad p > 0 \\[2ex] \begin{matrix} S_1 = \frac{60}{9} \\ S_2 = \frac{80}{9} \end{matrix} & \text{mit WS} \quad q > 0 \\[2ex] \begin{matrix} S_1 = \frac{40}{9} \\ S_2 = \frac{80}{9} \end{matrix} & \text{mit WS} \quad 1 - p - q > 0 \end{cases}$$

so dass z. B. mit Wahrscheinlichkeit q S_1 und S_2 zur Zeit $t = 1$ auf die Werte 60/9 bzw. 80/9 übergehen.

(i) Man zeige, dass im Falle $X = 40/9$ sich Arbitragemöglichkeiten bieten

(d.h. es gibt eine Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, H_2)$, so dass für $V(t) := (H_0 \times B + H_1 \times S_1 + H_2 \times S_2)(t)$ gilt: $V(0) = 0, V(1) \geq 0$ und $E[V(1)] > 0$).

(ii) Man zeige, dass für $X = 5$ keine Arbitrage möglich ist.

Lösung

Es bieten sich keine Arbitragemöglichkeiten in dem betrachteten Finanzmarktmodell genau dann, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß P^* gibt. Für dieses Maß gilt insbesondere $P^*(\omega) \quad > 0$ für alle Ereignisse ω des betrachteten Wahrscheinlichkeitsraumes. Für den Erwartungswert von S_1/B bzw. S_2/B unter diesem neuen Maß P^* mit den einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten p^* und q^* sowie $1 - p^* - q^*$ bedeutet dies:

$$
\begin{aligned}
5 &= p^* \times \frac{X}{10} \times 9 + q^* \times \frac{60}{9} \times \frac{9}{10} + (1 - p^* - q^*) \times \frac{40}{9} \times \frac{9}{10} \qquad (1)\\
&= p^* \times \frac{X}{10} \times 9 + 2 \times q^* + (1 - p^*) \times 4
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
10 &= p^* \times \frac{40}{3} \times \frac{9}{10} + q^* \times \frac{80}{9} \times \frac{9}{10} + (1 - p^* - q^*) \times \frac{80}{9} \times \frac{9}{10} \qquad (2)\\
&= p^* \times 12 + (1 - p^*) \times 8 = 8 + 4p^*
\end{aligned}
$$

Aus Gleichung (2) ergibt sich in jedem der beiden betrachteten Fälle zwangsläufig $p^* = 1/2$.

Im Fall (ii) , d.h. $X = 5$, ergibt sich aus Gleichung (1) $q^* = 3/8$, und mit diesen Parameterwerten für p^*, q^* und $1 - p^* - q^*$ sind für $X = 5$ auch die Martingalgleichungen (1) und (2) wirklich erfüllt. Wegen $p^* > 0, q^* > 0$ und $(1 - p^* - q^*) > 0$ ist das neue Maß P^* auch wirklich ein zum ursprünglichen Maß (mit den Parametern p und q) äquivalentes Maß. Das beantwortet zunächst die Frage (ii).

Im Fall (i), d.h. für $X = 40/9$, ergibt sich wegen $p^* = 1/2$ zwangsläufig $q^* = 1/2$, und damit ist $1 - p^* - q^* = 0$, d.h. man erhält kein im obigen Sinne äquivalentes Martingalmaß. Wer will, kann auch eine explizite Arbitragemöglichkeit angeben. Eine solche ist z.B. $H = (20, -2, -1)$. Denn mit $V(t) := (H_0 \times B + H_1 \times S_1 + H_2 \times S_2)(t)$ für $t = 0$ bzw. $t = 1$ gilt: $V(0) = 20 - 2 \times 5 - 1 \times 10 = 0$, und wie man leicht nachrechnet auch $V(1) \geq 0$ und $E[V(1)] > 0$.

2. Aufgabe

Der Preis einer Aktie S folge einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Driftterm μ und Volatilität v: $dS = \mu\, S\, dt + v\, S\, dW$
($W = W(t)$ bezeichnet einen standardisierten Wienerprozess).

(i) Folgt der Prozess S^n (n eine natürliche Zahl) wieder einer geometrischen Brownschen Bewegung? (Anleitung: Man benutze die Ito-Formel)

(ii) Der Erwartungswert von $S(T)$, dem Aktienwert zur Zeit T, bezogen auf den Zeitpunkt t ist $S(t)\, e^{\mu(T-t)}$. Was ist der Erwartungswert von $S^n(T)$ zur Zeit $t = 0$?

Lösung

(i) Mit $X(t) := g(S(t), t)$ und $g(x, t) := x^n$ hat man wegen $\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \frac{\partial g}{\partial x} = nx^{n-1}$ und $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}$ nach dem Itô-Lemma:

$$dX(t) = (\mu\, n\, S^n + \tfrac{1}{2} n(n-1)\, v^2 S^n)\, dt + v\, n\, S^n dW(t),$$

und damit hat man eine geometrische Brownsche Bewegung mit Return $(\mu\, n + \frac{1}{2} n(n-1)\, v^2)$ und Volatilität nv vorliegen.
(ii) Der Erwartungswert von $S(T)^n$ zur Zeit $t = 0$ ist $S(0)^n\, e^{[\mu\, n + \frac{1}{2} n(n-1) v^2]\, T}$.

Block II (Prof. Maurer)
3. Aufgabe

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen.
$R_i :=$ lokale Rendite von Wertpapier i ($i = 1, 2$),
$e_2 :=$ Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1,
Gegeben seien die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Renditen:
$\mu(R_1) = 0,2725;\ \mu(R_2) = 0,1075;\ \mu(e_2) = 0,04$
$\sigma(R_1) = 0,3;\ \sigma(R_2) = 0,1;\ \sigma(e_2) = 0,08$
Der Zinssatz für eine risikolose Anlage in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt: $r_1 = 0,10$ bzw. $r_2 = 0,05$.
Die Rendite-Korrelationsmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	1	0,15	- 0,1875
R_2		1	- 0,4
e_2			1

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der ($R_2 e_2$) Kreuzprodukte.
- Führen Sie alle Berechnung mit 4 Nachkommastellen durch.

a) Berechnen Sie Struktur, Renditeerwartungswerte und Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolio (MVP), wenn der Investor keine Wechselkurssicherung durchführt. Ermitteln Sie ferner analytisch die Menge aller (μ, σ)-Kombinationen der durch Mischung der beiden Anlagen erzielbaren Portfolios. Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar.

b) Unterstellen Sie nunmehr, der Investor korrigiert die Schätzwerte für die erwarteten Renditen gemäß dem James-Stein-Verfahren. Ermitteln Sie für den „Schrumpfungsfaktor" (hin zum MVP) $\omega = 0,2$ die Menge aller (μ, σ)-Kombinationen der durch Mischung der beiden Anlagen erzielbaren Portfolios (ohne Währungssicherung). Vergleichen Sie Ihre Resultate mit denen aus Teilaufgabe a).

c) Als dritte Anlagemöglichkeit steht dem Investor nunmehr zusätzlich eine risikofreie (inländische) Geldmarktanlage zum Zinssatz r_0 zur Verfügung. Der Investor orientiert sich bei der Wahl des optimalen Portefeuilles nun an dem Quotienten $SR(R_P) = [\mu(R_P) - r_0]/\sigma_P$, dem sogenannten Sharpe-Index. Ermitteln Sie in Abhängigkeit des „Schrumpfungsfaktors" ω aus dem James-Stein-Verfahren die Struktur, den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung desjenigen Portfolios aus rein riskanten Anlagen, welches diesen Quotienten maximiert:
i) $\omega = 0,2$
ii) $\omega = 1$
(Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass für $\omega = 0,2$ die Menge aller erreichbaren (μ, σ)-Kombinationen aus Wertpapier 1 und 2 durch $\mu = 0,16 \pm 0,1\sqrt{0,1\,(\sigma^2 - 0,009)}$ gegeben ist.)

d) Angenommen die Forwardprämie zwischen der Währung des Landes 2 und 1 wäre am Markt $f_2 = 0,0376$. Bewerten Sie diesen Marktpreis anhand des Zinsparitätstheorems und geben Sie ggf. eine Arbitragestrategie an.

e) Die Asset Allocation-Abteilung hat ohne Berücksichtigung einer Wechselkurssicherung ein Portfolio ermittelt, das sich zu 50% aus Wertpapier 1 und zu 50% aus Wertpapier 2 ergibt. Berechnen Sie für diese Assetgewichte den Umfang der Währungssicherung des ursprünglichen Investitionsbetrags in Wertpapier 2, welches die (μ, σ)-Nutzenfunktion $\Phi = \mu - 2\sigma^2$ maximiert. Gehen Sie davon aus, dass die Forwardprämie zwischen Land 2 und Land 1 $f_2 = 0,0476$ beträgt (und keine Adjustierung nach dem James-Stein-Verfahren vorgenommen wird). Geben Sie ferner den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung dieses Portfolios an. Welche Währungssicherungsstrategie haben Sie implizit verwendet? Was sind die Vor- und Nachteile einer solchen Währungssicherungsstrategie?

f) Für welche ausländische Asset-Klasse ist ein vollständiges Hedging der Währungsposition aus Sicht des inländischen Investors möglich?

Lösung

Allgemein: Umrechnung der Korrelations- in Kovarianzmatrix ergibt

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	-0,0045
R_2		0,01	-0,0032
E_2			0,0064

Damit ergibt sich für die ungesicherten Wertpapiere in inländischer Währung:

$$\mu(R_1) = 0,2725; \quad \mu(R_2 + e_2) = 0,1475;$$
$$\sigma(R_1) = 0,3; \quad \sigma(R_2 + e_2) = 0,1;$$

Weiterhin gilt: $\text{Cov}(R_1, R_2 + e_2) = \text{Cov}(R_1, e_2) + \text{Cov}(R_1, R_2) = 0$.

a) Bestimmung des MVP

$\sigma_P^2 = 0,3^2 x + 0,1^2(1 - x) + 0$
$\sigma_P^2 = 0,09x^2 + 0,01 - 0,02x + 0,01x^2$
$\frac{d\sigma_P^2}{dx} = 0,2x - 0,02 = 0 \quad \Rightarrow$

$x = 0,1$ bzw. $(1 - x) = 0,9$
$\mu = 0,1 \times 0,2725x + 0,9 \times 0,1475 = 0,16$
$\sigma^2 = 0,01 \times 0,09 + 0,081 \times 0,01 = 0,009$

Bestimmung effizienter Rand

$\mu = 0,2725x + 0,1475(1 - x)$
$x = 8\mu - 1,18$
$\sigma^2 = 0,09x^2 + 0,01(1 - x)^2 + 0$
$\sigma^2 = 0,09(8\mu - 1,18)^2 + 0,01(1 - (8\mu - 1,18))^2$
$0 = 6,4\mu^2 - 2,048\mu + 0,17284 - 0,15625\sigma^2$
$\mu_{1,2} = 0,16 \pm \sqrt{0,15625(\sigma^2 - 0,009)}$

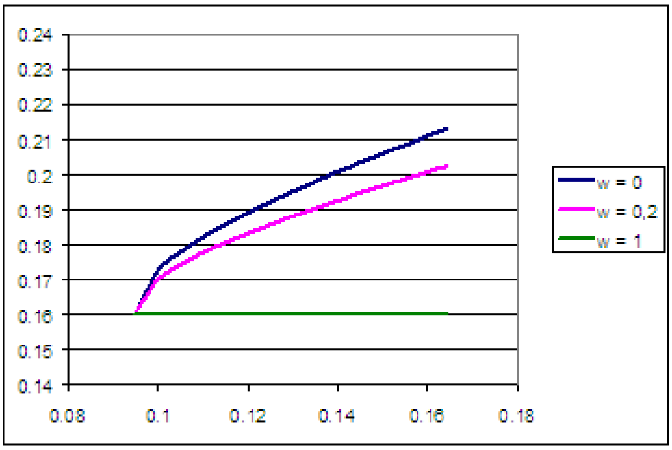

Abbildung 1: Lage des effizienten Rands in Abh. von ω

b) James-Stein-Schätzer für erwartete Renditen:
$\mathrm{E}(R_{1,BS}) = 0,2725(1-\omega) + 0,16\omega = 0,25$
$\mathrm{E}(R_{1,BS} + e_{2,BS}) = 0,1475(1-\omega) + 0,16\omega = 0,15$

Bestimmung effizienter Rand
$\mu = 0,25x + 0,15(1-x)$
$x = 10\mu - 1,5$
$\sigma^2 = 0,09(10\mu - 1,5)^2 + 0,01(1-(10\mu - 1,5))^2$
$\mu_{1,2} = 0,16 \pm \sqrt{0,1(\sigma^2 - 0,009)}$

Bei Anwendung des JS-Schätzers hat effizienter Rand einen flacheren Verlauf.

c) Bayes-Stein-Tangentialportfolio

i) $\omega = 0,2$

Schnittpunktsbedingung: $0,1 + a\sigma = 0,16 \pm \sqrt{0,1(\sigma^2 - 0,009)}$
Auflösen nach Sigma: $(a\sigma - 0,06)^2 = 0,1\sigma^2 - 0,0009$
$(a^2 - 0,1)\sigma^2 - 0,12a\sigma + 0,0045 = 0$
$\sigma_{1,2} = \frac{0,12a \pm \sqrt{0,01444a^2 - 4(a^2-0,1)\times 0,0045}}{2(a^2-0,1)}$
Nur ein Schnittpunkt vorhanden bei einer Tangente.
$0,01444a^2 - 4(a^2 - 0,1) \times 0,0045 = 0$
$a^2 = \frac{0,0018}{0,00356} \approx 0,5$
$a \approx \sqrt{0,5} \approx 0,707$
$\sigma_T \approx 0,106;\ \mu_T \approx 0,175$
$\mu_T = xE(R_1) + (1-x)E(R_2)$
$\Leftrightarrow 0,175 = 0,25x + 0,15(1-x)$
$\Rightarrow x = 0,25$

ii) $\omega = 1$
Bei $\omega = 1$ ergibt sich das Minimum-Varianz-Portfolio. Die Ergebnisse sind somit mit denen aus Aufgabe a) identisch. Der effiziente Rand ist nunmehr eine horizontale Gerade $\mu = 0,16$.

d) Nach dem Zinsparitätstheorem gilt $1 + f_2 = \frac{1+r_1}{1+r_2} \Rightarrow f_2 = \frac{1{,}10}{1{,}05} - 1 \Leftrightarrow f_2 = 0,0476$

Der Forward ist unterbewertet. Arbitragestrategie möglich.
Bspw.: Kaufe Forwards, verkaufe Zerobonds in Land 2 und kaufe Zerobonds in Land 1.

e) Bestimmung der erwarteten Rendite in Abhängigkeit von h

$$\begin{aligned} \mu &= xE(R_1) + (1-x)E(R_2 + e_2 + h(f_2 - e_2)) \\ &= 0,5 \times 0,2725 + 0,5(0,1075 + 0,04 + 0,0076h) \\ &= 0,13625 + 0,07375 + 0,0038h = 0,21 + 0,0038h \end{aligned}$$

Bestimmung der Varianz in Abhängigkeit von h

$$\begin{aligned} \sigma^2 = {} & x^2 Var(R_1) + (1-x)^2[\text{Var}(R_2) + \text{Var}(e_2) + h^2\text{Var}(e_2) \\ & + 2\text{Cov}(R_2, e_2) - 2h\text{Cov}(R_2, e_2) - 2h\text{Var}(e_2)] + 2x(1-x) \\ & [\text{Cov}(R_1, R_2) + \text{Cov}(R_1, e_2) - \text{Cov}(R_1, e_2)h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 0,0225 + 0,5^2[0,01 + 0,0064h^2 - 0,0064h] + 0,00225h \\ &= 0,025 + 0,0016h^2 + 0,00065h \end{aligned}$$

Maximierung Präferenzfunktional

$$U = (0,21 + 0,0038h) - 2(0,025 + 0,0016h^2 + 0,00065h)$$

$$\frac{dU}{dh} = 0,0038 - 0,0064h - 0,0013 = 0 \;\Rightarrow\; h = 0,390625$$

Es wurde ein Currency Overlay angewendet. Vorteil bei dieser Art der Sicherung ist die Vereinfachung des Optimierungsproblem wie auch die organisatorische Aufgabenteilung. Dadurch können unterschiedliche Spezialisten für die Teiloptimierungen eingesetzt werden. Nachteil ist der Effizienzverlust, da in der Regel nicht das globale Minimum wie bei der simultanen Optimierung gefunden wird.

f) Problematisch bei der Sicherung des kompletten Währungsrisikos ist die Unkenntnis über die zukünftigen Mittelrückflüsse aus ausländischen Anlagen z.B. bei Aktien. Im Falle einer risikolosen (Zerobond-)Anlage im Ausland sind die Rückflüsse bekannt. Daher ist für die sichere Anlage ein vollständiges Währungs-Hedging möglich.

4. Aufgabe

Der Finanzvorstand einer Pensionskasse möchte in Immobilien investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen ergibt folgende Schätzgrößen für Erwartungswert und Standardabweichung der jährlichen kontinuierlich berechneten (Log-)Renditen nach Inflation dieser Asset-Klasse:

$$\mu(R) = 5\% \text{ bzw. } \sigma(R) = 2\%$$

Der Finanzvorstand möchte nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Gesamtrendite des Investments nach einem bzw. nach fünf Jahren die Inflationsrate verfehlt (siehe Tabelle zur Standardnormalverteilung im Anhang).

a) Gehen Sie in einem ersten Schritt davon aus, dass die Log-Renditen zeitlich unabhängig und identisch normalverteilt sind.

b) Berücksichtigen Sie in einem zweiten Schritt weiterhin, dass beim Kauf von Immobilien einmalige Transaktionskosten in Höhe von $a = 5\%$ des Kaufpreises und beim Verkauf von $b = 3\%$ des Verkaufpreises anfallen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Teilaufgabe a).

c) Bei einer erneuten Überprüfung fällt Ihnen auf, dass die Immobilienrenditen eine signifikante Autokorrelation 1. Ordnung von 0,6 aufweisen. Korrigieren Sie die Berechnung aus Teilaufgabe b) unter Anwendung des *Blundel/Ward*-Verfahrens. Welche Annahmen müssen Sie hierfür treffen? Interpretieren Sie kurz das Ergebnis.

d) Welche grundsätzlichen Verfahren zur Erstellung von Immobilienindizes kann man unterscheiden? Nennen Sie kurz deren Vor- und Nachteile in Hinblick auf die Erstellung eines repräsentativen Performance-Indexes.

Lösung

a) $SW = P(r_{0,T} < 0) = \Phi\left(-\frac{T\mu}{\sigma\sqrt{T}}\right)$
Für $T = 1$ resultiert SW = Φ(-2,5) = 0.62%
Für $T = 5$ resultiert SW = Φ(-5,59) < 0,01%

b) $SW = P(r_{0,T} < 0) = \Phi\left(-\frac{T\mu + \ln(1-a) + \ln(1-b)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$
Für $T = 1$ resultiert SW = Φ(1,59) = 94,38%
Für $T = 5$ resultiert SW = Φ(-3,76) = 0,01%

c) Korrektur von Varianz bzw. STD gemäß dem Blundel/Ward-Verfahren (Annahme eines informationseffizienten Immobilienmarktes):

$$\begin{aligned} STD(r^*) &= STD(r)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} \\ &= 2,0 \times \sqrt{\frac{1-0,6^2}{(1-0,6)^2}} \\ &= 2,0 \times 2 = 4,0 \end{aligned}$$

Für $T = 1$ resultiert SW = Φ(0,79) = 78,76%
Für $T = 5$ resultiert SW = Φ(-1,88) = 3,00%

Interpretation: Für $T = 1$ beträgt der Rendite-Erwartungswert aufgrund der Transaktionskosten -4,2%, d.h. geringer als die Zielrendite. Bei einer höheren Varianz *steigt* somit die Wahrscheinlichkeit einer positiven Rendite. Für $T = 5$ führt die Erhöhung der Volatilität zu einer Erhöhung der SW.

- Gutachtenbasierte Indizes (Appraisal Based Indizes):

  Index-Konstruktion: Auswertung von Mieten und (geschätzten) Wertsteigerungen einzelnen Immobilien im Bestand institutioneller Investoren

  Vorteil: Portfolio-Kontinuität, Total-Return-Index

  Nachteil: Keine Marktpreise, Smoothing-Effekte

- Transaktionsbasierte Indizes:

  Index-Konstruktion: Auswertung von tatsächlichen Transaktionspreisen auf Immobilienmärkten. Erfassung von Qualitätsschwankungen durch sogn. hedonische Regressionen.

  Vorteil: Basierend auf realisierten Marktpreisen

  Nachteil: Keine Portfolio-Kontinuität, nur Preisveränderungen

- Indizes vom Immobilien-Aktiengesellschaften

  Index-Konstruktion: Auswertung von Kursen börsennotierten Aktiengesellschaften mit Fokus auf dem Immobiliengeschäft.

  Vorteil: Marktpreise, Portfolio-Kontinuität, Total-Return-Index

  Nachteil: Einfluss des Börsenrisikos, untypische Rendite-Risikoprofile

5. Aufgabe

a) Zeigen Sie formal, wie auf Grundlage eines Multifaktorenmodells der Betafaktor $\beta_P = \mathrm{Cov}(R_P, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ zwischen der Rendite eines beliebigen Portfolios P relativ zur der Rendite des Marktindexportfolios M faktoriell zerlegt werden kann.

b) Erläutern Sie, wie auf dieser Grundlage eine Beta-Prediktion für das Portfolio erreicht werden kann.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Information Ratio und dem Nachweis einer statistisch signifikanten Outperformance eines aktiven Portfolio-Managers?

Lösung

a) Ausgangspunkt ist ein Faktormodell des Typus $R_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} F_j + U_i$

Damit lässt sich der Betafaktor mit $b_{Pj} = \sum x_{Pi} b_{ij}$ faktoriell aufspalten in

$$\begin{aligned}
\beta(R_P) &= \frac{1}{\mathrm{Var}\,(R_M)} \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{Pj} F_j + \sum_{i=1}^{n} x_{Pi} U_i, R_M \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_{Pj} \frac{\mathrm{Cov}\,(F_j, R_M)}{\mathrm{Var}\,(R_M)} + \sum_{i=1}^{n} x_{Pi} \frac{\mathrm{Cov}\,(U_i, R_M)}{\mathrm{Var}\,(R_M)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_{Pj} \beta(F_j) + \sum_{i=1}^{n} x_{Pi} \beta(U_i)\,.
\end{aligned}$$

Der Betafaktor eines jeden Portfolios lässt sich zurückführen auf eine gewichtete Summe der Betafaktoren der Faktoren und der spezifischen Renditen. Im Falle eines diversifizierten Portfolios kann man in erster Näherung davon ausgehen, dass der Gesamteinfluss der spezifischen Komponente vernachlässigbar ist, d.h.

$$\beta(R_P) = \sum_{j=1}^{m} b_{Pj} \beta(F_j)\,.$$

b) Eine Beta-Prediktion besteht in der Prognose des Betafaktors $\hat{\beta}_{t+1}(R_P)$ für die nächste Investmentperiode $t+1$. Dazu werden Prognosen für die Betas $\hat{\beta}_{t+1}(F_j)$ der Faktoren benötigt

$$\hat{\beta}_{t+1}(R_P) = \sum_{j=1}^{m} b_{Pj}\hat{\beta}_{t+1}(F_j).$$

c) Informationsratio bezeichnet den Quotient aus mittlerer residualer (aktiver) Rendite α_P und residualen (aktiven) Risiko ω_P.

$$IR_A := IR(RR_P) = \frac{\alpha_P}{\omega_P}$$

Bei gegebenem aktiven Information-Ratio kann man berechnen, wie viele Beobachtungsperioden notwendig sind, um eine systematische Outperformance gegenüber einer Benchmark nachweisen zu können. Im Fall normalverteilter residualer Renditen gilt approximativ folgender Zusammenhang zwischen Information-Ratio, t-Statistik zum Signifikanzniveau ε und notwendige Anzahl der Perioden T zum statistischen Nachweis einer Outperformance:

$$\text{Anzahl der Perioden} > IR^{-2}\ t^2_{T-1,\,1-\varepsilon}\,.$$

Block III (Prof. Albrecht)

6. Aufgabe

Die anfängliche Diskontstrukturkurve $u(t) = u_t(0)$ in zeitstetiger Darstellung unterliege einem (anfänglichen) multiplikativen Shift der Form ($\lambda > 0$)

$$u^*(t) = (1+\lambda)u(t)$$

Bestimmen Sie für diesen Fall die ,,Sensitivitätsduration“ sowie die ,,immunisierende Duration“.

Lösung

a) $P(\lambda) = \sum Z(t_i)e^{-(1+\lambda)u(t_i)t_i}$
$\partial P(\lambda)/\partial\lambda = -\sum u(t_i)t_i Z(t_i)e^{-(1+\lambda)u(t_i)t_i}$
$$D_s = \frac{-\partial P(\lambda)/\partial\lambda\,|\lambda=0}{P(0)} = \frac{\sum u(t_i)t_i Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i}}{\sum Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i}}$$

b)
$$\begin{aligned} K_s(\lambda) &= e^{(1+\lambda)u(s)s} \sum Z(t_i)e^{-(1+\lambda)u(t_i)t_i} \\ &= e^{u(s)s}\sum Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i}\ e^{\lambda[u(s)s-u(t_i)t_i]} \\ dK_s(\lambda)/d\lambda &= e^{u(s)s}\sum [u(s)s-u(t_i)t_i]\,Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i}e^{\lambda[u(s)s-u(t_i)t_i]} \\ &= e^{u(s)s}\Big\{\ u(s)s\,e^{\lambda u(s)s}\sum Z(t_i)e^{-(1+\lambda)u(t_i)t_i} \\ &\qquad -e^{\lambda u(s)s}\sum u(t_i)t_i\,Z(t_i)e^{-(1+\lambda)u(t_i)t_i}\Big\}\ . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}$$
$$= e^{u(s)s}\left\{u(s)s\sum Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i} - \sum u(t_i)t_i Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i}\right\}$$

und somit aus $\frac{dK_s}{d\lambda} = 0$

$$u(s)s \sum Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i} = \sum u(t_i)t_i Z(t_i)e^{-u(t_i)t_i} \ .$$

Insgesamt gilt damit:

$u(s)s = D_s$ bzw. $u(D_I)D_I = D_s$.

Dieser Ausdruck ist nicht explizit nach s auflösbar und offenbart damit ein Auseinanderfallen von Sensitivitätsduration und immunisierender Duration.

7. Aufgabe

Gegeben sei eine Europäische Put-Option auf einen dividendenfreien Basistitel, die nach Black/Scholes bewertet ist. Wie hoch ist der (isolierte) Value-at-Risk der Option über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode?
Hinweise:
1) Arbeiten Sie mit der ,,kondensierten" Black-Scholes-Formel

$$P_t = N\left(-d_2\right) X\, e^{-r(T-t)} - N\left(-d_1\right) S_t \ .$$

2) Die Rendite R_h des Basistitels sei gegeben durch

$$R_h \sim N(\mu\, h, \sigma^2 h)$$

3) Setzen Sie den Value-at-Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus.

Lösung

i) Gegeben: Black/Scholes-Formel

a) $P_t = N\left(-d_2\right) X\, e^{-r(T-t)} - N\left(-d_1\right) S_t$
b) $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$

ii) Value-at-Risk im Normalverteilungsfall, Konfidenzniveau α, Zeitintervall [t, t+h]:
$\mathrm{VaR}_h = N_{1-\alpha}\sigma(L_h) + E(L_h)$, wobei L_h den Marktverlust über [t, t+h] bezeichnet und $N_{1-\alpha}$das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung.

iii) Deltaapproximation der Optionsposition:

$$\Delta P := P_{t+h} - P_t \approx \Delta_P(t)(S_{t+h} - S_t),$$

wobei $\Delta_P(t) = \partial P/\partial S$(,,Optionsdelta").
Im Black/Scholes-Falle gilt:

$$\Delta_P(t) = \partial P/\partial S = -N(-d_1).$$

iv) Es gilt:

$$\begin{aligned} L_h &= P_t - P_{t+h} = -N(-d_1)(S_t - S_{t+h}) \\ &= N(-d_1)S_t R_h \\ &\sim N\left[N(-d_1)S_t\mu h, N(-d_1)^2 S_t^2\sigma^2 h\right], \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_h &= N_{1-\alpha}N(-d_1)S_t\sigma\sqrt{h} + N(-d_1)S_t\mu h \\ &= N(-d_1)S_t\left[N_{1-\alpha}\sigma\sqrt{h} + \mu h\right]. \end{aligned}$$