Bericht zur Prüfung im November 2001 über Finanzmathematik (Spezialwissen)

Peter Albrecht (Mannheim)

Am 11. November 2001 wurde erstmals eine Prüfung im Spezialwissen Finanzmathematik durchgeführt. 16 Teilnehmer waren zu verzeichnen.
Die Prüfung bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der sechs Aufgaben gestellt wurden, die sämtlich zu bearbeiten waren. Die Aufgaben wurden, analog zum Aufbau des entsprechenden Spezialwissenseminars, drei Blöcken zugeordnet. Jede Aufgabe wurde bei der Bewertung gleich gewichtet. Um die Klausur zu bestehen, mussten mindestens 45 von 90 möglichen Punkten erreicht werden.

Block I

Aufgabe 1:

Die anfängliche Diskontstrukturkurve $u(t) = u_t(0)$ in zeitstetiger Darstellung unterliege einem (anfänglichen) additiven Shift der Form ($\lambda > 0$)

$$u^*(t) = u(t) + \lambda .$$

Zeigen Sie, dass in diesem Falle die Fisher-Weil-Duration sowohl die Eigenschaft als „Sensitivitäts-Durationsmaß" als auch als „immunisierendes Durationsmaß" (nur Nachweis der notwendigen Bedingung erforderlich) erfüllt!

Lösung Aufgabe 1:

i) Gegeben: a) Bond mit der Zahlungsfolge $\{Z(t_1), \ldots, Z(t_n)\}$ zu den Zeitpunkten $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$

b) Anfängliche Zinsstruktur in zeitstetiger Variante $u_i := u(0, t_i)$

c) Einheitlicher additiver Shift

$$u_i^* = u_i + \lambda$$

d) Fisher/Weil – Duration: $D_{FW} = \sum t_i Z(t_i) \cdot e^{-u_i \cdot t_i} / \sum Z(t_i) \cdot e^{-u_i \cdot t_i}$

ii) Barwert des Bonds:

$$P(\lambda) = P(u_1, \ldots, u_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} Z(t_i) \cdot e^{-(u_i + \lambda) \cdot t_i} .$$

Bedingungsgleichung für Sensitivitätsduration:

$$D = -\frac{1}{P(0)} \cdot \frac{dP}{d\lambda} \bigg| \lambda = 0 .$$

Nun gilt:

$$\frac{dP}{d\lambda} = -\sum_{i=1}^{u} t_i \cdot Z(t_i) \cdot e^{-(u_i + \lambda) \cdot t_i}$$

$$\frac{dP}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = -\sum t_i \, Z(t_i) \cdot e^{-u_i \cdot t_i}$$

$$\text{Fazit: } -\frac{1}{P(0)} \cdot \frac{dP}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\sum t_i \cdot Z(t_i) \cdot e^{-u_i \cdot t_i}}{\sum Z(t_i) \cdot e^{-u_i \cdot t_i}} = D_{FW} .$$

iii) Wert des Bonds in s, $0 < s < T$:

$$\begin{aligned} K_s(\lambda) &= e^{[u_s+\lambda]\cdot s}\cdot P(\lambda) \\ &= e^{[u_s+\lambda]\cdot s}\cdot \sum_{i=1}^{n} Z(t_i)\cdot e^{-(u_i+\lambda)\cdot t_i} \\ &= e^{u_s\cdot s}\cdot \sum_{i=1}^{n} Z(t_i)\cdot e^{-u_i\cdot t_i}\cdot e^{\lambda(s-t_i)} \end{aligned}$$

wobei $u_s := u\,(0, s)$.

Bedingungsgleichung für immunisierenden Durationszeitpunkt s:

$$\left.\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda} &= e^{u_s s}\sum_{i=1}^{n}(s-t_i)\,Z(t_i)\cdot e^{-u_i\cdot t_i}\cdot e^{\lambda(s-t_i)} \\ &= e^{u_s s}\left\{ s e^{\lambda s}\sum_{i=1}^{n} Z(t_i)\cdot e^{-(u_i+\lambda_i)t_i} - e^{\lambda s}\sum_{i=1}^{n} t_i\, Z(t_i)\, e^{-(u_i+\lambda)t_i}\right\}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left.\frac{dK_s(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = e^{u_s s}\left\{ s\sum_{i=1}^{n} Z(t_i)\cdot e^{-u_i t_i} - \sum_{i=1}^{n} t_i\, Z(t_i)\, e^{-u_i t_i}\right\}.$$

Die Bedingung $\left.\frac{dK_s}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$ führt unter Auflösung nach s wieder auf:

$$s = \frac{\sum t_i\, Z(t_i)\, e^{-u_i t_i}}{\sum Z(t_i)\, e^{-u_i t_i}} = D_{FW}\,.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Europäische Call-Option auf einen dividendenfreien Basistitel, die nach Black/Scholes bewertet ist. Wie hoch ist der (isolierte) Value-at-Risk der Option über ein Intervall der Länge h unter Anwendung der Delta-Normal-Methode?

Hinweise: **1)** Arbeiten Sie mit der „kondensierten" Black-Scholes-Formel

$$C_t = N(d_1)\, S_t - N(d_2)\, X\, e^{-r(T-t)}.$$

2) Die Rendite R_h des Basistitels sei gegeben durch

$$R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)\,.$$

3) Setzen Sie den Value-at-Risk im Normalverteilungsfall als bekannt voraus.

Lösung Aufgabe 2:

i) Gegeben:

a) $C_t = N(d_1)\, S_t - N(d_2)\, Xe^{-r(T-t)}$

b) $R_h \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$.

ii) Value-at-Risk im Normalverteilungsfall, Konfidenzniveau α, Zeitintervall $[t, t + h]$:

$VaR_h = N_{1-\alpha}\, \sigma(L_h) + E(L_h)$, wobei L_h den Marktverlust über $[t, t + h]$ bezeichne und $N_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung.

iii) Deltaapproximation der Optionsposition:

$$\Delta C := C_{t+h} - C_t \approx \Delta_c(t)\,(S_{t+h} - S_t),$$

wobei $\Delta_c(t) = \partial C/\partial S$ („Optionsdelta“)

Im Black/Scholes – Falle gilt:

$$\Delta_c(t) = \partial C/\partial S = N(d_1)$$

iv) Es gilt:

$$\begin{aligned} L_h &= C_t - C_{t+h} = N(d_1)\,(\hat{S}_t - S_{t+h}) \\ &= -N(d_1)\,S_t\,R_h \\ &\sim N[-N(d_1)\,S_t\,\mu h,\, N(d_1)^2\,S_t^2\,\sigma^2\,h], \end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_h &= N_{1-\alpha}\,N(d_1)\,S_t\,\sigma\sqrt{h} - N(d_1)\,S_t\,\mu h \\ &= N(d_1)\,S_t\,[N_{1-\alpha}\,\sigma\sqrt{h} - \mu h]. \end{aligned}$$

Block II

Aufgabe 3: (Vereinfachte aktienindexgebundene Lebensversicherung für ein Jahr)

Eine einjährige Versicherung sehe folgende Leistungs- bzw. Beitragszahlungsmodalitäten vor: Brutto-Einmalbeitrag B = DM 10 000,–, es wird eine Mindestrückzahlung des Brutto-Einmalbeitrags garantiert. Es wird eine Partizipation von 50% der Steigerung des DAX bezogen auf den maßgeblichen Beitrag in Höhe von DM 9 500,– als Überschussbeteiligung versprochen. Als Ablaufleistung wird also die Summe $\mathrm{Max}\left(10000,\left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)\cdot 0{,}5\cdot 9500+10000\right)$ garantiert. Dabei bezeichnet $x(1)$ den Stand des DAX nach Ablauf eines Jahres und $x(0)$ den Stand des DAX bei Abschluss des Vertrages. Das Versicherungsunternehmen hat folgende Anlagemöglichkeiten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses: Erzielbarer Jahreszins: 5%, der Stand des DAX beträgt 4 750 Punkte und ein europäischer Call mit einjähriger Laufzeit auf den DAX zum Ausübungspreis 4 750 kostet DM 152. Wie kann man eine kongruente Deckung des Gewinnversprechens darstellen?

Welcher Teilbetrag der Brutto-Prämie bleibt dem Aktuar zur Deckung einer Todesfallleistung und von Verwaltungskosten, wenn die kongruente Deckung des Gewinnversprechens mit dem erwähnten Call in der Vermögensanlage vorgenommen wird?

(Hinweis: Es wird vereinfachend angenommen, dass steuerliche Aspekte z. B. die Kapitalertragssteuer unberücksichtigt bleiben!)

Lösung Aufgabe 3:

Das Leistungsversprechen der vereinfachten aktienindexgebundenen Versicherung bei Ablauf kann folgendermaßen umgeformt werden

$$\mathrm{Max}\left(10000,\left(\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)\cdot 0{,}5\cdot 9500+10000\right) = 10000 + 10000\cdot 0{,}457\cdot \mathrm{Max}\left(0,\frac{x(1)}{x(0)}-1\right)$$

und beträgt daher $10000 + 10000\cdot\frac{0{,}457}{x(0)}\,(x(1)-x(0))^+$.

Das gegebene Leistungversprechen lässt sich also dann einhalten, wenn man den Betrag von $\frac{10000}{1{,}05} \approx 9523{,}81$ zu 5% anlegt und gleichzeitig eine Call-Option auf den DAX zum Ausübungspreis von $x(0) = 4\,750$ kauft, das kostet DM 152,–, so dass für die kongruente Geldanlage DM 9 675,81 benötigt werden. Von dem Bruttobeitrag in Höhe von DM 10 000,– verbleiben also DM 324,19 zur Deckung einer Todesfallleistung und der Kosten.

Aufgabe 4:

Man berechne mit Hilfe der Itô-Formel das stochastische Differential $d(w(t)^2 - t)$.

Lösung Aufgabe 4:

Auf die Funktion $g(x) := x^2$ kann man die Itô-Formel anwenden. Das liefert wegen $w(0) = 0$ dann:

$$w(t)^2 - 0 = 2\int_0^t w(s)\,dw(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,ds,$$

und damit folgt: $d(w(t)^2) = 2\,w(t)\,dw(t) + dt$.

Block III

Aufgabe 5 :

a) Beschreiben Sie die formale Struktur eines ARIMA(p, d, q)-Prozesses und erläutern Sie die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Modellidentifikation nach Box/Jenkins.

b) Stellen Sie die formale Struktur eines Vector Autoregressive Models (VAR) bzw. eines Vector Error Correction Models (ECM) dar. Inwieweit eignen sich diese Ansätze zur Konzeptionierung von stochastischen Investmentmodellen?

c) Erläutern Sie die Idee und die formale Struktur des Kointegrationskonzepts.

Lösung Aufgabe 5:

zu a)

- ARIMA (p, d, q)-Modellansatz:

$$\nabla^d Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \, [\nabla^d Y_{t-i} - \mu] + U_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \, U_{t-j}$$

∇^d	Rückwärts-Differenzen-Operator d-ter ($d = 0, 1, 2, \ldots$) Ordnung, $\nabla^d = (1 - B)^d$, wobei B den Backshift-/Lag-Operator $B^i Y_t := Y_{t-i}$ darstellt
Y_t	Prozessniveau in der Periode t
$\nabla^d Y_t$	d-te Differenz folgt einem stationären Prozess mit $E(\nabla^d Y_t) = \mu$
φ_i	(Unbekannte) AR-Prozessparameter ($i = 1, \ldots, p$)
θ_j	(Unbekannte) MA-Prozessparameter ($j = 1, \ldots, q$)
U_t	Stochastische Störterme

- Vorgehensweise bei der Modellidentifikation nach Box/Jenkins:
  1. Differenzenfilter bis Stationarität vorliegt
  2. Bestimmung der Lag-Ordnungen (p, q)
     - Box/Jenkins: Korrelogramm
       AR(p): PAC brechen nach p Lags ab, AC klingen aus
       MA(q): AC brechen nach q Lags ab, PAC klingen aus
     - Informationskriterien
  3. Parameterschätzung
  4. Diagnostic Checking / Residual Backtests
  5. Prognose

zu b)

- Vector Autoregressive Model, $VAR_K(p)$:

$$(Y_t)_{Kx1} = (\gamma)_{Kx1} + \sum_{i=1}^{p} (\varphi_i)_{KxK} \, (Y_{t-1})_{Kx1} + (U_t)_{Kx1}\,.$$

Der Vektorprozess entspricht formal dem univariaten AR (p)-Ansatz, nun aber

Y_t K-dimensionaler Vektor von stationären Modellvariablen mit $EY_t = \mu$

γ K-dimensionaler Konstantenvektor, $\gamma = \left(I - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \right) \mu$

φ_i (KxK)-dimensionale AR-Prozessparameter-Matrix ($i = 1, \dots, p$)

U_t K-dimensionaler Vektor stochastischer Störterme

Die U_t ($t = 1, 2, \dots$) sind untereinander unabhängig identisch verteilt mit Erwartungsvektor $EU_t = 0$ und einer kontemporal beliebigen (positiv definiten) Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathrm{Var}\,U_t = EU_t\,U_t' = \Sigma_U$. Außerdem sind die Zufallsvektoren U_t ($t = 1, 2, \dots$) von den verzögerten $\nabla^d Y_{t-i}$ ($i = 1, 2, \dots$) unabhängig.

- Die Vector Error Correction Model (VECM)-Repräsentation des VAR_K (p)-Modells lautet:

$$\nabla Y_t = \gamma + \Pi\, Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i\, \nabla Y_{t-i} + U_t$$

mit

$$\Pi := \sum_{i=1}^{p} \varphi_i - I_K; \quad \Gamma_i := -\sum_{j=i+1}^{p} \varphi_j \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

- Musterbeschreibende Ansätze gehen davon aus, dass ökonomische Prozesse in ihren Einzelheiten so vielschichtig sind, dass es problematisch ist, sie vollständig in einem Modell abzubilden. Stochastische Zeitreihenansätze haben seit der Feststellung, dass strukturelle Erklärungszusammenhänge zu Prognosezwecken nicht notwendig sind und einfache Zeitreihenmodelle oft bessere Prognosen als komplexe ökonomische Erklärungsmodelle liefern, zunehmend an Bedeutung gewonnen. Vor diesem Hintergrund eignen sich VAR-Modelle zur Abbildung kontemporaler und intertemporaler Prozesszusammenhänge insbesondere zur Konzeption strategischer stochastischer Investmentmodelle (wie etwa das Wilkie-Modell für Großbritannien eines darstellt). Die einzigen notwendigen ökonomischen Vorinformationen zur Schätzung von VAR-Modellen sind die zugrunde gelegte Zeitreihenauswahl und die zugehörigen Zeitreihenausschnitte sowie die Festlegung der Lag-Ordnung p.

zu c)

- Idee des Kointegrationskonzepts:

  Die traditionelle stochastische Zeitreihenanalyse bezieht sich auf stationäre Zeitreihen. Ist diese Voraussetzung im Rahmen von I(d)-Prozessen nicht erfüllt, werden die d-ten Differenzen der Reihen gebildet, so dass die üblichen statistischen Inferenzen – welche sich auf Prozesse ohne stochastische Trends beziehen – anwendbar sind. In der herkömmlichen multivariaten Analyse wird übersehen, dass auch Linearkombinationen von I(d)-Variablen existieren können, die selbst stationär bzw. zumindest I(d – b), b > 0, sind. In diesem Fall spricht man von Kointegration. Kointegrierte I(1)-Variablen besitzen einen gemeinsamen stochastischen Trend, so dass bestimmte Linearkombinationen einer stabilen Gesetzmäßigkeit folgen, die mit der Vorstellung einer langfristigen statistischen Gleichgewichtsbeziehung korrespondiert.

- Formale Struktur:

  Im Allgemeinen basieren Kointegrationsuntersuchungen auf der unter b) dargestellten VECM-Repräsentation. Bei einem VARIMA (p – 1, 1, 0)-Vektorprozess Y_t besitzt die Matrix Π – im Gegensatz zu einem VARIMA (p, 0, 0)-Prozess – nicht den vollen Rang r, $0 \leq r < K$, und die erste Differenz ∇Y_t folgt einem I(0)-Prozess. Falls Kointegration vorliegt, sind weniger als r Komponenten des Vektors Y_t stationär, so dass es mindestens eine Linearkombination von instationären Komponenten gibt, die stationär ist. Π lässt sich durch $\Pi := \alpha\beta'$ in die beiden (Kxr)-dimensionalen Koeffizientenmatrizen α und β zerlegen, welche jeweils den vollen Spaltenrang r besitzen. Die Spalten von β beschreiben verschiedene Kointegrationsvektoren β_j, so dass $\beta_j'\, Y_t$ ($j = 1, 2, \dots, r$) die verschiedenen (linear unabhängigen) Kointegrationsbeziehungen darstellen. Jedoch ist die Separation in α und β für $r > 1$ nicht eindeutig.

Aufgabe 6:

Gegeben sei eine Zwei-Länder-Welt mit einem Wertpapier 1 aus Land 1 (Heimatland des Investors) und einem Wertpapier 2 (Ausland). Es werden folgende Bezeichnungen für die betrachtete Investmentperiode getroffen:

R_i := lokale Rendite von Wertpapier i (i = 1, 2),

e_2 := Wechselkursrendite zwischen Land 2 und Land 1.

Gegeben seien weiterhin die Erwartungswerte:

$E(R_1) = 0{,}25$; $E(R_2) = 0{,}10$; $E(e_2) = 0{,}046$; $E(R_2 e_2) = 0{,}004$

und die Varianz-/Kovarianzmatrix:

	R_1	R_2	e_2	R_1e_2	R_2e_2
R_1	0,09	0,0045	0,0005	0,006	–0,005
R_2		0,0225	–0,0006	0,015	–0,0053
e_2			0,0064	–0,01	–0,0036
R_1e_2				0,003	0,012
R_2e_2					0,0001

Führen Sie die folgenden Berechnungen aus der Sicht des inländischen Investors durch (mindestens 4 Nachkommastellen) !

a) Berechnen Sie den Rendite-Erwartungswert und die Rendite-Standardabweichung eines Portfolios, das sich zu 60% aus Wertpapier 1 und zu 40% aus Wertpapier 2 zusammensetzt.

b) Bestimmen Sie die Struktur sowie Rendite-Erwartungswert und Rendite-Standardabweichung des varianzminimalen Portfolios.

c) Der betrachtete Investor beschließt, um sich gegen Wechselkursschwankungen abzusichern, den anfänglichen Investitionsbetrag für Wertpapier 2 in voller Höhe über Devisenforwards abzusichern. Unterstellen Sie hierzu, dass die Forwardprämie für die betrachtete Periode zwischen Land 2 und Land 1 $f_2 = 0{,}056$ beträgt. Berechnen Sie den Rendite-Erwartungswert und die Rendite-Standardabweichung des obigen Portfolios (60% Wertpapier 1 bzw. 40% Wertpapier 2) bei Anwendung dieser Wechselkurssicherungsstrategie.

d) Wieso kann die in c) vorgeschlagene Wechselkurssicherungsstrategie zu einer Verschlechterung der Menge der effizienten Portfolios im Vergleich zur Menge der effizienten ungesicherten Portfolios führen?

e) Was versteht man unter dem Zinsparitätentheorem?

Lösung Aufgabe 6:

a)

R_i^* := Internationale Rendite des Wertpapiers i = 1, 2 (aus Sicht des inländischen Investors)

$R_1^* = R_1$

$R_2^* = R_2 + e_2 + R_2 e_2$

$E(R_1^*) = 0{,}25$

$E(R_2^*) = E(R_2) + E(e_2) + E(R_2 e_2) = 0{,}1 + 0{,}046 + 0{,}004 = 0{,}15$

$\mathrm{Var}(R_1^*) = \mathrm{Var}(R_1) = 0.09$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R_2^*) &= \mathrm{Var}(R_2) + \mathrm{Var}(e_2) + \mathrm{Var}(R_2 e_2) + 2\cdot\mathrm{Cov}(R_2, e_2) + 2\cdot\mathrm{Cov}(R_2, R_2 e_2) + 2\cdot\mathrm{Cov}(e_2, R_2 e_2)\\ &= 0{,}0225 + 0{,}0064 + 0{,}0001 + 2\cdot(-0{,}0006) + 2\cdot(-0{,}0053) + 2\cdot(-0{,}0036) = 0{,}01\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(R_1^*, R_2^*) = \mathrm{Cov}(R_1, R_2) + \mathrm{Cov}(R_1, e_2) + \mathrm{Cov}(R_1, R_2 e_2) = 0{,}0045 + 0{,}0005 + (-0{,}005) = 0.$

Berechnung des gesuchten Portfolios (60% Wertpapier 1, 40% Wertpapier 2):

$E(R_P) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}15 = 0{,}21$

$Var(R_P) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}09 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}034 \;\Rightarrow\; \sigma(R_P) \approx 0{,}1844$

b)

Bestimmung des varianzminimalen Portfolios (MVP):

$$\begin{aligned} Var(R_P) &= x^2\, Var(R_1^*) + 2x\,(1-x)\, Cov(R_1^*, R_2^*) + (1-x)^2\, Var(R_2^*) \\ &= 0{,}09\,x^2 + 0{,}01\,(1-x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dVar(R_P)/dx &= 0 \\ &\Leftrightarrow\; 2 \cdot 0{,}09\,x - 2 \cdot 0{,}01\,(1-x) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 0{,}2\,x - 0{,}02 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = 0{,}1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Struktur des MVP: $(x_1 = 0{,}1;\; x_2 = 0{,}9)$

$R_{VMP} = 0{,}1\, R_1 + 0{,}9\, R_2$

$\Rightarrow\quad E(R_{VMP}) = 0{,}1\, E(R_1) + 0{,}9\, E(R_2) = 0{,}025 + 0{,}135 = 0{,}16$

$Var(R_{VMP}) = (0{,}1)^2\, Var(R_1) + (0{,}9)^2\, Var(R_2) = 0{,}01 \cdot 0{,}09 + 0{,}81 \cdot 0{,}01 = 0{,}009$

$\sigma(R_{VMP}) \approx 0{,}0949$

c)

R_i^h := Internationale Rendite des Wertpapiers i = 1, 2 aus Sicht des inländischen Investors nach Sicherung des *ursprünglichen* Investitionsbetrags

$R_1^h = R_1$

$R_2^h = R_2 + f_2 + R_2 e_2$

$E(R_1^h) = 0{,}25$

$E(R_2^h) = E(R_2) + f_2 + E(R_2 e_2) = 0{,}1 + 0{,}056 + 0{,}004 = 0{,}16$

$Var(R_1^h) = Var(R_1) = 0{,}09$

$Var(R_2^h) = Var(R_2) + Var(R_2 e_2) + 2 \cdot Cov(R_2, R_2 e_2) = 0{,}0225 + 0{,}0001 + 2 \cdot (-0{,}0053) = 0{,}012$

$Cov(R_1^h, R_2^h) = Cov(R_1, R_2) + Cov(R_1, R_2 e_2) = 0{,}0045 + (-0{,}005) = -0{,}0005.$

Berechnung des gesuchten Portfolios (60% Wertpapier 1, 40% Wertpapier 2):

$R_P^h = 0{,}6 \cdot R_1^h + 0{,}4\, R_2^h$

$E(R_P^h) = 0{,}6 * 0{,}25 + 0{,}4 * 0{,}16 = 0{,}214$

$$\begin{aligned} Var(R_P^h) &= 0{,}6^2 \cdot Var(R_1^h) + 0{,}4^2 \cdot Var(R_2^h) + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot Cov(R_1^h, R_2^h) \\ &= 0{,}6^2 \cdot 0{,}09 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}012 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}0005) \\ &= 0{,}03408 \end{aligned}$$

$\sigma(R_P^h) \approx 0{,}1846.$

d) Da mitunter negative Kovarianzterme mit der Fremdwährungsrendite e_2 aus der Varianzgleichung für das gesicherte Portfolio herausfallen, können für ein gegebenes Renditeniveau Risikoreduktionspotentiale nicht vollständig genutzt werden. Da die erwartete Wechselkursrendite positiv ist, können für ein gegebenes Risikoniveau Renditepotentiale nicht vollständig genutzt werden.

e) Das Zinsparitätentheorem beschreibt den Zusammenhang zwischen der Forwardprämie zwischen zwei Währungen sowie dem Verhältnis der Zinssätze für risikolose Anlagen zwischen den jeweils lokalen Finanzmärkten. Es beruht auf Überlegungen der No-Arbitrage. Sei r_I der risikolose Zins auf dem inländischen und r_A auf dem ausländischen Markt (jeweils bzgl. einer bestimmten Laufzeit), dann ist die Forwardprämie f durch das Verhältnis der Zinssätze im Inland zum jeweiligen Ausland wie folgt bestimmt: $1 + f = (1 + r_I)/(1 + r_A)$.