Bericht zur Prüfung im Oktober 2002 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim), *Hans-Jochen Bartels* (Mannheim) und *Raimond Maurer* (Frankfurt)

Am 19. Oktober 2002 wurde zum zweiten Mal eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. 10 Teilnehmer waren hierbei zu verzeichnen.

Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sechs Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissensseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jede Aufgabe wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erreicht werden.

Block I

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei eine diskrete Renditevariable R mit den nachfolgenden zehn möglichen Werten, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden:

19%	12%
– 35%	24%
4%	– 15%
– 10%	7%
1%	20%

i) Berechnen Sie Shortfallwahrscheinlichkeit, Shortfallerwartungswert sowie Shortfallvarianz relativ zur Targetgröße $z = -5\%$!

ii) Für welchen Wertebereich der Targetgröße ergibt sich eine identische Shortfallwahrscheinlichkeit wie zuvor?

b) Gegeben sei ein dreijähriger Standardbond mit einem Coupon von 5%. Die am Markt bestehende anfängliche Zinsstrukturkurve lautet:

Laufzeit (Jahre)	1	2	3
Spot Rate	3%	4%	5%

Berechnen Sie die (absoluten) Key-Rate-Durationen des Bonds zu den Zahlungszeitpunkten (Restlaufzeiten) 1, 2 sowie 3 Jahren!

Lösung Aufgabe 1:

a) $r_2 = -0{,}35$, $r_4 = -0{,}1$ und $r_8 = -0{,}15$ sind die einzigen drei Werte von R, die unter dem Target $z = -0{,}05$ liegen.

Allgemein gilt:

$$SW(z) = \sum_{i=1}^{n} I_z(r_i)p_i,\ SE(z) = \sum_{i=1}^{n} (z - r_i)I_z(r_i)p_i$$

und

$$SV(z) = \sum_{i=1}^{n} (z - r_i)^2 I_z(r_i)p_i, \quad \text{wobei} \quad I_z(r_i) = 1,$$

wenn $r_i \leq z$ und $I_z(r_i) = 0$, wenn $r_i > z$.

Hieraus folgt:

i) $SW(-0{,}05) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$SE(-0{,}05) = [(-0{,}05+0{,}35)+(-0{,}05+0{,}1)+(-0{,}05+0{,}15)]/10 = (0{,}3+0{,}05+0{,}1)/10 = 0{,}045$

$SV(-0{,}05) = [(0{,}3)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}1)^2]/10 = 0{,}01025.$

ii) Eine Shortfallwahrscheinlichkeit von 0,3 ergibt sich für $-0{,}1 < z < 0{,}01$.

b) Zahlungsreihe Bond: {5, 5, 105}

$$P(r_1, r_2, r_3) = 5(1 + r_1)^{-1} + 5(1 + r_2)^{-2} + 105(1 + r_3)^{-3}$$

$$KRD_1 = -\partial P/\partial r_1 = 5(1{,}03)^{-2} = 4{,}713$$

$$KRD_2 = -\partial P/\partial r_2 = 10(1{,}04)^{-3} = 8{,}89$$

$$KRD_3 = -\partial P/\partial r_3 = 315(1{,}05)^{-4} = 259{,}15.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei in t eine Futureposition mit Liefertermin $T > t$ auf ein einkommensfreies Basisobjekt, die nach dem Cost-of-Carry-Prinzip bewertet ist. Wie hoch ist der Value-at-Risk dieser Position über ein Intervall der Länge h, wenn für die Rendite des Basisobjekts gilt $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$. Am Markt existiere sowohl zum Zeitpunkt t als auch zum Zeitpunkt $t + h$ derselbe fristigkeitsunabhängige Zins r.

Hinweis: Für eine normalverteilte Verlustposition L_h gilt $VaR_\alpha = E(L_h) + N_{1-\alpha}\sigma(L_h)$.

Lösung Aufgabe 2:

Aus Cost-of-Carry-Prinzip folgt:

$F(t, T) = K_t(1 + r)^{T-t}$, wobei $\{K_t\}$ die Kursentwicklung des Basisobjekts bezeichne.

Nun gilt zunächst: $L_h = F(t, T) - F(t + h, T) = K_t(1 + r)^{T-t} - K_{t+h}(1 + r)^{T-t-h}$.

Ferner gilt:

$$K_t - K_{t+h} = -K_t R_h \sim N(-K_t\mu h, K_t^2\sigma^2 h).$$

Es folgt:

$$-K_{t+h} \sim N(-K_t(\mu h + 1), K_t^2\sigma^2 h)$$

bzw.

$$-K_{t+h}(1+r)^{T-t-h} \sim N(-K_t(\mu h+1)(1+r)^{T-t-h}, K_t^2\sigma^2 h(1+r)^{2T-t-h}).$$

Für $L_h \sim N(E(L_h), Var(L_h))$ folgt damit:

$$E(L_h) = K_t(1 + r)^{T-t} - K_t(\mu h + 1)(1 + r)^{T-t-h}$$

$$= K_t(1 + r)^{T-t}\,[1 - (\mu h + 1)(1 + r)^{-h}]_1\sigma(L_h) = K_t\sigma\sqrt{h}(1 + r)^{T-t-h}.$$

Und damit insgesamt nach Hinweis:

$$VaR_\alpha = E(L_h) + N_{1-\alpha}\sigma(L_h).$$

Block II

Aufgabe 3:

Bei einer aktienindexgebundenen Lebensversicherung werde ein fester Prozentsatz i(p) der jährlichen Steigerungen eines Index durch Cliquet-Optionen abgesichert.

Wenn S(t) den Verlauf des betreffenden Index beschreibt, so beträgt die Gewinnbeteiligung für den Kunden bei Ablauf T des Vertrages also $G = i(p) \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} - 1 \right)^{+}$. Es wird vorausgesetzt, dass S(t) einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt:

$$d\,S(t) = \mu\, S(t)\, dt + v\, S(t)\, d\, w(t),\ 0 \leq t \leq T$$

und der Zins wie in dem Black-Scholes-Modell konstant deterministisch ist, mit exponentieller Zinsrate r. Der aktuelle Wert der Gewinnbeteiligung G zur Zeit t = 0 berechnet sich dann zu

$$\exp(-rT)\, E^*[G],$$

wobei der Stern am Erwartungswert bedeutet, dass zur Berechnung des Erwartungswertes das äquivalente Martingalmaß, etwa Q, benutzt wird.

Man berechne mit Hilfe der Black-Scholes-Formel E*[G]!

[Anleitung: Man beachte, dass nach Übergang zu dem neuen Maß Q S(t) der folgenden stochastischen Differentialgleichung genügt:

$$d\,S(t) = r\, S(t)\, dt + v\, S(t)\, d\, w^*(t),\ 0 \leq t < T, \text{ mit einer Q-Brownschen Bewegung } w^*.$$

Lösung dieser Differentialgleichung ist $S(t) = S(0) \exp(r - ½\, v^2)t + v\, w^*(t))$, damit berechne man die Quotienten S(t)/S(t – 1).]

Lösung Aufgabe 3:

Es ist

$$\exp(-rT)E^*\left[i(p)\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}-1\right)^{+}\right] = i(p)\exp(-rT)\sum_{t=1}^{T}E^*\left[\left(\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}v^2\right)+vw^*(1)\right)-1\right)^{+}\right],$$

da w*(t) – w*(t – 1) und w*(1) gleich verteilt sind. Andererseits ist

$$E^*\left[\left(\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}v^2\right)+vw^*(1)\right)-1\right)^{+}\right]$$

gerade der Black-Scholes-Preis C(1,1) einer Europäischen Call Option mti Ausübungszeitpunkt 1, Ausübungspreis 1 und momentanem Preis 1 des zugrundeliegenden Basispapiers. Damit folgt dann: $\exp(-rT)\, E^*[G] = i(p) \exp(-rT)\, T\, C(1,1)$.

Wenn man will, kann man hier auch noch die explizite Black-Scholes-Formel für C(1,1) einsetzen.

Aufgabe 4:

Man berechne mit Hilfe der Itô-Formel das stochastische Differential d exp(w(t)); dabei bezeichnet w(t) einen standardisierten Wienerprozess.

Lösung Aufgabe 4

Mit X(t): = g(w(t)) und g(x): = exp(x) hat man nach dem Itô-Lemma:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(w(t))dw(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(w(t))dt = \exp(w(t))dw(t) + \frac{1}{2}\exp(w(t))dt \\ &= X(t)dw(t) + \frac{1}{2}X(t)dt \end{aligned}$$

Block III

Aufgabe 5:

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 aus Land 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

$R_i :=$ lokale Rendite von Wertpapier i ($i = 1, 2$),

$e_2 :=$ Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien die Erwartungswerte:

$$E(R_1) = 0{,}25;\ E(R_2) = 0{,}10;\ E(e_2) = 0{,}05$$

Der risikolose Zinssatz in Land 1 (Inland) bzw. Land 2 (Ausland) beträgt:

$$r_1 = 0{,}08;\ r_2 = 0{,}03$$

Die Rendite-Varianz-/Kovarianzmatrix ist gegeben durch:

	R_1	R_2	e_2
R_1	0,09	0,0045	0,0003
R_2		0,0025	– 0,0014
e_2			0,0064

- Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch.
- Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der $(R_i e_2)$-Kreuzproduktterme.
- Führen Sie alle Berechnungen mit mindestens 4 Nachkommastellen durch!

a) Berechnen Sie Struktur, Renditeerwartungswert und Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten Minimum-Varianz-Portfolios, wenn der Investor keine Wechselkurssicherung durchführt.

b) Berechnen Sie die Forwardprämie zwischen Land 2 und Land 1 gemäß dem Zinsparitätentheorem.

c) Der betrachtete Investor beschließt, um sich gegen Wechselkursschwankungen abzusichern, den ursprünglichen Investitionsbetrag für Wertpapier 2 in voller Höhe über Devisenforwards abzusichern.
Berechnen Sie Struktur, Renditeerwartungswert und Renditestandardabweichung des aus Wertpapier 1 und 2 gebildeten varianzminimalen Portfolios bei Wahl dieser Wechselkurssicherungsstrategie. Unterstellen Sie hierzu, dass die Forwardprämie für die betrachtete Periode zwischen Land 2 und Land 1 $f_2 = 0{,}0485$ beträgt. Hat der Investor bei dieser Vorgehensweise sein gesamtes Währungsexposure gehedgt?

d) Der Investor entschließt sich nun, seine Währungsposition im Rahmen eines sogenannten Currency-Overlay-Management unter Verwendung von Devisenforwards (bezogen auf den ursprünglichen Investitionsbetrag in ausländischer Währung) zu optimieren. Dabei hat die Asset-Allocation-Abteilung ohne Berücksichtigung einer Wechselkurssicherung ein varianzminimales Portfolio berechnet, das sich zu 20% aus Wertpapier 1 und zu 80% aus Wertpapier 2 zusammensetzt. Berechnen Sie für diese Asset-Gewichte den Umfang der Währungssicherung der varianzminimalen Portfolios. Geben Sie ferner den Renditeerwartungswert und die Renditestandardabweichung dieses Portfolios an. Gehen Sie wiederum davon aus, dass die Forwardprämie zwischen Land 2 und Land 1 $f_2 = 0{,}0485$ beträgt. Ist es gesichert, dass eine durch diese Strategie das global varianzminimale Portfolio erzeugt wird?

e) Erläutern Sie den sogenannten James-Stein-Schätzer im Rahmen des „Backtesting" von internationalen Portfoliostrategien.

f) Erläutern Sie kritisch das sogenannte „Free Lunch" Argument im Rahmen der Wechselkurssicherung von internationalen Investments durch Devisenforwards.

Lösung Aufgabe 5:

a) Keine Wechselkurssicherung (h = 0)

Portfoliorendite aus Sicht des inländischen Investors:

$$R_{PF,inl.}^{h=0} = xR_1 + (1 - x)[R_2 + e_2 + R_2e_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varizanen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$\begin{aligned} Var(R_{PF,inl.}^{h=0}) &= x^2Var(R_1) + (1 - x)^2[Var(R_2) + Var(e_2) + 2Cov(R_2,e_2)] \\ &\quad + 2x(1 - x)[Cov(R_1,R_2) + Cov(R_1,e_2)] \\ &= 0{,}09x^2 + (1 - x)^2[0{,}0261] + 2x(1 - x)[0{,}0048] \\ &= 0{,}1065x^2 - 0{,}0426x + 0{,}0261 \end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar\left(R_{PF,inl.}^{h=0}\right)}{dx} = 0{,}213x - 0{,}0426 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{MVP}^{h=0} = 0{,}2$$

Ergebnisse:

- $x_{MVP}^{h=0} = 0{,}2$
- $Var(R_{PF,inl.}^{h=0,MVP}) \approx 0{,}0218 \Rightarrow \sqrt{Var(R_{PF,inl.}^{h=0,MVP})} \approx 0{,}1478$
- $E\left(R_{PF,inl}^{h=0,MVP}\right) \overset{Maßgabe}{=} xE(R_1) + (1-x)[E(R_2) + E(e_2)] = 0{,}17$

b) Zinsparitätentheorie

Forwardprämie (f_2) muss gem. Zinsparitätentheorie erfüllen:

$$1 + f_2 = \frac{1 + r_1}{1 + r_2} \Rightarrow f_2 = \frac{1{,}08}{1{,}03} - 1 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}0485436... \approx 0{,}0485$$

c) „Vollständige" Wechselkurssicherung mit Devisenforwards (h = 1)

Portfoliorendite aus Sicht des inländischen Investors:

$$R_{PF,inl.}^{h=1} = xR_1 + (1 - x)[R_2 + f_2 + R_2e_2]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzproduktterme zu vernachlässigen, also:

$$\begin{aligned} Var(R_{PF,inl.}^{h=1}) &= x^2Var(R_1) + (1 - x)^2Var(R_2) + 2x(1 - x)Cov(R_1,R_2) \\ &= 0{,}09x^2 + 0{,}0225(1 - x)^2 + 2x(1 - x)(0{,}0045) \\ &= 0{,}1035x^2 - 0{,}036x + 0{,}0225 \end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{dVar\left(R_{PF,inl.}^{h=1}\right)}{dx} = 0{,}207x - 0{,}036 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_{MVP}^{h=1} = 0{,}173913...$$

Ergebnisse:

- $x_{MVP}^{h=1} \approx 0{,}1739...$
- $Var(R_{PF,\,inl.}^{h=1,MVP}) \approx 0{,}0194 \Rightarrow \sqrt{Var(R_{PF,\,inl.}^{h=0,MVP})} \approx 0{,}1392$
- $E\left(R_{PF,inl.}^{h=1,MVP}\right) \overset{Maßgabe}{=} xE(R_1) + (1-x)[E(R_2) + f_2] \approx 0{,}1662$

d) Currency-Overlay-Management mit Devisenforwards (h = opti.)

Portfoliorendite aus Sicht des Inländischen Investors:

$$R_{PF,inl.}^{h=opti} = \bar{x}R_1 + (1-\bar{x})[R_2 + e_2 + R_2e_2 + h(f_2 - e_2)]$$

Gemäß Maßgabe sind alle Varianzen, Kovarianzen und Erwartungswerte der (R_ie_2)-Kreuzprodukttterme zu vernachlässigen, also mit x = 0,2:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(R_{PF,\,inl.}^{h=opti}) &= \bar{x}^2\mathrm{Var}(R_1) + (1-\bar{x})^2[\mathrm{Var}(R_2) + \mathrm{Var}(e_2) + h^2\mathrm{Var}(e_2) \\
&\quad + 2\mathrm{Cov}(R_2,e_2) - 2h\mathrm{Cov}(R_2,e_2) - 2h\mathrm{Var}(e_2)] + 2\bar{x}(1-\bar{x})[\mathrm{Cov}(R_1,R_2) \\
&\quad + \mathrm{Cov}(R_1,e_2) - h\mathrm{Cov}(R_1,e_2)] \\
&= (0{,}2)^2 \cdot 0{,}09 + (0{,}8)^2[0{,}0225 + 0{,}0064 + 0{,}0064h^2 + 2(-0{,}0014) \\
&\quad - 2h(-0{,}0014) - 2h(0{,}0064)] + 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot[0{,}0045 + 0{,}0003 - h\cdot 0{,}0003] \\
&= 0{,}004096h^2 - 0{,}006496h + 0{,}02184
\end{aligned}$$

Minimierung der Portfoliovarianz:

$$\frac{d\mathrm{Var}(R_{PF,inl.}^{h=opti})}{dh} = 0{,}008192h - 0{,}006496 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow h_{MVP}^{h=opti} = 0{,}79296875\ldots$$

Ergebnisse:

- $h_{MVP}^{h=opti} \approx 0{,}7930$
- $\mathrm{Var}(R_{PF,\,inl.}^{h=opti,\,MVP}) \approx 0{,}0193 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{Var}(R_{PF,\,inl.}^{h=opti,\,MVP})} \approx 0{,}1384$
- $E(R_{PF,inl.}^{h=opti,MVP}) \overset{\text{Maßgabe}}{=} \bar{x}E(R_1) + (1-\bar{x})[E(R_2) + E(e_2) - h(f_2 - E(e_2))] \approx 0{,}1710$

Nur eine simultane Optimierung über die Portfoliogewichte x und die Hedge-Ratio h erzeugt im Allgemeinen das global varianzminimale Portfolio.

e) Beim Backtesting von Portfoliostrategien zeigt sich, dass die mit dem einfachen Mittelwertschätzer verbundene zeitliche Stabilitätsannahme des (unbekannten) Erwartungswertvektors problematisch ist und zu erheblichen Schätzrisiken führen kann. Aufgrund des hohen Einflusses der erwarteten Renditen auf die optimalen Portfoliogewichte kann dies zu von Periode zu Periode großen Portfolioumschichtungen und zu stark schwankenden Renditen führen. Zur Kontrolle des Schätzrisikos hat sich sogenannte *James/Stein*-Schätzer als besonders nützlich erwiesen. Dabei wird der Erwartungsvektor als Linearkombination des einfachen Mittelschätzwertes $\bar{\mathbf{r}}$ und der geschätzten erwarteten Rendite des varianzminimalen Portfolios r_0 ermittelt: $\bar{\mathbf{r}}^* = (1-w)\bar{\mathbf{r}} + w\mathbf{1}r_0$. Der Gewichtungsfaktor $0 \leq w \leq 1$ gibt an, welches Vertrauen (aus statistischer Sicht) man in die Stichprobenmittelwerte als Schätzwert für den unbekannten Erwartungsvektor hat. Im Fall w = 0 ist das Vertrauen am höchsten und für w = 1 am niedrigsten. Im letzten Fall wird für sämtliche Anlagen als (identische) Schätzgröße der Erwartungswert des varianzminimalen Portfolios verwendet.

f) In der Literatur wird teilweise die Meinung vertreten, dass eine Wechselkurssicherung mit Devisenforwards im Vergleich zu ungesicherten Anlagen zu einem grundsätzlich besseren Rendite-/Risikoprofil führt. Die theoretische Argumentation basiert auf der Annahme, dass die Forwardprämie ein annähernd unverzerrter Schätzer für die erwartete Wechselkursrendite sei, d.h. $f_i \approx E(e_i)$. Dies hätte zur Konsequenz, dass einer Reduktion des Wechselkursrisikos durch Devisenforwards (nahezu) keine Sicherungskosten im Sinne einer Reduktion der lokalen erwarteten Rendite gegenüberstehen. Dies wird auch als „Free Lunch" bezeichnet. Gegen das Free-Lunch-Argument wird aus theoretischen Gesichtspunkten angeführt, dass aktuelle Forwardprämien nur unter sehr restriktiven Annahmen unverzerrte Schätzer für erwartete Wechselkursrenditen sind. Auch aus empirischer Sicht ist das Free-Lunch-Argument umstritten.

Aufgabe 6:

Geben Sie für ein Universum von n Wertpapieren mit zufallsabhängigen Periodenrendite $R_i (i = 1, \ldots, n)$ von dem folgenden Multifaktorenmodell mit den gemeinsamen Faktoren

$F_j (j = 1, \ldots, m)$ aus:

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} F_j + U_i.$$

Es existiert weiterhin eine Anlage mit sicherer Verzinsung der Höhe r_0. Gegeben sei ein beliebiges Portfolio P aus den n Wertpapieren. Die Rendite- und Risikoposition des aktiv gemanagten Portfolios P soll gegenüber einem Benchmarkportfolio N bestehend aus den n Wertpapieren mit zufallsabhängiger Rendite R_N ausgewertet werden.

a. Definieren und interpretieren Sie die „aktive Allokationsrendite" R_{AA} des Portfolios P gegenüber einem betaäquivalenten Benchmarkportfolio.
b. Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für R_{AA} ab, der eine Multifaktorstruktur besitzt.
c. Leiten Sie auf dieser Grundlage einen Ausdruck für das „aktive Risiko" $\omega_A^2 = Var(R_{AA})$ sowie die erwartete aktive Allokationsrendite (aktiver Alphafaktor) $\alpha_A = E(R_{AA})$ ab. Unter welchen Bedingungen sind das aktive Risiko sowie die erwartete aktive Rendite null? Interpretieren Sie dieses Resultat.
d. Zeigen Sie, dass $Cov(\beta_{PN} R_N, R_{AA}) = 0$ sowie $Var(R_P) = \beta^2_{PN} Var(R_N) + Var(R_{AA})$.
e. Unter welchen Bedingungen ist es ökonomisch sinnvoll, relativ zu einem betaäquivalenten Benchmarkportfolio ein aktives Risiko einzugehen? Was versteht man in diesem Zusammenhang unter dem „aktiven effizienten Rand"?
f. Erläutern Sie die grundsätzlichen Möglichkeiten zur (statistischen) Identifikation eines Multifaktorenmodells. Gehen Sie auch darauf ein, welche Datenquellen man bei den verschiedenen Verfahren typischerweise verwendet.
g. Inwiefern kann das von *Wei* (1988) entwickelte Bewertungsmodell als Synthese zwischen CAPM und APT angesehen werden?

Lösung Aufgabe 6:

a) Es gilt $R_{AA} = (R_P - r_0) - \beta_{PN} (R_N - r_0)$

Interpretation: Die aktive Allokationsrendite R_{AA} erfasst die Konsequenzen bezogen auf die bereinigte Excessrendite $R_P - r_0$ einer Abweichung von der Normalallokation (d.h. relativ zu einem beta-äquivalenten Benchmarkportfolio).

b) Bedeutet x_{Ni} bzw. x_{Pi} den relativen Anteil des i-ten Wertpapiers in der Benchmark bzw. im realisierten Portfolio, dann gilt

$$\begin{aligned} R_{AA} &= \sum_{j=1}^{m} b_{Pj} F_j + \sum_{i=1}^{n} x_{Pi} U_i - \beta_{PN} \left[\sum_{j=1}^{m} b_{Nj} F_j + \sum_{i=1}^{n} x_{Ni} U_i \right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} (b_{Pj} - \beta_{PN} b_{Nj}) F_j + \sum_{i=1}^{n} (x_{Pi} - \beta_{PN} x_{Ni}) U_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{Pj} F_j + \sum_{i=1}^{n} \delta_{Pi} U_i. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} \delta_{Pi} &= x_{Pi} - \beta_{PN} x_{Ni} \\ \gamma_{Pj} &= b_{Pj} - \beta_{PN} b_{Nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_{Pi} - \beta_{PN} x_{Ni}) b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{Pi} b_{ij}. \end{aligned}$$

Die Größen δ_{Pi} quantifizieren (in Termen der anteiligen Investitionen in das i-te Wertpapier) die Differenz des Portfolios P und des dazu betaäquivalenten Benchmarkportfolio, die Größen γ_{Pj} die Differenz der Sensitivitäten dieser Portfolios bezüglich des j-ten gemeinsamen Faktors. Das betaäquivalente Benchmarkportfolio ist in diesem Falle das Referenzportfolio, wobei man sich von der Abweichung von dieser Position eine zusätzliche erwartete Rendite erhofft – und dafür ein zusätzliches Risiko in Kauf nimmt.

c) Für das *residuale aktive Risiko* $\omega_A^2 = \text{Var}(R_{AA})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\text{Var}(R_{AA}) &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_{Pj}F_j\right) + \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{Pi}U_i\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \gamma_{Pj}\gamma_{Pk}\text{Cov}(F_j,F_k) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{Pi}^2 \text{Var}(U_i)\\ &= \sum\sum \gamma_{Pj}\gamma_{Pk}f_{jk} + \sum \delta_{Pi}^2 s_i^2.\end{aligned}$$

Für die residuale aktive Rendite $\alpha_A = E(R_{AA})$ gilt:

$$\alpha_A = E(R_{AA}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{pj}f_j + \sum_{i=1}^{n} \delta_{Pi}a_i.$$

Das residuale aktive Risiko besteht aus einer Komponente, die das (benchmarkbereinigte) Faktorrisiko und einer Komponente, die das (benchmarkbereinigte) spezifische Risiko beinhaltet. Das residuale aktive Risiko eines Portfolios ist gleich Null, wenn vom betaäquivalenten Benchmarkportfolio nicht abgewichen wird, d.h. wenn alle $\delta_{Pi} = 0$ (i = 1, ..., n) und damit, wenn $x_{Pi} = \beta_{PN}x_{Ni}$ für alle i = 1, ..., n. Die erwartete residuale Rendite (Alphafaktor) des Portfolios P lässt sich aufspalten in einen Teil, der durch die erwarteten Faktorrenditen und einen Teil, der durch die erwarteten spezifischen Renditen der Wertpapiere im Portfolio gegeben ist. Der Alphafaktor kann als *nicht-systematische* erwartete Rendite angesehen werden, die zu erwirtschaften ist, weil vom betaäquivalenten Benchmarkportfolio abgewichen wird. Wird vom betaäquivalenten Benchmarkportfolio nicht abgewichen, ergibt sich $\alpha_A = 0$.

d) Es gilt $R_{AA} = (R_p - r_0 - \beta_{PN}(R_N - r_0)$ sowie $\beta_{PN} = \text{Cov}(R_N,R_P)/\text{Var}(R_N)$

i) Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\beta_{PN}R_N,R_{AA}) &= \text{Cov}(\beta_{PN}R_N,(R_P - r_0) - \beta_{PN}(R_N - r_0))\\ &= \beta_{PN}\text{Cov}(R_N,R_P) - \beta_{PN}^2\text{Var}(R) = \beta_{PN}[\text{Cov}(R_N,R_P) - \beta_{PN}\text{Var}(R_N)]\\ &= \beta_{PN}[\beta_{PN}\text{Var}(R_N) - \beta_{PN}\text{Var}(R_N)] = 0.\end{aligned}$$

ii) Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\text{Var}(R_P) &= \text{Var}(r_0 + \beta_{PN}(R_N - r_0) + R_{AA})\\ &= \beta^2_{PN}\text{Var}(R_N) + 2\beta_{PN}\text{Cov}(R_N,R_P) + \text{Var}(R_{AA})\\ &= \beta^2_{PN}\text{Var}(R_N) + \text{Var}(R_{AA}).\end{aligned}$$

e) Ein bewusstes Abweichen vom betaäquivalenten Benchmarkportfolio ist sinnvoll, wenn das Benchmarkportfolio nicht effizient ist Dann steht der residualen aktiven Varianz ein Alphafaktor gegenüber, der im Allgemeinen ungleich null ist. Lohnend für den Investor können dabei aber nur Positionen mit $\alpha_A > 0$ sein. Durch bewusstes Eingehen eines aktiven Risikos kann ein zusätzlicher erwarteter aktiver Ertrag erwirtschaftet werden. Der Investor führt nunmehr einen Trade-Off zwischen aktivem Risiko und aktiver Rendite durch. Der aktive effiziente Rand ist die Menge aller Portfolios, die für ein gegebenes aktives Risiko ω^2_A die höchste aktive Rendite α_A aufweisen.

f) 1. Vorgabe der Faktoren und Bestimmung der Faktorladungen (meist für makroökonomische Faktoren wie Sozialprodukt, Inflation, Zinsniveau).

2. Vorgabe der Faktorladungen und Bestimmung der Faktoren im Rahmen von Querschnittanalysen (meist für mikroökonomische Faktoren wie Dividendenrendite, KGV, Buch/Marktwertverhältnis).

3. Simultane Spezifikation von Faktoren- und Faktorladungen mittels statistischer Faktorenanalyse.

g) Das zentrale Ergebnis von *Wei* (1988) ist die folgende Bewertungsgleichung im Marktgleichgewicht ($\lambda_M > 0$)

$$E(R_i) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_{ij} + \lambda_M b_{iM} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Im Unterschied zur traditionellen APT-Preisgleichung tritt noch ein marktbezogener Term hinzu. Das Modell von *Wei* kann insofern als Synthese zwischen APT und CAPM angesehen werden, da das allein bewertungsrelevante systematische Risiko sowohl auf die erklärenden Faktoren (exogene preisbestimmende Determinanten) als auch auf die Rendite des Marktportfolios (endogene preisbestimmende Determinante) zurückgeführt werden kann.