DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Oktober 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 13 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie es nach Möglichkeit, die Lösungen der einzelnen Aufgabenteile unzusammenhängend auf verschiedene Seiten zu streuen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Modellierung [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Versicherungstechnische Risiken Nicht-Leben) [23 Punkte]

Der Sachversicherer „Haus & Hof“ verfügt über ein genehmigtes internes Unternehmensmodell unter Solvency II. Aus dem Lauf des internen Modells per 31.12.2023 liegen die folgenden fünf Simulationen aller maßgeblichen Größen für das Prämien- und Reserverisiko des kommenden Kalenderjahres 2024 vor. Effekte aus Diskontierung und Prämienrückstellung sind bei „Haus & Hof“ vernachlässigbar und werden daher im Modell nicht berücksichtigt. Alle Ergebnisgrößen sind jeweils Netto nach Rückversicherung und in der Einheit [Mio. €] angegeben:

Modellgröße	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
Eingehende Best-Estimate Reserve für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
Verdiente Prämie Anfalljahr 2024	2.400	2.400	2.400	2.400	2.400
Kosten Anfalljahr 2024	500	500	500	500	500
Schadenzahlungen in 2024					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2024	900	1.100	500	400	600
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024	2.000	2.200	1.800	2.400	1.600
Schadenzahlungen nach 2024					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2024	1.800	2.200	1.000	800	1.200
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024	2.800	2.600	3.000	3.200	3.400
geschätzte Schadenzahlungen nach 2024 (Schätzung per 31.12.2024)					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2024	1.600	1.800	1.200	1.100	.1.300
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024	2.900	2.800	3.000	3.100	3.200

Aufgaben:

(a) *[5 Punkte]* Wodurch unterscheiden sich die einjährige und die ultimative Risikosicht in der Versicherungstechnik? Nennen Sie jeweils zwei Einsatzbereiche für Ergebnisse aus der einjährigen und der ultimativen Risikosicht.

(b) *[12 Punkte]* Bestimmen Sie aus den vorliegenden Simulationen die empirischen Verteilungen der relevanten Ergebnisgrößen zur Messung des Prämien- und Reserverisikos in der ultimativen und der einjährigen Risikosicht.

(c) *[4+2=6 Punkte]* Auswertung des versicherungstechnischen Ergebnisses

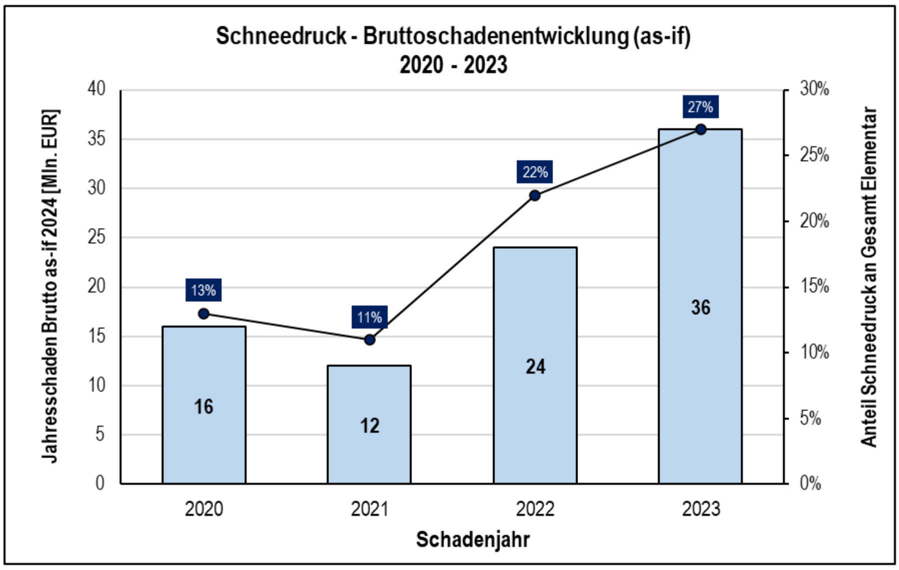
   (i) *[4 Punkte]* Berechnen Sie anhand der Resultate aus Aufgabenteil (b) die empirische Verteilung des versicherungstechnischen Ergebnisses für das Kalenderjahr 2024.

   (ii) *[2 Punkte]* In welchen Simulationen ergibt sich ein negatives versicherungstechnisches Ergebnis? Wie hoch ist der mittlere Verlust in diesen Simulationen?

Aufgabe 2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden) [20 Punkte]

Basisinformationen:

- Das Prämienrisiko im genehmigten internen Modell von „Haus & Hof“ umfasst auch das Risiko aus Katastrophenschäden.
- Derzeit werden im Katastrophenrisiko lediglich die Naturgefahren Sturm und Hagel explizit modelliert, und zwar mittels exposure-basierter meteorologischer Modelle. Durch eine Auswertung zu niederschlagsreichen Wetterlagen im Alpenraum während des Winterhalbjahres aufgeschreckt, erteilt Ihnen der Vorstand von „Haus & Hof“ den Arbeitsauftrag, gemeinsam mit den Aktuaren eine explizite Modellierung der Gefahr „Schneedruck“ im internen Unternehmensmodell zu prüfen.
- Die betreffende Sonderauswertung enthielt folgende Darstellung der Bruttojahresschäden durch „Schneedruck“ nach Schadenjahr (inkl. Exposure-Adjustierung und Indexierung auf das Schadenjahr 2024):



- „Haus & Hof“ verfügt zur Absicherung gegen Naturgefahren über einen Kumulschadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag mit Priorität 30 Mio. € und Haftung 120 Mio. €. Dieser Vertrag deckt gleichermaßen Sturm-, Hagel- als auch Schneedruckschäden ab.
- Mit dem Rückversicherer wurde vereinbart, dass der Ereigniszeitraum für Schneedruckschäden das komplette Kalenderjahr umfasst und damit das gesamte Schadenaufkommen eines Kalenderjahres als Ereignisschaden gewertet wird.

Aufgaben:

(a) *[4 Punkte]* Setzen Sie sich qualitativ mit dem Modellierungsansatz und der *Notwendigkeit einer expliziten Modellierung* der Gefahr *Schneedruck* im internen Modell von „Haus & Hof“ auseinander. Nennen Sie zwei Punkte, die aus der Sicht des Unternehmens für eine explizite Modellierung sprechen.

(b) *[4 Punkte]* Nennen Sie zwei mögliche Auswirkungen, die eine explizite Modellierung der Gefahr *Schneedruck* auf das interne Unternehmensmodell und seine Komponenten haben könnte.

(c) *[12 Punkte]* Zum Zwecke einer *Materialitätsabschätzung des Brutto- und Nettorisikos* aus Schneedruckschäden führen die Aktuare von „Haus & Hof“ eine *mathematisch-statistische Modellierung* durch. Hierzu wird unterstellt, dass der aggregierte Jahresschaden einer Weibullverteilung mit den Parametern $\alpha = 0{,}85$ und $\beta = 25{,}00$ genügt. Berechnen Sie die Werte der *AEP-Kurve* zu den Wiederkehrperioden 2, 20 und 200 gemäß mathematisch-statistischer Modellierung, jeweils vor und nach Anwendung der Rückversicherung. Warum ist eine Betrachtung der *AEP-Kurve* ausreichend?

Hinweis: Eine Weibull(α, β)-verteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}, x \geq 0.$$

Aufgabe 3 (Resimulation von Katastrophenschäden) [27 Punkte]

Den Modellierungsaktuaren von „Haus & Hof“ liegt die folgende Event Loss Table (ELT) im Outputformat des Anbieters RMS vor. Die ELT wurde mit einem externen meteorologischen Modell für Sturmrisiken in Deutschland generiert. Monetäre Größen sind Brutto vor Rückversicherung und in der Einheit [Mio. €] angegeben.

EVENT ID	RATE	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE
4711	2,5%	1.000	135	65	100.000
4712	50,0%	100	30	20	10.000
4713	25,0%	200	50	50	25.000

Basisinformationen:

- Die Resimulation der ELT im internen Modell von „Haus & Hof“ umfasst fünf Simulationen. In einem vorgelagerten Simulationssschritt haben die Modellierungsaktuare bereits die Anzahl an Ereigniseintritten pro Simulationspfad bestimmt und den Einzelereignissen entsprechende EVENT IDs zugeordnet:

Simulation M	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	0		
2	2	4712	4713
3	0		
4	2	4711	4712
5	1	4713	

- Zusätzlich liegen zu den einzelnen Ereignissen die folgenden Realisierungen von $\Phi^{-1}(U)$ vor, die aus der Simulation einer auf dem Einheitsintervall $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U und der anschließenden Transformation mittels Φ^{-1}, der Inversen der Gauss'schen Phi-Funktion Φ, hervorgegangen sind:

Simulation M	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	0		
2	2	0,52	1,75
3	0		
4	2	-1,23	-0,10
5	1	-0,50	

- Für die Resimulation im internen Modell unterstellen die Aktuare den Schadengraden pro Ereignis jeweils eine Normalverteilung.

Aufgaben:

(a) *[4 Punkte]* Welche Inputs (Daten, Parameter, etc...) benötigen Unternehmen im Allgemeinen, um die vorliegende ELT mithilfe eines exposure-basierten Modells erzeugen zu können? Welche Inputs werden wiederum standardmäßig durch den externen Modellanbieter vorgegeben und sind im Modell bereits hinterlegt?

(b) *[3 Punkte]* Ist die Wahl der Normalverteilung für den Schadengrad konsistent zum statistischen Modell, das den ELTs des Anbieters RMS originär zugrundeliegt? Was sind mögliche Nachteile der getroffenen Verteilungswahl?

(c) *[7 Punkte]* Berechnen Sie den *AAL* (Annual Aggregate Loss) und die Varianz des Jahresgesamtschadens anhand der vorliegenden ELT, d.h. ihrer Parameter und der zugehörigen Modellannahmen des Anbieters RMS, *analytisch*. Hat die Wahl der Verteilung für den Schadengrad einen Einfluss auf die beiden Größen?

(d) *[9+2+2=13 Punkte]* Ermittlung des *AAL* anhand von Simulationen

(i) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der vorliegenden Simulationen und den Informationen aus der ELT die *empirische Verteilung* des maximalen Ereignisschadens und des Jahresschadens. Berechnen Sie den *AAL* als mittleren Jahresschaden aus den Simulationen. Runden Sie bitte alle Verteilungsparameter auf zwei Nachkommastellen und rechnen Sie bei momentären Größen bitte durchgehend mit vollen Mio. €.

(ii) *[2 Punkte]* Vergleichen Sie das Ergebnis aus (i) mit dem *AAL*, der in Aufgabenteil (c) analytisch ermittelt worden ist. Was fällt auf?
Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil (c) nicht gelöst haben, gehen Sie bitte von einem analytisch ermittelten AAL von 125 Mio. € aus.

(iii) *[2 Punkte]* Weshalb kann es allgemein nützlich sein, Simulationsergebnissen aus dem internen Modell die zugehörigen analytisch ermittelten Kenngrössen gegenüberzustellen?

Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Reserveprozess und Nachlauf) [35 Punkte]

Aufgrund eines personellen Wechsels übernehmen Sie für ein Geschäftssegment erstmals die Durchführung des Reservierungsprozesses. Ihr Vorgänger hat Ihnen noch mitgeteilt, dass in diesem Geschäftssegment der Tail sehr wichtig sei.

(a) *[2 Punkte]* Begründen Sie, warum Ihnen der Reservebericht der letzten Prozessdurchführung als eine wichtige Grundlage für Ihre Arbeit dienen kann.

(b) *[3 Punkte]* Erklären Sie den Begriff Tail (auch Nachlauf genannt) und definieren Sie den Begriff der Tailfaktoren.

Aus den Rechenergebnissen des Vorjahres schließen Sie, dass ein erheblicher Tail angesetzt wurde. In den vorhandenen Unterlagen finden Sie zu diesem Thema nichts.

(c) *[2 Punkte]* Geben Sie zwei Aspekte des Reservierungsprozesses an, die anscheinend im Vorjahr nicht beachtet wurden und erläutern Sie Ihre Antwort kurz.

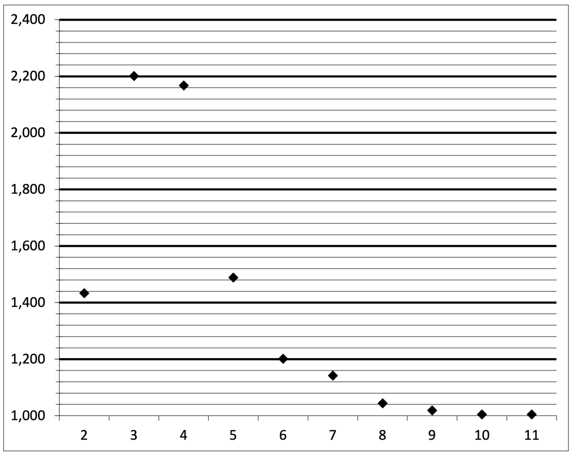
(d) *[6 Punkte]* Benennen Sie drei Informationsquellen, die Sie hinzuziehen sollten, damit Sie in der Lage sind, das Thema Nachlauf bei der Reservebewertung des Geschäftssegments sinnvoll zu behandeln. Geben Sie jeweils an, welche Informationen Sie von der jeweiligen Informationsquelle erwarten.

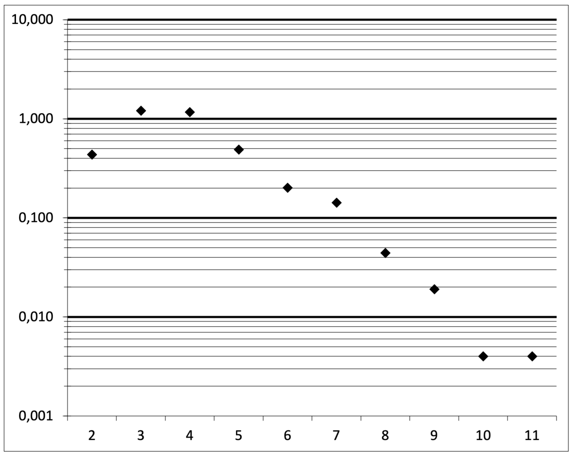
(e) *[8 Punkte]* Beschreiben Sie die vier Schritte, die für die Schätzung der Tailfaktoren notwendig sind.

Berechnungen nach dem Chain-Ladder Modell auf Basis des Zahlungsdreiecks des Geschäftssegments liefern folgende Schätzungen $\widehat{f}_k$ für die Abwicklungsfaktoren und deren Standardfehler $\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_k \,|\, \mathcal{B}_{k-1})}$ (in der Tabelle kurz mit s.e. bezeichnet) in den vorhandenen Abwicklungsjahren $k = 2, \ldots, 11$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\widehat{f}_k$	1,433	2,201	2,167	1,488	1,201	1,142	1,044	1,019	1,004	1,004
s.e.	0,162	0,233	0,198	0,143	0,039	0,032	0,042	0,021	0,001	0,019

Die linke der beiden folgenden Grafiken zeigt die geschätzten Abwicklungsfaktoren aufgetragen gegen die Abwicklungsjahre. Die rechte Grafik zeigt die um 1 verminderten Abwicklungsfaktoren, aufgetragen gegen die Abwicklungsjahre in logarithmischer Skalierung.





Als Abwicklungsfunktion ziehen Sie die Exponentialfunktion $\phi(k) = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot k)$ mit $a, b > 0$ in Betracht.

(f) *[5 Punkte]* Welche der beiden Grafiken eignet sich besser dafür, zu überprüfen, ob die Verwendung der Exponentialfunktion im vorliegenden Fall sinnvoll ist? Erläutern Sie zwei Gründe für Ihre Antwort.

Sie beabsichtigen, die Exponentialfunktion $\phi(k)$ an die geschätzten Abwicklungsfaktoren der Abwicklungsjahre $k = 2, \ldots, 11$ anzupassen und bei der Approximation die Gewichte w_k umgekehrt proportional zur geschätzten Varianz $\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_k \,|\, \mathcal{B}_{k-1})$ zu wählen. (Siehe Tabelle oben.)

(g) *[6 Punkte]* Erläutern Sie zwei Gründe, warum dieses Vorgehen problematisch ist und machen Sie jeweils einen Lösungsvorschlag.

(h) *[3 Punkte]* Wäre der von Ihnen geschätzte Nachlauf adäquat, wenn die Zahlungen im Geschäftssegment hauptsächlich für schwere Personenschäden geleistet würden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [24 Punkte]

(a) *[12 Punkte]* Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (H), welche sich auf eines oder mehrere der Rechnungslegungssysteme IFRS17, HGB oder Solvency II beziehen. Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Stellen Sie jede falsche Aussage in naheliegender Weise richtig.

(A) Versicherungsverträge sind unter IFRS17 Verträge, die signifikantes Versicherungsrisiko übertragen. Dabei wird das Versicherungsrisiko vom Finanzrisiko abgegrenzt.

(B) Unter HGB ist eine Diskontierung nur für Rentenverpflichtungen und Rückstellungen für unbekannte Spätschäden vorgesehen.

(C) Die Risikomarge unter Solvency II dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht. Es gibt keine Vorgabe bei den Berechnungsverfahren, aber eine Angabe von geforderten Eigenschaften.

(D) Die Schadenregulierungskosten (SRK) werden bei allen drei Rechnungslegungssystemen IFRS17, HGB und Solvency II in die jeweiligen versicherungstechnischen Rückstellungen einbezogen.

(E) Unter IFRS17 dient die Servicemarge (Contractual service Margin, CSM) zur Realisierung von Gewinnen bei Vertragsabschluss. Die Drohverlustrückstellung (Loss Component, LC) sorgt dafür, dass drohende Verluste bei Eintritt realisiert werden.

(F) Unter HGB gibt es die Schwankungsrückstellung als versicherungstechnische Rückstellung. Sie dient der Stabilisierung des Ergebnisses durch Ausgleich der Schwankungen im Schadenverlauf über die Geschäftsjahre hinweg und hat keine Entsprechung unter IFRS17 oder Solvency II.

(G) Unter Solvency II sind die einforderbaren Beträge aus Rückversicherungsverträgen und von Zweckgesellschaften getrennt nach Prämien- und Schadenrückstellungen zu berechnen.

(H) Für einen proportionalen Rückversicherungsvertrag ist der resultierende Zahlungsstrom, der in den Prämienrückstellungen des Versicherungsunternehmens zum Ansatz kommt, gleich dem Zahlungsstrom, der in den Prämienrückstellungen des Rückversicherers zum Ansatz kommt.

(b) *[6 Punkte]* Erklären Sie die Begriffe Schadenrückstellung und Prämienrückstellung unter Solvency II.

(c) *[6 Punkte]* Geben Sie ein vereinfachtes Berechnungsverfahren zur Schätzung der (undiskontierten) Prämienrückstellung unter Solvency II auf Basis von Prämienvolumina und Quoten an. Definieren Sie die verwendeten Bezeichnungen.

Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [29 Punkte]

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass der vorgegebene Versicherungszweig aus dem Bereich der Schaden- und Unfallversicherung die Voraussetzungen zur Bildung einer Schwankungsrückstellung unter HGB erfüllt und nicht aus dem Bereich der Hagel-, der Kredit- und Kautions-, sowie der Vertrauensschadenversicherung stammt. Nehmen Sie außerdem vereinfachend an, dass kein Sicherheitszuschlag existiert, so dass die Regelungen zur Verminderung von Sollbetrag und Überschaden nicht greifen.

Die folgende Tabelle zeigt für die Geschäftsjahre $i = 1, \ldots, 15$ des Beobachtungszeitraums die verdienten Beiträge P_i, die zugehörigen Schadenquoten q_i sowie deren Quadrate q_i^2 (Geldbeträge sind in Mio. € angegeben). Zur Vereinfachung von Rechnungen sind in der letzten Zeile noch die jeweiligen Summen angegeben.

Geschäftsjahr i	P_i	q_i	q_i^2
1	73	58,9%	0,347
2	75	61,3%	0,376
3	74	62,2%	0,386
4	73	113,7%	1,293
5	76	56,6%	0,320
6	79	59,5%	0,354
7	82	62,2%	0,387
8	86	57,0%	0,325
9	84	129,8%	1,684
10	85	62,4%	0,389
11	89	57,3%	0,328
12	93	55,9%	0,313
13	96	63,5%	0,404
14	99	62,6%	0,392
15	98	123,5%	1,524
Summe $\sum_{i=1}^{15}$	1262	1086,3%	8,822

Im Bilanzjahr $i = 16$ betragen die verdienten Beiträge $P_{16} = 100$ und die Schadenquote $q_{16} = 58{,}9\%$. Die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war $SR_{15} = 52{,}5$.

(a) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$ des Beobachtungszeitraums und die zugehörige Standardabweichung $\bar{\sigma}$.

Hinweis: Falls Ihnen die Berechnung der Standardabweichung nicht gelingt, so rechnen Sie mit dem (falschen) Ersatzergebnis $\bar{\sigma} = 25{,}0\%$ weiter.

(b) *[6 Punkte]* Berechnen Sie den Sollbetrag SB_{16} und die Schwankungsrückstellung SR_{16} des Bilanzjahres 16 sowie die resultierende Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS}.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass sich in den zukünftigen Geschäftsjahren $i = 17, 18, ...$ die verdienten Beiträge sowie die wesentlichen Eigenschaften des Versicherungsbestandes nicht ändern.

(c) *[6 Punkte]* Der Vorstand Ihres Unternehmens möchte wissen, mit welcher Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS} er im Normalfall rechnen muss. Beantworten Sie die Frage und berechnen Sie, für welche Bandbreite von Schadenquoten q_{17} der Normalfall gilt.

Zur Verbesserung des Jahresergebnisses zieht der Vorstand den Kauf von Rückversicherung im Geschäftsjahr 17 und den darauf folgenden Jahren in Betracht.

(d) *[8 Punkte]* Wie würde sich eine Quote von 50% auf die Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS} im Falle eines guten Jahres ($q_{17} \approx 60\%$) und im Falle eines schlechten Jahres ($q_{17} \approx 120\%$) auswirken? Wie wären die längerfristigen Auswirkungen auf die durchschnittliche Schadenquote, die Standardabweichung und den Sollbetrag?

(e) *[6 Punkte]* Wie würde sich ein Stop-Loss bei einer Schadenquote von 100% zum Preis von 10 Mio. € auf die Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS} auswirken? Welche längerfristigen Auswirkungen erwarten Sie auf Basis des gegebenen Beobachtungszeitraums auf die durchschnittliche Schadenquote, die Standardabweichung und den Sollbetrag? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Hinweis: Die Auswirkung des Stop-Loss auf das Geschäftsjahr 17 sind zu berechnen. Für die längerfristigen Aussagen genügen qualitative Aussagen.

Aufgabe 7 (Incremental-Loss-Ratio Modell und Inflation) [22 Punkte]

Gehen Sie davon aus, dass die Zahlungszuwächse $S_{i,k}$ für die Anfalljahre $i = 1, \ldots, n$ und die Abwicklungsjahre $k = 1, \ldots, u$ die Voraussetzungen des Incremental-Loss-Ratio Modells (ILR) mit den Volumina $v_1, \ldots, v_n$ erfüllen. Mit $C_{i,k} = S_{i,1} + \cdots + S_{i,k}$ seinen die zugehörigen kumulativen Stände bezeichnet.

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie die Modellannahmen des ILR-Modells an. Verwenden Sie die üblichen Bezeichnungen m_k und s_k^2.

Weiter sei eine Indexreihe $I_1, I_2, \ldots, I_{n+u-1}$ gegeben, welche auf den Zeitpunkt 1 normiert ist, das heißt, es sei $I_1 = 1$. Mit $r_j = \frac{I_j}{I_{j-1}}$ seinen die Quotienten aufeinanderfolgender Indexwerte bezeichnet. Damit sei

$$\widetilde{v}_i = I_i \cdot v_i, \qquad \widetilde{S}_{i,k} = I_{i+k-1} \cdot S_{i,k} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{C}_{i,k} = \widetilde{S}_{i,1} + \cdots + \widetilde{S}_{i,k}.$$

(b) *[3 Punkte]* Interpretieren Sie das resultierende Modell (ILR-I-Modell) für $\widetilde{v}_i$ und $\widetilde{S}_{i,k}$ bzw. $\widetilde{C}_{i,k}$ im Zusammenhang mit dem Thema Inflation. Was ist die Bedeutung der Größen $r_j - 1$?

(c) *[3 Punkte]* Nehmen Sie in dieser Teilaufgabe an, dass es sich bei der Indexreihe I_j um den Verbraucherpreisindex handelt. Erläutern Sie die Inflationsannahme des ILR-I-Modells in diesem Fall und beschreiben Sie anhand zweier konkreter Beispiele, warum diese Annahme in der Praxis oft nicht angebracht ist.

(d) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass im Fall konstanter Inflation $r_2 = r_3 = \cdots = r_{n+u-1}$ die Zuwächse $\widetilde{S}_{i,k}$ mit den Volumina $\widetilde{v}_i$ die Voraussetzungen (ILR1) (Unabhängigkeit) und (ILR2) (Erwartungswert) des ILR-Modells erfüllen, nicht jedoch (ILR3) (Varianz). Geben Sie eine explizite Formel für die entsprechenden Parameter $\widetilde{m}_k$ an.

(e) *[5 Punkte]* Gehen Sie vereinfachend von $u = n$ aus. Zeigen Sie, dass im Falle eines Anstiegs des Inflationsniveaus

$$r_2 = \cdots = r_n < r_{n+1} = \cdots = r_{2n-1}$$

die Anwendung des ILR-Verfahrens auf die Zuwächse $\widetilde{S}_{i,k}$ mit den Volumina $\widetilde{v}_i$ die Endschadenstände im Schnitt unterschätzen würde, indem Sie zeigen, dass

$$\mathrm{E}\big((\widehat{\widetilde{m}}_{n-i+2} + \cdots + \widehat{\widetilde{m}}_n) \cdot \widetilde{v}_i\big) < \mathrm{E}\big(\widetilde{S}_{i,n-i+2} + \cdots + \widetilde{S}_{i,n}\big)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\widehat{\widetilde{m}}_k$ den Zuwachsquotenschätzer im ILR-Verfahren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Versicherungstechnische Risiken Nicht-Leben) [23 Punkte]

(a) *[5 Punkte]* In der *einjährigen Risikosicht* wird die Unsicherheit über den Eintritt und die Abwicklung von Schäden, d.h. die Volatität der zukünftigen Schadenzahlungen für neue Schäden (Prämienrisiko) und bereits angefallene Schäden (Reserverisiko) und ihre Auswirkungen auf die ökonomischen Eigenmittel, nur insoweit einbezogen, wie sie das nächste Kalenderjahr betrifft („Kalenderjahressicht“), während in der *ultimativen Risikosicht* die Volatilität der Zahlungen bis zur Endabwicklung der entsprechenden Anfalljahre, d.h. über den kompletten Abwicklungszeitraum, einbezogen wird („Anfalljahressicht“).

Die *einjährige Risikosicht* ist die maßgebliche Risikosicht zur Bestimmung der Solvenzkapitalanforderung unter Solvency II, dementsprechend sind mögliche Einsatzbereiche:

- Messung des Risikokapitalbedarfs (Solvenzkapitalanforderung bzw. Gesamtsolvabilitätsbedarf für interne ökonomische Sicht)
- Bestimmung der Risikokapitalkosten (welche sich wiederum zur Ermittlung der risikoadjustierten Rendite im Rahmen einer wert- und risikoorientierter Unternehmenssteuerung oder Zuschlägen für die Tarifierung verwenden lassen)
- Inputgrößen für Limitsysteme, insbesondere Risikotragfähigkeitslimite für die versicherungstechnischen Risiken

Als mögliche Einsatzbereiche für die *ultimative Risikosicht* lassen sich nennen:

- Beurteilung der Wirkungsweise / Effektivität der Rückversicherung
- Beurteilung der Auskömmlichkeit der Schadenrückstellungen unter HGB durch Gegenüberstellung mit den Reserverisikoverteilungen
- Beurteilung der Auskömmlichkeit der Prämien, Profitabilität des Geschäfts anhand von Kennzahlen aus der Prämienrisikoverteilung (wie Erwartungswerte sowie Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten pro Einzelsegment und auf Unternehmensebene)
- Zuschläge in der Tarifierung (Schwankungszuschlag, Großschaden- oder NatCat-Loading)

(b) *[12 Punkte]* Mit den Bezeichnungen

Größe	Bezeichnung
P_{2024}	Verdiente Prämie des Anfalljahres 2024
E_{2024}	Kosten des Anfalljahres 2024
$S_{PY,2024}$	Zahlungen im Kalenderjahr 2024 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024
$S_{PY,>2024}$	Zahlungen nach 2024 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024
$\hat{S}^{(2024)}_{PY,>2024}$	Per Ende 2024 geschätzte Zahlungen nach 2024 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2024
$S_{2024,2024}$	Zahlungen im Kalenderjahr 2024 für Neuschäden des Anfalljahres 2024
$S_{2024,>2024}$	Zahlungen nach 2024 für Neuschäden des Anfalljahres 2024
$\hat{S}^{(2024)}_{2024,>2024}$	Per Ende 2024 geschätzte Zahlungen nach 2024 für Neuschäden des Anfalljahres 2024

lassen sich für die beiden Risikohorizonte die für das Prämien- und Reserverisiko maßgeblichen Größen definieren und berechnen.

Das *ultimative Anfalljahresergebnis T_{2024} des Jahres 2024* als Gewinnfunktion zur Messung des *ultimativen Prämienrisikos* besitzt die Darstellung:

$$T_{2024} = P_{2024} - E_{2024} - U_{2024}$$

mit

$$U_{2024} = S_{2024,2024} + S_{2024,>2024}$$

als *Ultimateschaden des Anfalljahres 2024*.

Das per Ende 2024 *geschätzte Anfalljahresergebnis $\hat{T}^{(2024)}_{2024}$ des Anfalljahres 2024* als Gewinnfunktion zur Messung des *einjährigen Prämienrisikos* besitzt wiederum die Darstellung

$$\hat{T}^{(2024)}_{2024} = P_{2024} - E_{2024} - \hat{U}^{(2024)}_{2024}$$

mit

$$\hat{U}^{(2024)}_{2024} = S_{2024,2024} + \hat{S}^{(2024)}_{2024,>2024}$$

als *Ultimateschätzung des Anfalljahres 2024 per Ende 2024*.

Das *ultimative Reserverisiko* per Ende 2023 ermittelt sich anhand der Abweichung der zukünftigen Schadenzahlungen für Vorjahresschäden vom besten Schätzwert der Schadenrückstellungen per Ende 2024 (Verlustfunktion):

$$R_{PY}^{(2023)} - \hat{R}_{PY}^{(2023)}$$

mit *Bedarfsreserve*

$$R_{PY}^{(2023)} = S_{PY,2024} + S_{PY,>2024}$$

und *Reserveschätzer*

$$\hat{R}_{PY}^{(2023)} = 5.000.$$

nach Aufgabenstellung.

Das *einjährige Reserverisiko* bemisst sich anhand des negativen *ökonomischen Abwicklungsergebnisses* $-\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2023\to 2024)}$ des Kalenderjahres 2024 (Verlustfunktion) mit

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2023\to 2024)} = \hat{R}_{PY}^{(2023)} - S_{PY,2024} - \hat{S}_{PY,>2024}^{(2024)}$$

Größe	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
T_{2024}	-800	-1.400	400	700	100
$\hat{T}_{2024}^{(2024)}$	-600	-1.000	200	400	0
$R_{PY}^{(2023)} - \hat{R}_{PY}^{(2023)}$	-200	-200	-200	600	0
$-\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2023\to 2024)}$	-100	0	-200	500	-200

(c) *[4+2=6 Punkte]* Auswertung des versicherungstechnischen Ergebnisses

(i) *[4 Punkte]* Das *einjährige versicherungstechnische Ergebnis* $\widehat{UW}_{2024}$ des Kalenderjahres 2024 ergibt sich aus der Summe des geschätzten Anfalljahresergebnisses $\hat{T}_{2024}^{(2024)}$ für das Anfalljahr 2024 per Ende 2024 und dem ökonomischen Abwicklungsergebnis $\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2023\to 2024)}$ im Kalenderjahr 2024.

$$\widehat{UW}_{2024} = \hat{T}_{2024}^{(2024)} + \widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2023\to 2024)}$$

Die Simulationen der beiden Größen werden pfadweise addiert.

Größe	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
$\widehat{UW}_{2024}$	-500	-1.000	400	-100	200

(ii) *[2 Punkte]* In drei der fünf Simulationen (1, 2 und 4) ergibt sich ein negatives versicherungstechnisches Ergebnis. Der mittlere Verlust in diesen Simulationen beträgt

$$\frac{1}{3} \cdot (500 + 1.000 + 100) = \frac{1.600}{3} \approx 533 \text{ [Mio. €]}.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden) [20 Punkte]

(a) *[4 Punkte]* Qualitative Überlegungen zum Modellierungsansatz für die Gefahr „Schneedruck“ sollten auf Relevanz / Wesentlichkeit der Gefahr, Modellierbarkeit und Nutzen für die Unternehmenssteuerung eingehen, aber auch mögliche Aufwände und Herausforderungen einbeziehen:

- Bei „Schneedruck“ handelt es sich um ein Wetterphänomen, das prinzipiell eine große Fläche und damit eine Vielzahl versicherter Risiken = Gebäude betreffen kann. Dieses Kumulpotential kann sich in einer erhöhten Anzahl an Sachschäden (abhängig von Intensität und Dauer) manifestieren.

- Die Naturgefahr „Schneedruck“ wird im NatCat-Katastrophenschaden-Modul der Solvency II-Standardformel nicht abgebildet (für deutsche Risiken sind nur Sturm, Hagel, Überschwemmung und Erdbeben relevant). Da sich die Kalibrierung der Standardformel am durchschnittlichen europäischen Versicherer orientiert, lässt dies aber nur eingeschränkt Rückschlüsse auf einen Zweispartenversicherer wie „Haus & Hof“ zu. Daraus sollte also keine Unwesentlichkeit der Gefahr für das Unternehmen „Haus & Hof“ abgeleitet werden.

- Es sind keine externen exposure-basierten Modelle zur Modellierung von „Schneedruck“ auf dem Markt verfügbar. Somit würde nur ein mathematisch-statistischer Ansatz in Frage kommen. Die Schadensysteme/-daten des Versicherers „Haus & Hof“ geben offensichtlich eine Differenzierung und Separierung der Schneedruck-induzierten Schäden her, so dass prinzipiell eine Schadenhistorie als Ausgangspunkt der Modellierung vorliegt (auch wenn diese zunächst nur vier Jahre umfasst.).

- Es liegt Rückversicherungsschutz für Schneedruckschäden vor, es ließ sich sogar in der Datenreihe ein Schadenjahr (2023) mit einem Schadenaufkommen jenseits der Priorität des Kumulschadenexzedenten beobachten. Um also die Entlastung und Wirksamkeit der Rückversicherung adäquat im internen Unternehmensmodell darstellen zu können, wäre eine explizite Modellierung angezeigt. Die derzeitige implizite Modellierung lässt eine solche Abbildung der Rückversicherung nicht zu, dadurch könnte der Rückversicherungsvertrag im Modell unter Umständen weniger vorteilhaft erscheinen, als dies in der Realität der Fall ist.

(b) *[4 Punkte]* Es lassen sich bspw. folgende Auswirkungen einer expliziten Modellierung der Gefahr „Schneedruck“ auf das interne Unternehmensmodell und seine Komponenten nennen:

- Da „Haus & Hof“ über ein genehmigtes internes Modell verfügt, könnte die Umstellung des Modellierungsansatzes für „Schneedruck“ von einer impliziten Modellierung auf eine explizite Modellierung eine ggf. *genehmigungspflichtige Modelländerung* darstellen und damit Gegenstand einer Prüfung und Genehmigung durch die zuständige Aufsichtsbehörde sein.

- In jedem Fall müsste die *Segmentierungs- und Aggregationslogik* des Modells angepasst werden, da die Sachschäden in Folge von „Schneedruck“ von den übrigen Schäden des Restsegments separat zu modellieren sind. Folgerichtig wären auch *Abhängigkeiten* zwischen „Schneedruck“ und den anderen Naturgefahren bzw. weiteren Segmenten in der Sparte „Sach“ zu definieren und zu schätzen.

- Das *Rückversicherungsmodell* wäre dahingehend anzupassen, dass neben den Ereignisschäden der Gefahren Sturm und Hagel auch die simulierten Bruttoschäden aus Schneedruckereignissen den Kumulschadenexzedenten durchlaufen. Die entsprechenden RV-Rückflüsse aus diesem Vertrag würden die Netto-Schadenbelastung weiter mindern, und wären damit in den Verteilungen der Nettoschäden und des Netto-Anfalljahresergebnisses zu berücksichtigen.

- Im *Abwicklungsmodell* wäre unter Umständen ein entsprechendes Abwicklungsmuster für Schneedruckschäden vorzuhalten.

(c) *[12 Punkte]* Gemäß Ereignisdefinition für Kumulereignisse bezieht sich der Ereigniszeitraum auf das komplette Kalenderjahr, daher ist der Ereignisschaden mit dem aggregierten Jahresschaden gleichzusetzen. Insbesondere bedeutet dies, dass die OEP-Kurve (OEP: Occurence Exceedance Probability) und die AEP-Kurve (AEP: Aggregate Exceedance Probability) übereinstimmen, womit eine Betrachtung der AEP-Kurve ausreichend ist.

Zur Berechnung der Brutto- und Nettojahresschäden S_i bzw. $\underline{S}_i$ zu den Wiederkehrperioden $T_i \in \{2, 20, 200\}$ verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

- Quantilniveau q_i zur Wiederkehrperiode T_i: $q_i = 1 - 1/T_i$

- Bruttojahresschaden S_i zur Wiederkehrperiode T_i: $S_i = F_S^{-1}(q_i)$
  mit F_S^{-1} ist Inverse von

$$F_S(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\},\ x > 0.$$

Zur Berechnung von F_S^{-1} betrachte beliebiges, aber festes $0 < q < 1$:

$$
\begin{aligned}
q = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \;&\Leftrightarrow\; 1 - q = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\Leftrightarrow\; -\ln(1-q) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \\
&\Leftrightarrow\; \sqrt[\alpha]{\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)} = \frac{x}{\beta} \\
&\Leftrightarrow\; \beta \cdot \sqrt[\alpha]{\ln\left(\frac{1}{1-q}\right)} = x.
\end{aligned}
$$

Somit ist $S_i = \beta \cdot \sqrt[\alpha]{\ln\left(\frac{1}{1-q_i}\right)} = \beta \cdot \sqrt[\alpha]{\ln(T_i)}$.

- Entlastung $\overline{S}_i$ durch den Kumulschadenexzedenten:
  $\overline{S}_i = \min(\max(S_i - 30; 0); 120)$
- Nettoschaden $\underline{S}_i$ zur Wiederkehrperiode T_i: $\underline{S}_i = S_i - \overline{S}_i$.
  Alternativ direkte Berechnung mittels $\underline{S}_i = \max(\min(S_i; 30); S_i - 120)$.

Für die Stützstellen der AEP-Kurve ergibt sich:

T_i	q_i	S_i	$\overline{S}_i$	$\underline{S}_i$
2	0,5	16,2	0	16,2
20	0,95	90,9	60,9	30,0
200	0,995	177,8	120,0	57,8

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Resimulation von Katastrophenschäden) [27 Punkte]

(a) *[4 Punkte]* Das Unternehmen benötigt für einen Lauf mit dem externen exposure-basierten Modell detaillierte Exposure- und Finanzdaten zum eigenen Bestand, insbesondere zu Lage, Versicherungssumme und schadenrelevanten Spezifika (wie Deckung, Nutzung) der einzelnen versicherten Objekte sowie Vertragsinformationen (insbesondere Limite, Selbstbehalte). Das externe Modell beinhaltet bereits einen Ereigniskatalog mit vordefinierten Szenarien, die entsprechende Eintrittshäufigkeiten und Intensitäten der schadenbestimmenden Parameter aufweisen. Außerdem sind die risikospezifischen Vulnerabilitätskurven zur Überleitung der Intensitäten in den bei den versicherten Objekten resultierenden Schaden standardmäßig im Modell hinterlegt.

(b) *[3 Punkte]* Die Normalverteilung ist im Gegensatz zur Betaverteilung, die der Resimulation bzw. dem statistischen Modell der ELT des Modellanbieters RMS standardmäßig zugrundegelegt wird, nicht auf das Einheitsintervall beschränkt. Stattdessen besitzt die Normalverteilung eine beidseitig unbeschränkte Trägermenge. Dadurch könnten sich bei der Resimulation ohne weitere Anpassung Ereignisschäden ergeben, die negativ sind oder oberhalb des von dem Ereignis betroffenen Exposurewerts liegen. Dieses Probleme ließe sich durch Übergang zur bedingten (nach unten beim Wert 0 und nach oben beim Wert 1 trunkierten) Verteilung umgehen, was aber wiederum einen höheren numerischen Aufwand bei der Parameterbestimmung mittels Momentenmethode nach sich ziehen würde.

(c) *[7 Punkte]* Nach den Annahmen des statistischen Modells sind die individuellen Ereignisschadenhöhen X_{ij}, $j \in \{1, \ldots, N_i\}$ der einzelnen Szenarien $i, i \in \{4711, 4712, 4713\}$ unabhängig und identisch verteilt mit

- Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{ij}]$ (= PERSPVALUE)
- Standardabweichung $\sigma[X_{ij}]$ (= STDDEVI + STDDEVC)

Der erwartete Jahresgesamtschaden pro Einzelszenario ermittelt sich als

$$\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mathbb{E}[X_{ij}],$$

die Varianz wiederum mittels

$$\mathbb{V}[S_i] = \lambda_i \cdot \left(\mathbb{E}[X_{ij}]^2 + \mathbb{V}[X_{ij}]\right),$$

wobei λ_i die mittlere Frequenz (= RATE, Erwartungswert der zugrundeliegenden Poisson-Verteilung) bezeichnet.

Erwartungswert und Varianz des szenario-übergreifenden Jahresschadens S ermitteln sich durch Summation der einzelnen Erwartungswerte und Varianzen aller Szenarien:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i \in \{4711,4712,4713\}} \mathbb{E}[S_i], \ \mathbb{V}[S] = \sum_{i \in \{4711,4712,4713\}} \mathbb{V}[S_i].$$

Damit ergibt sich für den AAL:

$$AAL = 2{,}5\% \cdot 1.000 + 50\% \cdot 100 + 25\% \cdot 200 = 25 + 50 + 50 = 125$$

sowie die Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S] &= 2{,}5\% \cdot \left(1.000^2 + 200^2\right) + 50\% \cdot \left(100^2 + 50^2\right) + 25\% \cdot \left(200^2 + 100^2\right) \\ &= 44.750. \end{aligned}$$

Die Wahl der Verteilung für den Schadengrad hat bei der analytischen Berechnung wiederum keinen Einfluss auf Erwartungswert und Varianz des Jahresschadens, da sich beide Größen aufgrund der Modellannahmen (kollektives Modell mit Poisson-verteilter Ereignisschadenanzahl) bereits auf Basis von Erwartungswert und Standardabweichung der Ereignisschadenhöhen berechnen lassen und damit insbesondere keine konkrete parametrische Verteilungsannahme für die Ereignisschadenhöhen erforderlich ist.

(d) *[9+2+2=13 Punkte]*

(i) *[9 Punkte]* Da es sich bei der Normalverteilung um eine Lage-Skalenfamilie mit Skalenparameter σ handelt und sich Ereignisschadenhöhe und Schadengrad nur um den Faktor EXPVALUE (Exposure-Wert) unterscheiden, kann die Normalverteilung direkt an die Ereignisschadenhöhen angepasst werden, anstatt

(1) zunächst die Umrechnung von Erwartungswert und Varianz von Ereignisschadenhöhen in Erwartungswert und Varianz des Schadengrades vorzunehmen,

(2) die Schadengrade aus einer Normalverteilung zu simulieren,

(3) und abschließend mittels Multiplikation mit dem Exposure-Wert wieder in den Ereignisschadenaufwand zurückzurechnen.

Die Parameter μ_i und σ_i der Normalverteilung entsprechen Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{ij}]$ und Standardabweichung $\sigma[X_{ij}]$ der Ereignisschäden in den einzelnen Szenarien $i, i \in \{4711, 4712, 4713\}$ und lauten somit (siehe auch Aufgabenteil (c)):

EVENT ID i	μ_i	σ_i
4711	1.000	200
4712	100	50
4713	200	100

Zur Generierung der normalverteilten Ereignisschäden ist die Inversionsmethode anzuwenden mittels

$$X_k^{(M)} = F^{-1}\left(U_k^{(M)}\right) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(U_k^{(M)}\right),\ 1 \leq k \leq N^{(M)}.$$

Zusammengenommen lauten also die simulierten Ereignisschäden:

Simulation	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	0		
2	2	126	375
3	0		
4	2	754	95
5	1	150	

Der maximale Ereignisschaden $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ und der Jahresschaden $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ lassen sich pfadweise durch Bestimmung des zeilenweisen Maximums und der Zeilensumme berechnen.

Simulation M	Maximaler Ereignisschaden $M_n^{(M)}$	Jahresschaden $S^{(M)}$
1	0	0
2	375	501
3	0	0
4	754	849
5	150	150

Der *AAL* entspricht dem Simulationsmittel $\overline{S} = \frac{1}{\mathcal{M}} \cdot \sum_{M=1}^{\mathcal{M}} S^{(M)}$ der einzelnen

Simulationswerte und ermittelt sich somit zu

$$\overline{S} = \frac{1}{5} \cdot (0 + 501 + 0 + 849 + 150) = \frac{1.500}{5} = 300.$$

(ii) *[2 Punkte]* Zwischen dem mittleren Jahresschaden aus den Simulationen und dem analytisch ermittelten AAL ergibt sich eine Differenz in Höhe von $300 - 125 = 175$ Mio. €. Der deutliche Unterschied resultiert im Wesentlichen an der höheren Ereignisfrequenz in den Simulationen (im Simulationsmittel 1 Ereignis pro Simulationsjahr ggü. 0,75) und der Überrepräsentativität des schwerwiegendsten Ereignisses 4711 (statistisch gesehen dürfte es aufgrund einer Frequenz von 2,5% nur in jedem vierzigsten Simulationspfad auftreten). Allerdings ist ein solcher Vergleich auf Basis von lediglich 5 Simulationen natürlich noch nicht aussagekräftig.

(iii) *[2 Punkte]* Anhand einer Gegenüberstellung von Simulationsergebnissen mit analytisch ermittelten Kenngrößen wie Erwartungswert und Varianz lässt sich allgemein überprüfen, ob die Simulationsanzahl bereits ausreicht, um Konvergenz der Simulationsgrößen gegen die wahren Größen zu erreichen und stabile Ergebnisse zu erhalten. Größere Abweichungen selbst bei höherer Simulationsanzahl können wiederum auf Probleme bei der Resimulation der ELT im internen Modell hindeuten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reserveprozess und Nachlauf)

[35 Punkte]

(a) *[2 Punkte]* Inhalt und Umfang des Reserveberichts sind zwar nicht starr festgelegt, er wird aber in jedem Fall umfangreiche Informationen enthalten, die für die Durchführung des Prozesses relevant sind, beispielsweise wesentliche Charakteristika des Schaden- bzw. Vertragsbestandes, Entwicklungen im Schadenumfeld oder eine Darstellung der im Vorjahr verwendeten aktuariellen Reserveprojektionen.

(b) *[3 Punkte]* Mit den Standardbezeichnungen werden für ein Geschäftssegment mit n Anfalljahren die kumulativen Stände $C_{i,k}$ für $i + k \leq n + 1$ als beobachtet bzw. als bekannt angenommen. Eine Schadenabwicklung nach mehr als n Abwicklungsjahren wird in diesem Fall als Tail bzw. Nachlauf bezeichnet. Die Faktoren

$$f_k = \frac{\mathrm{E}(C_{i,k})}{\mathrm{E}(C_{i,k-1})} \quad \text{für} \quad k > n$$

heißen Tailfaktoren. Dabei wird die Unabhängigkeit der individuellen Faktoren $\frac{\mathrm{E}(C_{i,k})}{\mathrm{E}(C_{i,k-1})}$ vom Anfalljahr i vorausgesetzt.

(c) *[2 Punkte]* Zwei wichtige Aspekte sind Dokumentation und internes Kontrollsystem. Wenn sich in den Unterlagen zum Thema Tail, dass laut Aussage des Vorgängers in diesem Geschäftssegment sehr wichtig sei, nichts findet, so wurden offensichtlich die Dokumentationspflichten verletzt. Da dies in den Kontrollen nicht aufgefallen ist, hat auch das interne Kontrollsystem nicht funktioniert.

(d) *[6 Punkte]* Mögliche Informationsquellen sind:

- Schadenabteilung: Informationen und Details darüber, welche Schadenbilder im Geschäftssegment typisch oder zumindest in relevantem Umfang vorhanden sind.

- Bestandsführungssysteme: Informationen darüber, welche Policen im Geschäftssegment vorhanden sind und damit auch welche Schäden gedeckt sind bzw. wie lange die entsprechende zu erwartende Abwicklung ist.

- Schadensystem: Informationen und Details darüber, welche Schadenbilder in relevantem Umfang vorhanden sind.

- Tarifierungsabteilung: Informationen über die geschätzte Abwicklungsdauer bei der Tarifierungsrechnung.

(e) *[8 Punkte]* Schritt (1) ist die Auswahl einer parametrischen Klasse von Abwicklungsfunktionen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, beispielsweise $\phi(k) = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot k)$ mit $a, b > 0$.

Schritt (2) ist die Auswahl der Abwicklungsjahre $K \subset \{1, ..., n\}$, die für die Schätzung des Tails verwendet werden sollen.

Schritt (3) ist die Schätzung der Parameter der Abwicklungsfunktion, im Beispiel a und b, durch Minimieren des gewichteten quadratischen Approximationsfehlers von

$$\sum_{k\in K} w_k \left(\phi(k) - \widehat{f_k}\right)^2,$$

wobei die Gewichte w_k idealerweise Glaubwürdigkeit und Relevanz der $\widehat{f_k}$ ausdrücken sollen.

Schritt (4) ist schließlich die Schätzung $\widehat{f_k} := \widehat{\phi}(k)$ für $k > n$.

(f) *[5 Punkte]* Die rechte Grafik eignet sich besser dafür, zu überprüfen, ob die Verwendung der Exponentialfunktion im vorliegenden Fall sinnvoll ist:

- Für die Schätzung des Tails sind vor allem die Abwicklungsfaktoren in höheren Abwicklungsjahren relevant. Die entsprechenden Werte liegen knapp über 1 und sind daher in der linken Grafik kaum zu unterscheiden. In der rechten Grafik hingegen werden die um 1 verminderten Werte durch die logarithmische Darstellung auseinander gezerrt.
- Wegen $\ln(\phi(k) - 1) = \ln(a) - b \cdot k$ wird $\phi(k) - 1$ in der rechten Grafik als Gerade dargestellt. Dies erleichtert die visuelle Überprüfung, ob die Abwicklungsfunktion zur Entwicklung der Abwicklungsfaktoren über die Abwicklungsjahre hinweg passt.

(g) *[6 Punkte]* Die zwei Gründe sind die Wahl von K und die Festlegung der w_k:

- Aus der Grafik ist ersichtlich, dass die geschätzten Werte $\widehat{f_k}$ für $k = 1$ und (deutlich weniger ausgeprägt) für $k = 2$ nicht zur linearen Darstellung der Abwicklungsfunktion passen. Daher sollte mit $K = \{3, ..., 11\}$ oder $K = \{4, ..., 11\}$ gearbeitet werden.
- Wegen $\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{f}_{10} \mid \mathcal{B}_9)} = 0{,}001$ wäre das Gewicht w_{10} unverhältnismäßig groß und würde die Regressionsgerade zwingen, sehr nahe am entsprechenden Punkt $(10, 0{,}004)$ zu verlaufen, obwohl dieser eher zu klein erscheint. Dies ist ein generelles Problem bei der Verwendung von Varianzschätzungen für die Regressionsgewichte. Eine pragmatische Lösung wäre die Verwendung des Gewichts $w_{10} = 0$ oder auch $w_{10} = w_{11}$.

(h) *[3 Punkte]* Zahlungen für schwere Personenschäden dauern aufgrund der Kosten beispielsweise für Pflege oder medizinische Versorgung über Jahrzehnte an. Daher ist zu erwarten, dass sich die Abwicklungsfaktoren über die Jahrzehnte hinweg auf einem gewissen Niveau stabilisieren bzw. nur noch sehr leicht abnehmen. Der mit Hilfe der Exponentialfunktion geschätzte Nachlauf fällt viel zu schnell ab und die geschätzten Tailfaktoren sind viel zu klein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [24 Punkte]

(a) *[12 Punkte]*

(A) Die Aussage ist wahr.

(B) Die Aussage ist falsch. Eine mögliche richtige Aussage lautet: Unter HGB ist eine Diskontierung nur für Rentenverpflichtungen vorgesehen.

(C) Die Aussage ist falsch. Eine mögliche richtige Aussage lautet: Die Risikomarge unter IFRS17 dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht. Es gibt keine Vorgabe bei den Berechnungsverfahren, aber eine Angabe von geforderten Eigenschaften.

(D) Die Aussage ist wahr.

(E) Die Aussage ist falsch. Eine mögliche richtige Aussage lautet: Unter IFRS17 dient die Servicemarge (Contractual service Margin, CSM) zur Neutralisierung von Gewinnen bei Vertragsabschluss. Die Drohverlustrückstellung (Loss Component, LC) sorgt dafür, dass drohende Verluste realisiert werden, sobald sie erwartet werden (also drohen).

(F) Die Aussage ist wahr.

(G) Die Aussage ist wahr.

(H) Die Aussage ist falsch, da die einforderbaren Beträge aus RV im Rahmen der Grenzen der Versicherungsverträge zu berechnen sind, auf die sich die Rückversicherung bezieht. Beim Rückversicherer hingegen sind die Vertragsgrenzen des Rückversicherungsvertrags entscheidend.

(b) *[6 Punkte]* Die Schadenrückstellungen bedecken die Verpflichtungen aus bereits eingetretenen oder verursachten Schäden zu Verträgen, die vor dem oder zum Bilanzstichtag bestanden haben inkl. noch nicht anerkannter / unbekannter Rentenfälle und sind der Barwert der entsprechenden zukünftigen Zahlungsströme. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Schaden bereits gemeldet wurde oder nicht.

Die Prämienrückstellung ist der Saldo aus dem Barwert der Verpflichtungen und dem Barwert zukünftiger (nach dem Bilanzstichtag fällig werdender) Prämien. Der Barwert der Verpflichtungen bezieht sich auf zukünftig eintretende Schadenfälle (inkl. daraus resultierender Rentenfälle) aus Verträgen, die zum Bilanzstichtag bestanden haben. Sie grenzt sich durch den Blick in die Zukunft von der Schadenrückstellung ab, durch welche bereits am bzw. vor dem Bilanzstichtag eingetretene Schadensfälle (unabhängig von der Meldung) Eingang in die Bilanz finden.

(c) *[6 Punkte]* Die Prämienrückstellung $BE_{premium}$ kann mit Hilfe einer geschätzten unternehmensindividuellen Schaden-Kosten-Quote und geschätzten zukünftigen Prämieneinnahmen bestimmt werden:

$$BE_{premium} = (CR - AER) \cdot VM + (CR - 1) \cdot FP = CR \cdot (VM + FP) - AER \cdot VM - FP$$

Dabei gilt:

- $BE_{premium}$: undiskontierte Prämienrückstellung
- CR: geschätzte, undiskontierte Schaden-Kosten-Quote
- AER: geschätzte Abschlusskostenquote für Abschlusskosten des aktuellen Bestandes, die bis zum Laufzeitende bereits angefallen sind
- VM: ökonomische Beitragsüberträge aus bereits bekannten Verträgen
- FP: geschätzte, zukünftige, undiskontierte Brutto-Prämie für alle Verträge des aktuellen Bestandes, die gemäß der Grenzen der Versicherungsverträge zu berücksichtigen sind

In der zweiten Darstellung der obigen Gleichung beschreiben die ersten beiden Terme die Zahlungen für die Verpflichtungen (zukünftige Schäden und zugehörige Kosten) und der dritte Term die Einnahmen für zukünftige Prämien.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [29 Punkte]

Auf eine Unterscheidung zwischen = und ≈ bei Rundungen wurde in der Lösung zwecks besserer Lesbarkeit verzichtet.

(a) *[3 Punkte]* Es gilt

$$\bar{q} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} q_i = \frac{1086{,}3\%}{15} = 72{,}4\%$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i - \bar{q}\right)^2 \\
&= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i^2 - 2q_i\bar{q} + \bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 2\bar{q}\sum_{i=1}^{15} q_i + 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(8{,}822 - 15\cdot(72{,}4\%)^2\right) \\
&= (26{,}1\%)^2,
\end{aligned}$$

womit sich $\bar{\sigma} = 26{,}1\%$ ergibt.

(b) *[6 Punkte]* Aufgrund der Vorgaben zu Versicherungszweig und Sicherheitszuschlag berechnet sich der Sollbetrag zu

$$SB_{16} = 4{,}5\cdot\bar{\sigma}\cdot P_{16} = 117{,}5.$$

Die erfolgsunabhängige Zuführung beträgt

$$3{,}5\%\cdot SB_{16} = 4{,}1.$$

Bei einer Geschäftsjahresschadenquote von $q_{16} = 58{,}9\%$ ergibt sich ein Unterschaden B von

$$B = (\bar{q} - q_{16})\cdot P = (72{,}4\% - 58{,}9\%)\cdot 100 = 13{,}5$$

und damit die Schwankungsrückstellung SR_{16} des Bilanzjahres 16 zu

$$SR_{16} = SR_{15} + 3{,}5\%\cdot SB_{16} + B = 52{,}5 + 4{,}1 + 13{,}5 = 70{,}1.$$

Die Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS} beträgt

$$q_{16}^{nS} = q_{16} + \frac{SR_{16} - SR_{15}}{P} = 58{,}9\% + \frac{70{,}1 - 52{,}5}{100} = 76{,}5\%.$$

(c) *[6 Punkte]* Da $q_{16} = q_1$ ist, ändert sich durch die Verschiebung des Beobachtungszeitraums weder die durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$, noch die Standardabweichung $\bar{\sigma}$. Da weiter $P_{17} = P_{16}$ vorausgesetzt ist, bleibt der Sollbetrag gleich (also $SB_{17} = SB_{16}$) und damit gilt im Normalfall

$$q_{17}^{nS} = q_{16}^{nS} = 76{,}5\%.$$

Der Normalfall ist solange gegeben, wie ein Über- bzw. ein Unterschaden ausgeglichen werden kann, also solange die Schwankungsrückstellung nicht leer ($SR_{17} = 0$) bzw. voll ($SR_{17} = SB_{17}$) ist. Damit ergibt sich

$$q_{17}^{\max} = \bar{q} + \frac{SR_{16} + 3{,}5\% \cdot SB_{17}}{P_{17}} = 146{,}6\%$$

und

$$q_{17}^{\min} = \bar{q} - \frac{SB_{17} - (SR_{16} + 3{,}5\% \cdot SB_{17})}{P_{17}} = 29{,}1\%.$$

Zumindest in den letzten 16 Jahren wurden diese Extremwerte nie erreicht.

(d) *[8 Punkte]* Die Abgabe einer 50%-Quote hätte trivialerweise im Geschäftsjahr 17, aber auch längerfristig in den Folgejahren keinen Einfluss auf die durchschnittliche Schadenquote und die Standardabweichung, da sich die Netto-Schadenquoten der Geschäftsjahre durch eine Quotenabgabe nicht ändern würden. Der Sollbetrag hingegen würde sich aufgrund der halbierten Netto-Prämie ebenfalls halbieren. Im Geschäftsjahr 17 ergäbe dies einen Sollbetrag von

$$SB_{17} = \frac{117{,}5}{2} = 58{,}7$$

und somit im Falle eines guten Jahres eine Schadenquote nach Schwankung von ca.

$$q_{17}^{nS} = 60{,}0\% + \frac{58{,}7 - 70{,}1}{50} = 37{,}2\%,$$

da hier $SR_{17} = SB_{17}$ gelten würde. Hier würde sich die Schadenquote nach Schwankung durch die Quote und die daraus resultierende Halbierung des Sollbetrags also deutlich verbessern. Es kann kein Unterschaden zugeführt werden.

Im Falle eines schlechten Jahres würde der Überschaden in Höhe von

$$(120{,}0\% - 72{,}4\%) \cdot 50 = 23{,}8$$

der Schwankung entnommen und es ergäbe sich eine Schadenquote nach Schwankung von

$$q_{17}^{nS} = 120{,}0\% + \frac{-23{,}8}{50} = 72{,}4\%.$$

Hier würde sich die Schadenquote nach Schwankung durch die Quote leicht verbessern, da keine erfolgsunabhängige Zuführung in Höhe 3,5% des Sollbetrags erfolgt.

(e) *[6 Punkte]* Für das Geschäftsjahr 17 wären die durchschnittliche Schadenquote und die Standardabweichung natürlich nicht betroffen, der Sollbetrag würde wegen $P_{17} = 90$ auf

$$SB_{16} = 4{,}5 \cdot \bar{\sigma} \cdot P_{17} = 105{,}7$$

sinken. Damit wäre zwar die erfolgsunabhängige Zuführung mit

$$3{,}5\% \cdot SB_{17} = 3{,}7$$

etwas kleiner als ohne Rückversicherung, aber die Schadenquote nach Schwankung läge im Normalfall unverändert bei

$$q_{17}^{nS} = 72{,}4\% + \frac{3{,}7}{90} = 76{,}5\%.$$

Der Normalfall für die Netto-Schadenquote hätte hier eine Bandbreite von 37,0% bis zur Stop-Loss Grenze von 100,0%. Diese Aussage war aber nicht verlangt.

Geht man davon aus, dass der Preis für den Stop-Loss den Schadenerwartungswert etwas übersteigt, so würde die durchschnittliche Netto-Schadenquote langfristig leicht ansteigen. Die Standardabweichung hingegen würde deutlich sinken. Wegen der geringeren Standardabweichung und der niedrigeren Netto-Prämie, würde auch der Sollbetrag sinken. Eine Resimulation des Beobachtungszeitraums ergibt eine durchschnittliche Schadenquote von 73,3% mit einer Standardabweichng von 14,1%. Diese Werte waren aber nicht verlangt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Incremental-Loss-Ratio Modell und Inflation)

[22 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Die Modellannahmen lauten:

(ILR1) Die Zuwächse $S_{i,k}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq u$ sind unabhängig.

(ILR2) Es gibt Parameter $m_k \in \mathbb{R}$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq k \leq u$

$$\mathrm{E}(S_{i,k}) = m_k \cdot v_i$$

gilt. Die Parameter m_k werden Zuwachsquoten genannt.

(ILR3) Es gibt Parameter $s_k > 0$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq k \leq u$

$$\mathrm{Var}(S_{i,k}) = s_k^2 \cdot v_i$$

gilt. Die s_k^2 werden auch Varianzparameter genannt.

(b) *[3 Punkte]* Die Zuwächse $\widetilde{S}_{i,k}$ ergeben sich aus den die Zuwächsen $S_{i,k}$ durch Anwendung der Indexreihe, stellen also die inflationierten Zuwächse dar, sofern die Indexreihe ein Inflationsindex ist. Die analoge Aussage gilt für die Volumina $\widetilde{v}_i$. Dabei wird jeweils der Indexwert des entsprechenden Kalenderjahres ($i + k - 1$ für $S_{i,k}$ und i für v_i) verwendet. Durch $\widetilde{C}_{i,k}$ sind dann die entsprechenden kumulierten Werte gegeben. Die Größe $r_j - 1$ bezeichnet in diesem Zusammenhang die jährliche Inflationsrate des Kalenderjahres j.

Das ILR-I-Modell kann also als Inflationsmodell betrachtet werden, dass aus einem inflationsfreien ILR-Modell und einer Überlagerung durch einer pro Kalenderjahr wirkenden Inflation zusammengesetzt ist.

(c) *[3 Punkte]* Die Grundannahme des ILR-I-Modells ist in diesem Fall, dass der Verbraucherpreisindex die inflationäre Erhöhung der Schadenzuwächse über die Kalenderjahre hinweg erklären kann. In der Praxis ist dies, abhängig von den Eigenschaften des betrachteten Geschäftssegments, oft nicht gegeben:

- Komponenten des Verbraucherpreisindex haben unter Umständen keine Auswirkungen auf die Höhe der Schadenzuwächse. So wirken sich z.B. Lebensmittelpreise nicht auf Zahlungen in der Unfallversicherung nach Gliedertaxe oder auf Reparaturkosten für Automobile aus.

- Relevante Treiber der Schadenhöhe finden sich in der Zusammensetzung des Warenkorbs des Verbraucherpreisindex nicht wieder. So sind dort beispielsweise die Kosten für Pflege oder medizinische Behandlungen, welche für Personenschäden wichtig sind, nicht abgebildet.

(d) *[8 Punkte]* Es bezeichne $r = r_2 = r_3 = \cdots = r_{n+u-1}$ die (konstante) Inflationsrate. Damit ist

$$I_j = r^{j-1}, \qquad \widetilde{v}_i = r^{i-1} \cdot v_i \qquad \text{und} \qquad \widetilde{S}_{i,k} = r^{i+k-2} \cdot S_{i,k}.$$

- Die Unabhängigkeitsannahme (ILR1) ist nach Konstruktion (auch bei nicht konstanter Inflation) erfüllt, da die Zuwächse nur mit konstanten Werten multipliziert werden.

- Die Erwartungswertannahme (ILR2) gilt wegen

$$\mathrm{E}(\widetilde{S}_{i,k}) = \mathrm{E}(r^{i+k-2} \cdot S_{i,k}) = r^{i+k-2} \cdot m_k \cdot v_i = r^{k-1} \cdot m_k \cdot \widetilde{v}_i = \widetilde{m}_k \cdot \widetilde{v}_i$$

  mit der Zuwachsquote $\widetilde{m}_k = r^{k-1} \cdot m_k$, welche nur von k, aber nicht von i abhängt.

- Die Varianzannahme (ILR3) hingegen ist wegen

$$\mathrm{Var}(\widetilde{S}_{i,k}) = \mathrm{Var}(r^{i+k-2} \cdot S_{i,k}) = (r^{i+k-2})^2 \cdot s_k^2 \cdot v_i = r^{i-1} \cdot (r^{k-1} \cdot s_k)^2 \cdot \widetilde{v}_i$$

  nicht erfüllt, da $\frac{\mathrm{Var}(\widetilde{S}_{i,k})}{\widetilde{v}_i}$ nicht unabhängig von i ist.

(e) *[5 Punkte]* Es bezeichne $r = r_2 = \cdots = r_n$ und $R = r_{n+1} = \cdots = r_{2n-1}$ sowie $\widetilde{m}_k = r^{k-1} \cdot m_k$. Mit den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgabe gilt innerhalb des beobachteten Dreiecks, also für $i + k - 1 \leq n$,

$$\mathrm{E}(\widetilde{S}_{i,k}) = \widetilde{m}_k \cdot \widetilde{v}_i$$

und damit auch

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\widetilde{m}}_k\right) = \widetilde{m}_k$$

für $k = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left((\widehat{\widetilde{m}}_{n-i+2} + \cdots + \widehat{\widetilde{m}}_n) \cdot \widetilde{v}_i\right) &= (\widetilde{m}_{n-i+2} + \cdots + \widetilde{m}_n) \cdot \widetilde{v}_i \\
&= (r^{n-i+1} \cdot m_{n-i+2} + \cdots + r^{n-1} \cdot m_n) \cdot \widetilde{v}_i \\
&= (r^n \cdot m_{n-i+2} + \cdots + r^{n+i-2} \cdot m_n) \cdot v_i
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\widetilde{S}_{i,n-i+2} + \cdots + \widetilde{S}_{i,n}\right) &= \mathrm{E}\left(r^{n-1} \cdot R^1 \cdot S_{i,n-i+2} + \cdots + r^{n-1} \cdot R^{i-1} \cdot S_{i,n}\right) \\
&= (r^{n-1} \cdot R^1 \cdot m_{n-i+2} + \cdots + r^{n-1} \cdot R^{i-1} \cdot m_n) \cdot v_i,
\end{aligned}$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt.