DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 13. Oktober 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 30 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][16 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine XY-Aktie mit bekanntem Marktwert s_0 in $t = 0$ und zufallsabhängigem Marktwert S_3 in $t = 3$. Betrachten Sie nun ein Garantie-Zertifikat auf eine Einheit dieser Aktie. Das Zertifikat zahle in $t = 3$ den Marktwert S_3 der Aktie, *mindestens* aber 90% des *anfänglichen Marktwerts*.

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_3 des Garantie-Zertifikats zum Zeitpunkt $t = 3$ formelmäßig dar.

(ii) *[4 Punkte]* Zerlegen Sie diese Position dann alternativ auf *zwei Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese Zerlegungen jeweils ein?

(b) *[6 Punkte]* Ein Investor legt sein anfängliches Kapital V_0 auf die folgende Weise an. Er erwirbt 60 DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 und einer Laufzeit von 4 Jahren sowie 40 DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2 und einer Laufzeit von ebenfalls 4 Jahren. Den Restbetrag legt der Investor (mit Zinseszins) über 4 Jahre mit einer Verzinsung in Höhe von 3% p. a. an.

(i) *[2 Punkte]* Stellen Sie die Rückfluss-Position V_4 dieses Investments zum Zeitpunkt $t = 4$ dar.

(ii) *[2 Punkte]* Welches (positive) Mindest-Endvermögen F („Floor“) hat sich der Investor bei Anwendung dieser Strategie gesichert?

(iii) *[2 Punkte]* Welche Mindestverzinsung r_F („Floor-Zins“) – bezogen auf das anfängliche Kapital – resultiert hieraus?

(c) *[4 Punkte]* Einem Investor mit einem Budget von 1.000 € stehen zwei Anlagealternativen zur Verfügung. Zum einen Aktien der YZ-AG zum Kurs von 500 €, zum anderen Puts auf eine Einheit der YZ-Aktie mit einem Ausübungspreis von 500 € sowie einem Kurs von 100 €. Der Investor möchte nun ein Portfolio aus Aktien und Puts bilden.

(i) *[2 Punkte]* Wie viele Aktien und Puts kann er erwerben, falls die Anzahl der Puts der Anzahl der Aktien entsprechen soll („1:1 Put Hedge“)?

(ii) *[2 Punkte]* Wie groß ist der minimale (positive) Wert des Portfolios nach einem Jahr?

Lösungsskizze:

(a) (i) Rückfluss-Position:

$$V_3 = \max\{S_3, 0{,}9\, s_0\}$$

[2 P.]

(ii) Zerlegung 1:

$$V_3 = S_3 + \max\{0{,}9\, s_0 - S_3, 0\}$$

Zerlegung 1 beinhaltet einen Put auf die XY-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis $0{,}9\, s_0$. *[2 P.]*

Zerlegung 2:

$$V_3 = 0{,}9\, s_0 + \max\{S_3 - 0{,}9\, s_0, 0\}$$

Zerlegung 2 beinhaltet einen Call auf die XY-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis $0{,}9\, s_0$. *[2 P.]*

(b) Es bezeichne $C_0 = C_0(K_1)$ den Preis eines DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 sowie $P_0 = P_0(K_2)$ den Preis eines DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2, jeweils zum Zeitpunkt $t = 0$.

(i) Rückfluss-Position:

$$\begin{aligned} V_4 &= 60 \max\{\mathrm{DAX}(4) - K_1, 0\} \\ &+ 40 \max\{K_2 - \mathrm{DAX}(4), 0\} \\ &+ (V_0 - 60C_0 - 40P_0)(1{,}03)^4, \end{aligned}$$

wobei DAX(4) den Marktwert des DAX zum Zeitpunkt $t = 4$ bezeichne. *[2 P.]*

(ii) Mindest-Endvermögen:

Da $\max\{\mathrm{DAX}(4) - K_1, 0\} \geq 0$ und $\max\{K_2 - \mathrm{DAX}(4), 0\} \geq 0$, gilt

$$V_4 \geq (V_0 - 60C_0 - 40P_0)(1{,}03)^4 =: F.$$

[2 P.]

(iii) Floor-Zins:

Es muss gelten

$$V_0(1 + r_F)^4 = F = (V_0 - 60C_0 - 40P_0)(1{,}03)^4.$$

[1 P.]

Hieraus resultiert

$$\begin{aligned} r_F &= \left[\tfrac{V_0 - 60C_0 - 40P_0}{V_0}(1{,}03)^4\right]^{1/4} - 1 \\ &= (1{,}03)\left(\tfrac{V_0 - 60C_0 - 40P_0}{V_0}\right)^{1/4} - 1. \end{aligned}$$

[1 P.]

(c) (i) Es muss gelten (Budget-Bedingung)

$$1.000 = xS_0 + xP_0 = 600x,$$

wobei x die gesuchte Anzahl von Aktien bzw. Puts bezeichne. *[1 P.]* Hieraus folgt $x = \underline{5/3}$. *[1 P.]*

(ii) Der Wert des Portfolios in $t = 1$ lautet allgemein

$$xS_1 + x \max\{500 - S_1, 0\} = x \max\{500, S_1\}.$$

[1 P.]

Damit beläuft sich der minimale Wert des Portfolios in $t = 1$ auf $500x$ bzw. mit $x = 5/3$ auf $\underline{833\,1/3}$. *[1 P.]*

Alternativ: Würde eine Ganzzahligkeitsbedingung ohne Kreditaufnahme unterstellt, so ergibt sich in (i) $x = 1$ und in (ii) beläuft sich der minimale Wert in $t = 1$ auf $500 + 400(1 + r)$, wobei r den sicheren Einperiodenzins bezeichne. Weitere Lösungsvarianten würden sich ergeben, wenn man zusätzlich die Möglichkeit einer Kreditaufnahme zulässt.

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [17 Punkte]*

A. Binomi hat ein Anlagebudget von 2.000 € zur Verfügung und möchte dieses für ein Jahr anlegen. Die Anlagealternativen lauten:

A: Eine sichere Anlage zum Zinssatz 5%.

B: Eine risikobehaftete Anlage. Hierbei verdoppelt sich entweder das eingesetzte Kapital binnen Jahresfrist oder es halbiert sich. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verdopplung betrage $0 < p < 1$.

A. Binomi besitzt die Risikopräferenzfunktion $u(x) = \ln x$ bezogen auf die Endvermögensposition $V > 0$ nach einem Jahr.

(a) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative A.

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von p – den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative B.

(c) *[2 Punkte]* Für welche Wahrscheinlichkeit p sind die beiden Anlagealternativen für A. Binomi nutzenäquivalent?

(d) *[5 Punkte]* A. Binomi investiert nun einen Anteil α $(0 < \alpha < 1)$ des Anlagebudgets in die risikobehaftete Anlagealternative und den restlichen Anteil in die sichere Anlagealternative. Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von α – die entsprechende Endvermögensposition sowie deren Erwartungsnutzen.

(e) *[4 Punkte]* Für welchen numerischen Wert von α ist das Investment unter (d) für A. Binomi nutzenmaximal (hierbei reicht die Überprüfung der notwendigen Bedingung)? Gehen Sie dabei von $p = 0{,}5$ aus!

Lösungsskizze:

(a) Bezeichne V_A die Endvermögensposition der Anlagealternative A. Mit $V_A = 2.000 \cdot 1{,}05 = 2.100$ gilt $\mathbb{E}[\ln(V_A)] = \ln(V_A) = \ln(2.100) = \underline{7{,}6497}$. *[1 P.]*

Für das Sicherheitsäquivalent gilt

$$s(V_A) = u^{-1}[\mathbb{E}[\ln(V_A)]] = \exp(\ln(V_A)) = V_A = \underline{2.100}.$$

[1 P.]

(b) Bezeichne V_B die Endvermögensposition der Anlagealternative B. Dann gilt $\mathbb{P}[V_B = 4.000] = p$ und $\mathbb{P}[V_B = 1.000] = 1 - p$. *[1 P.]*

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(V_B)] &= p\cdot\ln(4.000)+(1-p)\cdot\ln(1.000)\\ &= p\cdot\ln\left(\tfrac{4.000}{1.000}\right)+\ln(1.000)\\ &= p\cdot\ln(4)+\ln(1.000)\\ &= 1{,}3863p+6{,}9078.\end{aligned}$$

[2 P.]

Für das Sicherheitsäquivalent gilt entsprechend

$$s(V_B)=\exp(6{,}9078+1{,}3863p).$$

[1 P.]

(c) Es muss gelten

$$1{,}3863p+6{,}9078=7{,}6497.$$

[1 P.]

Hieraus folgt $p=0{,}5352$. *[1 P.]*

(d) Bezeichne V_α die Endvermögensposition des Mischportfolios in Abhängigkeit von α. Es gilt:

$$\begin{aligned}V_\alpha &= \begin{cases}4.000\alpha+2.100(1-\alpha) & \text{mit W. } p\\ 1.000\alpha+2.100(1-\alpha) & \text{mit W. } 1-p\end{cases}\\ &= \begin{cases}2.100+1.900\alpha & \text{mit W. } p\\ 2.100-1.100\alpha & \text{mit W. } 1-p\end{cases}\end{aligned}$$

[3 P.]

$$\mathbb{E}[\ln(V_\alpha)]=p\ln(2.100+1.900\alpha)+(1-p)\ln(2.100-1.100\alpha).$$

[2 P.]

(e) Für $p=0{,}5$ ergibt sich zunächst

$$\mathbb{E}[\ln(V_\alpha)]=0{,}5\ln(2.100+1.900\alpha)+0{,}5\ln(2.100-1.100\alpha).$$

[1 P.]

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}d\mathbb{E}(\ln V_\alpha)/d\alpha &= \frac{1.900}{2(2.100+1.900\alpha)}-\frac{1.100}{2(2.100-1.100\alpha)}\\ &= \frac{19}{2(21+19\alpha)}-\frac{11}{2(21-11\alpha)}=0.\end{aligned}$$

[2 P.]

Hieraus resultiert $418\alpha=168$ und damit schließlich $\alpha=\underline{0{,}4019}$. *[1 P.]*

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

Der Solarparkbetreiber „Sonnenschein AG“ beabsichtigt eine Anleihe („Bull-Anleihe“) mit den folgenden Modalitäten zu emittieren:

- Die Laufzeit beträgt 1 Jahr, der Nennwert ist 105.000 € und es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen.
- Steigt der Aktienkurs der Sonnenschein AG in $t = 1$ im Vergleich zum heutigen Aktienkurs, so erhält der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Nennwert einen Bonus in Höhe von 30% der einjährigen Aktienrendite auf den Nennwert.
- Die Sonnenschein AG strebt als Ausgabepreis der Anleihe 110.000 € an.

Ihr Finanzvorstand bittet Sie, diese Anlagemöglichkeit zu überprüfen. Sie entscheiden sich für die Modellierung in einem statischen Einperiodenmodell mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1).

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie aus Sicht des Kapitalanlegers das Auszahlungsprofil C_1 der Bull-Anleihe zur Fälligkeit $t = 1$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_1^1 in $t = 1$ an, wenn der Startpreis der Aktie 200 € beträgt.

(b) *[15 Punkte]* Bei Ihrer Modellierung gehen Sie zunächst für die Anzahl der Sonnentage von zwei Szenarien ω_1, ω_2, die aus Ihrer Sicht mit positiven Wahrscheinlichkeiten eintreten können, und folgenden Preisentwicklungen aus:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 252} \\ \boxed{S_0^1 = 200} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 126} \end{tikzcd}$$

(i) *[3 Punkte]* Überprüfen Sie, dass Ihr Finanzmarktmodell arbitrage-frei ist. Geben Sie inklusive Herleitung die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße explizit an.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0 der Bull-Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ durch risikoneutrale Bewertung.

(iii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für die Bull-Anleihe. Wie hoch sind die Kosten der perfekten Replikation?

(iv) *[4 Punkte]* Der angestrebte Ausgabepreis von 110.000 € führt in Ihrem Modell zu Arbitrage. Geben Sie - inklusive Begründung - explizit eine Arbitragemöglichkeit an.

(v) *[3 Punkte]* Stellen Sie das Auszahlungsprofil C_1^{call} einer Europäischen Call-Option auf die Aktie der Sonnenschein AG mit Fälligkeit in $t = 1$ und Ausübungspreis 200 € mithilfe des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe dar. Leiten Sie daraus den arbitrage-freien Preis der Call-Option ab.

(c) *[7 Punkte]* Alternativ erweitern Sie Ihr Modell um ein drittes Szenario ω_3:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1)=1{,}05} \\ \boxed{S_0^0=1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2)=1{,}05} \\ & \boxed{S_1^0(\omega_3)=1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1)=252} \\ \boxed{S_0^1=200} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2)=126} \\ & \boxed{S_1^1(\omega_3)=336} \end{tikzcd}$$

Berechnen Sie in diesem Modell die Menge der arbitrage-freien Preise der Bull-Anleihe. Geben Sie mit Begründung an, ob die Bull-Anleihe in diesem Modell replizierbar ist.

Lösungsskizze:

(a) Das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \max\{105.000, 105.000(1+0{,}3\cdot\tfrac{S_1^1-200}{200})\} \\ &= 105.000+\max\{0, 105.000\cdot 0{,}3\cdot\tfrac{S_1^1-200}{200})\}. \end{aligned}$$

[3 P.]

Bemerkung: Alternative Darstellungen sind möglich, siehe auch (b) (v).

(b) (i) Der *1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* besagt, dass ein diskretes Finanzmarktmodell genau dann arbitrage-frei ist, wenn ein äquivalentes risikoneutrales Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. *[1 P.]* Im vorliegenden Finanzmarktmodell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1)\cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2)\cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 200 = 240q_1 + 120q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$200 = 240q_1 + 120(1-q_1) = 120q_1 + 120$$

und entsprechend $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ für die Gewichte des eindeutig bestimmten äquivalenten risikoneutralen Maßes. *[2 P.]* Insbesondere ist das Finanzmarktmodell arbitrage-frei.

(ii) Nach (i) beträgt das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe zur Fälligkeit konkret

$$C_1(\omega) = \max\{105.000, 105.000(1+0{,}3\cdot\tfrac{S_1^1-200}{200})\} = \begin{cases} 113.190 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 105.000 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

[1 P.]

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel sowie den Gewichten $q_1 = \frac{2}{3}$ und $q_2 = \frac{1}{3}$ ergibt sich der arbitrage-freie Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] = 107.800 q_1 + 100.000 q_2 = \underline{105.200}.$$

[1 P.]

(iii) Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch und Aktie) und den zugehörigen Wert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$C_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega) \cdot \vartheta^0 + S_1^1(\omega) \cdot \vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 252 \cdot \vartheta^1 &= 113.190, \\ 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 126 \cdot \vartheta^1 &= 105.000, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \underline{65}$, $\vartheta^0 = \underline{92.200}$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von 65 Aktien sowie der Anlage von 92.200 € im Sparbuch. *[2 P.]* Das hierfür erforderliche Anfangskapital entspricht dem arbitrage-freien Preis $C_0 = \underline{105.200}$ aus (ii). *[1 P.]*

(iv) Angenommen, die Bull-Anleihe mit Auszahlungsprofil C_1 wäre zum Preis 110.000 € veräußerbar. In diesem Fall kann man zum Zeitpunkt 0 die Bull-Anleihe für diesen Preis verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis $C_0 = 105.200$ € implementieren und das freie Kapital 4.800 € in das Sparbuch investieren. *[2 P.]* Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die Auszahlung C_1 der Bull-Anleihe geleistet werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1 und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $1{,}05 \cdot 4.800 = 5.040$. *[1 P.]* Netto bleibt also für jedes Szenario ein risikofreier Gewinn, d. h. ein Preis 110.000 € ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage. *[1 P.]*

(v) Umformen des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= 105.000 + \max\{0, 105.000 \cdot 0{,}3 \cdot \tfrac{S_1^1 - 200}{200}\} \\ &= 105.000 + 157{,}5 \cdot \max\{0, S_1^1 - 200\} = 105.000 + 157{,}5 \cdot C_1^{\mathrm{call}}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $C_1^{\mathrm{call}} = \frac{1}{157{,}5}(C_1 - 105.000)$, d. h. die Auszahlung der Call-Option ergibt sich modulo Skalierung als Differenz der Auszahlung der Bull-Anleihe und einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 105.000 €. *[1 P.]* Da die Nullkuponanleihe in $t = 0$ den Wert 100.000 € aufweist, ergibt sich als arbitrage-freier Preis der Call-Option

$$C_0^{\mathrm{call}} = \frac{1}{157{,}5}(105.200 - 100.000) = \underline{33{,}0159}.$$

[2 P.]

(c) Risikoneutrale Maße:

Im alternativen Modell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3) \cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der konkreten Werte ergibt sich

$$\begin{aligned} 200 &= 240q_1 + 120q_2 + 320q_3 \\ &= 240q_1 + 120q_2 + 320(1 - q_1 - q_2) \\ &= -80q_1 - 200q_2 + 320, \end{aligned}$$

also (parametrisiert über q_1) $q_2 = 0{,}6 - 0{,}4q_1$ und entsprechend

$$q_3 = 1 - q_1 - q_2 = 1 - q_1 - (0{,}6 - 0{,}4q_1) = 0{,}4 - 0{,}6q_1.$$

Aufgrund der Bedingung $q_1, q_2, q_3 \in (0, 1)$ muss dabei $q_1 \in (0, \frac{2}{3})$ gelten.

Die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße ist gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}_\alpha | q_1(\alpha) = \alpha, q_2(\alpha) = 0{,}6 - 0{,}4\alpha, q_3(\alpha) = 0{,}4 - 0{,}6\alpha, \alpha \in (0, \tfrac{2}{3})\}.$$

[3 P.]

Bemerkung: Alternative Parametrisierungen sind möglich.

Arbitrage-freie Preise:

Für das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe

$$C_1(\omega_1) = 113.190,\ C_1(\omega_2) = 105.000,\ C_1(\omega_3) = 126.420$$

[1 P.]

berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$, einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] \\ &= S_0^0 \left(\frac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} \cdot q_1(\alpha) + \frac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} \cdot q_2(\alpha) + \frac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \cdot q_3 \right) \\ &= 107.800 \cdot \alpha + 100.000 \cdot (0{,}6 - 0{,}4\alpha) + 120.400 \cdot (0{,}4 - 0{,}6\alpha) \\ &= 108.160 - 4.440\alpha. \end{aligned}$$

[1 P.]

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = \underline{(105.200; 108.160)}$, also ein ganzes Preisintervall. *[1 P.]*

Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der Replikation entsprechen würde. *[1 P.]*

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Sensitivitäten (Duration, Konvexität)] [24 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Gegeben sei ein Zinstitel mit Laufzeit T und einer Zahlungsreihe der Form $\{Z_1, ..., Z_T\}$, wobei $Z_t > 0$ für alle $t = 1, \cdots, T$. Unterstellen Sie eine flache Zinsstrukturkurve zum fristigkeitsunabhängigen Zins r.

(i) *[1 Punkt]* Wie lautet die Barwertfunktion $P(r)$ des Zinstitels zum Zeitpunkt $t = 0$?

(ii) *[2 Punkte]* Weisen Sie nach, dass die Barwertfunktion $P(r)$ streng monoton fallend sowie konvex ist!

(b) *[7 Punkte]* Gegeben sind drei Kuponbonds jeweils mit einem einheitlichem Nennwert von $N = 100$ und einem einheitlichen Kupon von $Z = 10$, den Laufzeiten $T = 1, 2$ und 3 sowie den folgenden Marktpreisen in $t = 0$:

$$P_1 = 99,\ P_2 = 97,\ P_3 = 95.$$

(i) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie auf der Grundlage der vorstehenden Angaben die Diskontstruktur (Preise der Einheitszerobonds) $\{P(0,1), P(0,2), P(0,3)\}$ sowie

(ii) *[2 Punkte]* die Zinstruktur (Spot Rates) $\{r_0^z(1), r_0^z(2), r_0^z(3)\}$ bei zusammengesetzter Verzinsung!

(c) *[7 Punkte]* Gegeben sei ein beliebiger Zinstitel mit Barwert $P_0(r)$ unter der zum Zeitpunkt 0 bestehenden flachen Zinsstruktur der Höhe r. Sei $t > 0$ ein beliebiger Zeitpunkt.

(i) *[4 Punkte]* Welche Beziehung besteht zwischen der modifizierten Duration $\mathrm{DUR}_t^M(r)$ in t und der modifizierten Duration $\mathrm{DUR}_0^M(r)$ in 0?

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T.

(d) *[7 Punkte]* Es seien die die folgenden Preise in $t = 0$ für Zerobonds mit Nennwert $N = 1$ für verschiedene Laufzeiten gegeben:

$$P(0,1) = 0{,}88,\ P(0,2) = 0{,}79,\ P(0,3) = 0{,}73,\ P(0,4) = 0{,}70.$$

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die in $t = 0$ gültige Forward Rate (Terminzins) für eine Anlage von $t = 2$ bis $t = 3$ bei zusammengesetzter Verzinsung.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den Wert eines *Receiver*-Swaps mit Nennwert 100 €, festem Zinssatz 0,02 und Zahlungszeitpunkten 1, 2, 3, 4 zum Zeitpunkt 0.

Hinweis: Für Zeitpunkte $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ ($T_i - T_{i-1} = \delta$) ist der Wert $\Pi^p(t)$ eines *Payer-Swaps* in $t \leq T_0$ mit festem Zinssatz r, Nennwert N und Zahlungszeitpunkten $T_1, \ldots, T_n$ gegeben durch die Formel

$$\Pi^p(t) = N\left(P(t,T_0) - P(t,T_n) - r\delta\sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)\right).$$

(iii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die 4-jährige Swap-Rate zum Zeitpunkt 0.

Lösungsskizze:

(a) (i) Es gilt $P(r) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(1+r)^{-t}$. *[1 P.]*

(ii) Aus

$$\begin{aligned} P'(r) &= -\frac{\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}}{1+r} < 0 \\ P''(r) &= \frac{\sum_{t=1}^{T} t(t+1)Z_t(1+r)^{-t}}{(1+r)^2} > 0 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. *[1 P.]*, *[1 P.]*

(b) (i) Es ergeben sich die folgenden Zahlungsströme für die drei Kuponbonds:

$$\{-99, 110\},\ \{-97, 10, 110\} \text{ sowie } \{-95, 10, 10, 110\}.$$

Hieraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 99 &= 110\,P(0,1) \\ \text{(II)} \quad 97 &= 10\,P(0,1) + 110\,P(0,2) \\ \text{(III)} \quad 95 &= 10\,P(0,1) + 10\,P(0,2) + 110\,P(0,3). \end{aligned}$$

[2 P.]

Aus (I) folgt

$$P(0,1) = \frac{99}{110} = \underline{0{,}9}.$$

[0,5 P.]

Aus (II) folgt

$$P(0,2) = \frac{97 - 10\,P(0,1)}{110} = \frac{88}{110} = \underline{0{,}8}.$$

[1 P.]

Aus (III) folgt schließlich

$$P(0,3) = \frac{95 - 10\,P(0,1) - 10\,P(0,2)}{110} = \frac{78}{110} = \underline{0{,}7091}.$$

[1,5 P.]

(ii) Aus (i) folgt

$$\begin{aligned} r_0^z(1) &= \frac{1}{P(0,1)} - 1 = \underline{0{,}1111} \quad (11{,}11\%) \\ r_0^z(2) &= \sqrt{\frac{1}{P(0,2)}} - 1 = \underline{0{,}1180} \quad (11{,}80\%) \\ r_0^z(3) &= \sqrt[3]{\frac{1}{P(0,3)}} - 1 = \underline{0{,}1214} \quad (12{,}14\%). \end{aligned}$$

[2 P.]

(c) (i) Gemäß der Definition der modifizierten Duration gilt

$$\mathrm{DUR}_0^M(r) = -P_0'(r)/P_0(r) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{DUR}_t^M(r) = -P_t'(r)/P_t(r).$$

[1 P.]

Nun gilt $P_t(r) = (1+r)^t P_0(r)$ und damit $P_t'(r) = t(1+r)^{t-1}P_0(r) + P_0'(r)(1+r)^t$ *[1 P.]*, sodass

$$\begin{aligned} \mathrm{DUR}_t^M(r) &= -\frac{t(1+r)^{t-1}P_0(r) + (1+r)^t P_0'(r)}{(1+r)^t P_0(r)} \\ &= -\frac{t}{1+r} - \frac{P_0'(r)}{P_0(r)} = \mathrm{DUR}_0^M(r) - \frac{t}{1+r}. \end{aligned}$$

[2 P.]

(ii) Die Konvexität CONV(r) einer Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots Z_T\}$ ist allgemein definiert durch

$$\mathrm{CONV}(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^T t(t+1)Z_t(1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^T Z_t(1+r)^{-t}}.$$

[1 P.]

Im Falle des betrachteten Zerobonds gilt $Z_1 = \ldots = Z_{T-1} = 0$ und $Z_T = N$. Damit reduziert sich der Ausdruck für die Konvexität auf

$$\mathrm{CONV}(r) = \frac{T(T+1)N(1+r)^{-T}}{(1+r)^2 N(1+r)^{-T}} = T(T+1)(1+r)^{-2}.$$

[2 P.]

(d) (i) Die gesuchte Forward Rate ist gegeben durch

$$f_0^z(2,3) = (P(0,2)/P(0,3)) - 1 = (0{,}79/0{,}73) - 1 = \underline{0{,}0822}.$$

[2 P.]

(ii) Gemäß Hinweis ergibt sich in unserem Fall sich wegen $P(0,0) = 1$ der Wert

$$\Pi^p(0) = 100\left(1 - P(0,4) - 0{,}02\sum_{i=1}^{4} P(0,i)\right) = 100(0{,}3 - 0{,}02 \cdot 3{,}1) = 23{,}8.$$

Der Wert des *Receiver*-Swaps ergibt sich somit zu <u>- 23,8</u>. *[2 P.]*

(iii) Die Swap-Rate entspricht dem festen Zinssatz, für den der Payer-Swap bzw. der Receiver-Swap fair ist, d. h. den Wert 0 besitzt. *[1 P.]*

Die 4-jährige Swap-Rate in $t = 0$ ist daher gegeben durch

$$r_0^{\text{swap}}(4) = \frac{1 - P(0,4)}{\sum_{i=1}^{4} P(0,i)} = \frac{0{,}3}{3{,}1} = \underline{0{,}0968}.$$

[2 P.]

Aufgabe 5. *[Derivatebewertung: Binomial- und Black-Scholes-Modell] [25 Punkte]*

(a) *[18 Punkte]* Eine *(Floating Strike) Lookback Put-Option* liefert in Abhängigkeit vom Preisprozess $(S_t)_{t=0,1,2}$ der Aktie des Pharma-Konzerns „Human Health AG" zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ die zufällige Auszahlung

$$C_2^{\mathrm{LP}} := \max_{0 \le t \le 2} S_t - S_2.$$

Die Aktien der „Human Health AG" werden heute zum Kurs von 100 € pro Stück gehandelt. Zur Bewertung und Absicherung der Lookback Put-Option modellieren Sie den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t=0,1,2}$ durch ein zweiperiodiges Binomialmodell, in dem für die Aktie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 50% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 30% mit positiven Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden. Der einperiodige Zinssatz auf dem Sparbuch (Startwert per Konvention: 1 €) für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 2\%$.

(i) *[3 Punkte]* Überprüfen Sie, dass das vorliegende zweiperiodige Binomialmodell arbitrage-frei ist, und geben Sie die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten sowie für alle Szenarien $\omega \in \Omega := \{(y_1, y_2) : y_i \in \{d, u\}\}$ die Gewichte des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ explizit an.

(ii) *[3 Punkte]* Geben Sie den Kursverlauf der Aktie sowie die jeweiligen Auszahlungen C_2^{LP} der Lookback Put-Option zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ an.

(iii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie durch *risikoneutrale Bewertung* die arbitrage-freien Preise der Lookback Put-Option zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$.

(iv) *[6 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe der arbitrage-freien Preise aus (iii) die Replikationsstrategie, beginnend in $t = 0$, für die Lookback Put-Option.

(b) *[7 Punkte]* Durch Grenzübergang in zeitdiskreten Binomialmodellen resultieren Black-Scholes-Preise von Finanzderivaten.

(i) *[4 Punkte]* Geben Sie die Grenzverteilung der terminalen Aktienpreise aus den approximierenden Binomialmodellen an und erläutern Sie den Zusammenhang mit der Verteilung des Aktienkurses im Black-Scholes-Modell.

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie mithilfe entsprechender Formeln, wie man ausgehend von der Grenzverteilung mithilfe der Dichte der Standardnormalverteilung den Preis einer Europäischen Put-Option auf eine Aktie mit Ausübungspreis $K > 0$ und Fälligkeit T berechnen kann.

Achtung: Die Durchführung der Berechnung ist nicht gefordert.

Lösungsskizze:

(a) (i) „Down"-Faktor $d = 0{,}7$, „Up"-Faktor $u = 1{,}5$ und Zins $r = 0{,}02$ erfüllen die Bedingung $d < 1 + r < u$. Dies sichert die Existenz (genau) eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ und damit die Arbitragefreiheit des vorliegenden Binomialmodells. *[1 P.]*

Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ sind gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = \underline{0{,}4}$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1-q = \underline{0{,}6}$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. *[1 P.]* Damit gilt $\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1-q)^{2-N(\omega)} q^{N(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $N(\omega)$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet, d. h.

$$\mathbb{Q}[\{\omega\}] = \begin{cases} 0{,}16 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 0{,}24 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 0{,}24 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 0{,}36 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

[1 P.]

(ii) Mit „Down"-Faktor $d = 0{,}7$ und „Up"-Faktor $u = 1{,}5$ ist der Kursverlauf S_0, S_1, S_2 der Aktie gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = u^2 S_0 = 225} \\
 & \boxed{S_1 = uS_0 = 150} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 100} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = udS_0 = 105} \\
 & \boxed{S_1 = dS_0 = 70} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = d^2 S_0 = 49}
\end{tikzcd}$$

[1 P.]

Hieraus ist die terminale Auszahlung der Lookback Put-Option ablesbar:

$$C_2^{\mathrm{LP}} := \max_{0 \le t \le 2} S_t - S_2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 45 & \text{für } \omega = (u,d), \\ 0 & \text{für } \omega = (d,u), \\ 51 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

[2 P.]

(iii) Es sei C_t^{LP} der arbitrage-freie Preis der Lookback Put-Option in $t = 0, 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_1^{\mathrm{LP}}((u,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_2^{\mathrm{LP}} | \mathcal{F}_1\right](u,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\mathrm{LP}}((u,u))q + C_2^{\mathrm{LP}}((u,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}02}(0 \cdot 0{,}4 + 45 \cdot 0{,}6) = \underline{26{,}4706}, \\ C_1^{\mathrm{LP}}((d,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_2^{\mathrm{LP}} | \mathcal{F}_1\right](d,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[C_2^{\mathrm{LP}}((d,u))q + C_2^{\mathrm{LP}}((d,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}02}(0 \cdot 0{,}4 + 51 \cdot 0{,}6) = \underline{30{,}0000} \end{aligned}$$

[2 P.], *[2 P.]*

und rekursiv ergibt sich

$$\begin{aligned} C_0^{\mathrm{LP}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r} C_1^{\mathrm{LP}}\right] = \tfrac{1}{1+r}[C_1^{\mathrm{LP}}((u,\cdot))q + C_1^{\mathrm{LP}}((d,\cdot))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1{,}02}[26{,}4706 \cdot 0{,}4 + 30{,}0000 \cdot 0{,}6] = \underline{28{,}0277}. \end{aligned}$$

[2 P.]

Bemerkung: Alternativ berechnet man direkt

$$C_0^{\mathrm{LP}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_2^{\mathrm{LP}}}{(1{,}02)^2}\right] = \frac{1}{(1{,}02)^2}(0 \cdot 0{,}16 + 45 \cdot 0{,}24 + 0 \cdot 0{,}24 + 51 \cdot 0{,}36) = \underline{28{,}0277}.$$

(iv) Die in (iii) berechneten arbitrage-freien Preise entsprechen im vollständigen Binomialmodell den Kosten der perfekten Replikation in den jeweiligen Knoten. Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1{,}02; 1{,}0404)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u, \cdot)}$:

$$\begin{aligned} 225x + 1{,}0404y &= 0 \\ 105x + 1{,}0404y &= 45 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}3750}$, $y = \underline{81{,}0986}$. *[2 P.]*

$\underline{t = 1, \omega = (d, \cdot)}$:

$$\begin{aligned} 105x + 1{,}0404y &= 0 \\ 49x + 1{,}0404y &= 51 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}9107}$, $y = \underline{91{,}9103}$. *[2 P.]*

$\underline{t = 0}$:

$$\begin{aligned} 150x + 1{,}02y &= 26{,}4706 \\ 70x + 1{,}02y &= 30{,}0000 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{-0{,}0441}$, $y = \underline{32{,}4382}$. *[2 P.]*

(b) (i) Die Verteilungen der Aktienpreise zum Fälligkeitszeitpunkt T unter den Martingalmaßen der approximierenden Binomialmodellle konvergieren schwach gegen die Log-Normalverteilung $\mathcal{LN}(\ln S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$, wobei S_0 der Startkurs der Aktie ist, r die Zinsrate darstellt und σ die Volatilität bezeichnet. *[2 P.]* Dies ist ist die Verteilung der Zufallsvariable

$$S_T := S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}$$

mit $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, die unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ den terminalen Aktienpreis im Black-Scholes-Modell modelliert. *[2 P.]*

(ii) Als Grenzwert der Preise der Put-Option ergibt sich der Black-Scholes-Preis

$$C_0^{\text{put}} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_T)^+] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+].$$

[1 P.]

Wegen $\sqrt{T}X \sim \mathcal{N}(0, T)$ für $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} C_0^{\text{put}} &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}X + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+] \\ &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T})^+ \varphi(x)\,dx, \end{aligned}$$

wobei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet. Durch konkretes Berechnen des Integrals resultiert die Black-Scholes-Formel für die Put-Option. *[2 P.]*

Aufgabe 6. *[Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [25 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2, deren Verteilungen spezifiziert sind durch:

$$\mathbb{P}[X_i = 40] = 0{,}97, \mathbb{P}[X_i = -140] = 0{,}03 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda = 0{,}05$ den *Value at Risk* für die Finanzpositionen X_1 und X_2 sowie für die aggregierte Position $X_1 + X_2$. Erläutern Sie *kurz*, welche Implikation Ihr Berechnungsergebnis für die Praxisanwendung des Value at Risk hat. Welche Eigenschaft sollten daher sinnvolle Risikomaße aufweisen?

(b) *[13 Punkte]* Im einem Bericht finden Sie für eine Finanzposition X Angaben zum Value at Risk zum Niveau 0,005 sowie zum SCR (definiert über den Mean Value at Risk zum Niveau 0,005):

$$\mathrm{V@R}_{0,005}(X) = 2.290.960, \quad \mathrm{SCR}(X) = 3.090.960.$$

Sie interessieren sich jedoch zusätzlich für das Risiko, das mit dem *Average Value at Risk* (AV@R) gemessen wird. Nehmen Sie für Ihre weiteren Berechnungen vereinfachend an, dass X normalverteilt ist.

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ und die Dichte φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi^{-1}(0{,}005) = -2{,}5758$, $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}3263$, $\varphi(-2{,}3263) = 0{,}0267$.

(i) *[3 Punkte]* Leiten Sie Formeln her, mit denen Sie den $\mathrm{V@R}_{0,005}(X)$ und $\mathrm{SCR}(X)$ im Normalverteilungskontext berechnen können.

(ii) *[3 Punkte]* Definieren Sie das Risikomaß AV@R formal. Erläutern Sie *kurz* anhand von zwei Fakten, welche Defizite des V@R der AV@R behebt.

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie den AV@R von X zum Niveau 0,01.
Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X], \sigma^2(X))$ gilt $\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] + \frac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(X)$.

(iv) *[3 Punkte]* Eine weitere in der Praxis gebräuchliche Alternative zum V@R ist der *Tail Value at Risk* (TV@R). Geben Sie die formale Definition des TV@R sowie eine ökonomische Interpretation an. Bestimmen Sie den TV@R von X zum Niveau 0,01.

(c) *[5 Punkte]* Angenommen, Sie arbeiten im Aktuariat einer Schadenversicherung und modellieren den Jahresgesamtschaden S einer Versicherungssparte wie üblich als nicht-negative Zufallsvariable. Anhand der an die vorliegenden Daten gefitteten Verteilung berechnen Sie für S das Quantil zum Niveau 0,05 als 20 Mio. Euro sowie das Quantil zum Niveau 0,95 als 160 Mio. Euro. Für diese Sparte besteht ein proportionaler Rückversicherungsvertrag, sodass 30% des Jahresgesamtschadens an den Rückversicherer zediert werden. Nach Abzug der Prämienzahlung an den Rückversicherer verbleiben Ihrem Unternehmen von den vereinnahmten Prämien der Sparte 60 Mio. Euro.

Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau 0,05 für die Finanzposition X, die dem Jahresgewinn der Versicherungssparte entspricht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösungsskizze:

(a) Aus der Definition $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X + m < 0] \le \lambda\}$ folgt unmittelbar $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -40$. *[2 P.]* Die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ nimmt nur die folgenden Werte an:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 80 & \text{wenn } X_1 = X_2 = 40 \\ -100 & \text{wenn } X_1 = 40, X_2 = -140 \text{ oder } X_1 = -140, X_2 = 40 \\ -280 & \text{wenn } X_1 = X_2 = -140 \end{cases}$$

[1 P.]

Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten gilt hierbei:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 80] &= \mathbb{P}[X_1 = 40, X_2 = 40] = \mathbb{P}[X_1 = 40]\mathbb{P}[X_2 = 40] \\ &= (0{,}97)^2 = 0{,}9409 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -100] &= \mathbb{P}[X_1 = 40, X_2 = -140] + \mathbb{P}[X_1 = -140, X_2 = 40] \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 40]\mathbb{P}[X_2 = -140] \\ &= 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 0{,}0582 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -280] &= \mathbb{P}[X_1 = -140, X_2 = -140] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = -140]\mathbb{P}[X_2 = -140] \\ &= (0{,}03)^2 = 0{,}0009 \end{aligned}$$

[1 P.]

Hieraus ist ablesbar: $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) = 100$. *[1 P.]* Insbesondere gilt:

$$100 = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) > \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -80.$$

Das Ergebnis verdeutlicht, dass das Risikomaß V@R im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Damit kann V@R ökonomisch sinnvolle Diversifikation zwischen Risiken bestrafen. Hieraus können Probleme bei der Steuerung, z. B. im Kontext von Limit- und Schwellenwertsystemen, resultieren. *[1 P.]* Sinnvolle Risikomaße sollten Anreize für Diversifikation setzen und daher konvex bzw. subadditiv sein. *[1 P.]*

(b) (i) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0,005$ bestimmt durch $\lambda = \mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0]$. Hierbei gilt

$$\mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \le \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \frac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X).$$

[2 P.]

Insbesondere folgt (z. B. mit der Cash-Invarianz des Value at Risk)

$$\mathrm{SCR}(X) = \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X) + \mathbb{E}[X] = -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X).$$

[1 P.]

(ii) Der Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha.$$

[1 P.]

Dieses Risikomaß ist erstens *kohärent* und setzt insofern - im Gegensatz zum im Allgemeinen nicht sub-additiven Value at Risk - Anreize für ökonomisch sinnvolle Diversifikation. *[1 P.]* Zweitens berücksichtigt der AV@R im Gegensatz zum V@R den gesamten unteren Tail der Verteilung, sodass extreme Verluste, die mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten auftreten, erfasst werden. *[1 P.]*

(iii) Für die normalverteilte Finanzposition X mit Standardabweichung $\sigma(X)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{V@R}_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X),\\ \mathrm{SCR}(X) &= -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X),\\ \mathrm{AV@R}_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] + \tfrac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(X).\end{aligned}$$

Damit folgt aus dem gegebenen Zahlenwerk

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{SCR}(X) - \mathrm{V@R}_{0{,}005}(X) = 800.000,\ \sigma(X) = -\tfrac{\mathrm{SCR}(X)}{\Phi^{-1}(0{,}005)} = 1.200.000$$

[1 P.], *[1 P.]*

und entsprechend

$$\mathrm{AV@R}_{0{,}01} = -800.000 + \tfrac{\varphi(\Phi^{-1}(0{,}01))}{0{,}01}\cdot 1.200.000 = \underline{2.404.000}.$$

[2 P.]

(iv) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathbb{E}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

[1 P.]

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet. *[1 P.]* Für stetige Zufallsvariablen stimmt der TV@R mit dem Risikomaß AV@R überein, d. h. es gilt gemäß (iii) $\mathrm{TV@R}_{0{,}01}(X) = \underline{2.404.000}$. *[1 P.]*

(c) Der zufällige Jahresgewinn (Werte in Mio. Euro) ist gegeben durch

$$X = 60 - 0{,}7 \cdot S,$$

d. h. $X = f(S)$ für die fallende Funktion $f(s) = 60 - 0{,}7 \cdot s$. *[1 P.]* Somit gilt nach den Rechenregeln der Quantiltransformation

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_{0,05}(X) &= -q_X(0{,}05) = -q_{60-0{,}7\cdot S}(0{,}05) \\ &= -(60 - 0{,}7 \cdot q_S(0{,}95)) \\ &= -(60 - 0{,}7 \cdot 160) \\ &= \underline{52}. \end{aligned}$$

[3 P.]

Dem Jahresgewinn müssen mindestens 52 Mio. Euro hinzugefügt werden, sodass diese Finanzposition akzeptabel in Bezug auf den Value at Risk zum Niveau 0,05 wird, d. h. die Verlustwahrscheinlichkeit nach Kapitalzuführung kleiner oder gleich 0,05 ausfällt. *[1 P.]*

Aufgabe 7. *[Grundkonzepte der Risikomessung] [15 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Grenzen Sie die Begriffe „*Risiko*“ und „*Unsicherheit*“ im Sinn von Frank Knight gegeneinander ab. Erläutern Sie, wie „Unsicherheit“ modelliert werden kann, und beschreiben Sie eine Situation, in der „Unsicherheit“ vorliegt.

(b) *[6 Punkte]* Es sei ρ ein monetäres Risikomaß auf einer Menge von Finanzpositionen $\mathcal{X}$ (mathematisch: Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$).

  (i) *[3 Punkte]* Geben Sie *formelmäßig* die beiden Eigenschaften an, die ein *monetäres Risikomaß* definieren. Interpretieren Sie diese jeweils ökonomisch.

  (ii) *[3 Punkte]* Geben Sie *formelmäßig* die Zusatzeigenschaften an, unter denen das monetäre Risikomaß ρ *kohärent* ist. Interpretieren und würdigen Sie diese Eigenschaften ökonomisch.

(c) *[5 Punkte]* Für ein Referenzmaß $\mathbb{P}$ aus der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ werden mithilfe der relativen Entropie $H(\cdot|\mathbb{P})$ die folgenden monetären Risikomaße zum Parameter $\gamma > 0$ definiert:

$$\rho_{1.\gamma}(X) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \tfrac{1}{\gamma} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})\}, \quad \rho_{2,\gamma}(X) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1 : H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})\leq\gamma} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X].$$

Welche(s) dieser Maße sind/ist ein konvexes Risikomaß? Welche(s) dieser Maße sind/ist kohärent? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösungsskizze:

(a) „Risiko“ bezieht sich auf zufallsbehaftete Situationen, z. B. zufällige Zahlungen, in denen das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ – und damit die Verteilungen von Zielgrößen – bekannt sind („known unknowns“). Zufällige Ereignisse werden dagegen als unsicher bezeichnet, wenn ihre genauen Eintrittswahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind; man spricht bei „Unsicherheit“ von „unknown unknowns“. *[1 P.]*

Bei Knight’scher Unsicherheit wird häufig anstelle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$, das z. B. die Dynamik von Preisprozessen oder Zahlungen beschreiben soll, eine ganze Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen betrachtet. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$ steht dabei für eine mögliche Ausprägung der Verteilung von Preisprozessen oder Zahlungen. *[1 P.]*

Ein Beispiel für Unsicherheit ist ein Marktmodell mit einer Aktie mit Preisprozess der Form

$$S_t = S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^{t} R_k\right), \quad t = 0, 1, \dots, T$$

und einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{P} := \{\mathbb{P}^{\mu} | \mu \in [a, b] \text{ und } R_1, \ldots, R_T \text{ i. i. d. mit } R_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ unter } \mathbb{P}^{\mu}\},$$

d. h. die erwartete Rendite ist unsicher. *[2 P.]*

(b) (i) Ein Funktional $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, falls:

(1) *Inverse Monotonie:* Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$. *[0,5 P.]*

(2) *Cash-Invarianz:* Für jede reelle Zahl m gilt $\rho(X+m) = \rho(X) - m$. *[0,5 P.]*

Eigenschaft (1) besagt, dass die Risikokennziffer für eine Position Y kleiner als die Risikokennziffer einer Position X ist, wenn Y stets mindestens so viel wert ist wie X. *[1 P.]* Eigenschaft (2) bedeutet, dass Risikomaße auf einer monetären Skala messen: Wird zur Finanzposition X das Kapital m € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X + m$ um diesen Betrag. *[1 P.]*

(ii) Ein monetäres Risikomaß ρ ist kohärent, falls es zusätzlich folgende Eigenschaften besitzt:

1. *Subadditivität:* $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}$. *[0,5 P.]*
2. *Positive Homogenität:* $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$. *[0,5 P.]*

Subaddivität spiegelt wider, dass ökonomisch sinnvolle Diversifikation das Risiko reduziert, und ist zentral für wirksame Limit- und Schwellenwertsysteme in der Praxis: Durch Einhalten vorgegebener Schranken für Einzelrisiken kann auch das Risiko der Gesamtposition kontrolliert werden. *[1 P.]* Die positive Homogenität besagt, dass eine Erhöhung des Exposures das Risiko um denselben Faktor erhöht. Diese Eigenschaft kann jedoch bedingt durch Konzentrations- und Liquiditätsrisiken verletzt sein und ist insofern kritisch zu sehen. *[1 P.]*

Bemerkung: In der Definition kann Subadditivität durch Konvexität ersetzt werden:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{X},\ \alpha \in [0, 1].$$

In diesem Fall implizieren Konvexität im Spezialfall $\alpha = 0{,}5$ und positive Homogenität unmittelbar die Subadditivität. Umgekehrt folgt bei positiver Homogenität aus Subadditivität die Konvexität.

(c) Konvexe Risikomaße besitzen (unter milden Voraussetzungen) eine „robuste Darstellung“. Umgekehrt kann mithilfe einer Teilmenge $\mathcal{Q}$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und einer Straffunktion $\alpha : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ ein konvexes Risikomaß auf $\mathcal{X}$ durch die „robuste Darstellung“ definiert werden:

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}.$$

[1 P.]

Für konvexe Risikomaße besteht Kohärenz genau dann, wenn $\alpha(\mathbb{Q}) \in \{0, \infty\}$ für jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ gilt. In diesem Fall reduziert sich die robuste Darstellung zu

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$$

für die Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\widetilde{\mathcal{Q}} := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} | \alpha(\mathbb{Q}) = 0\}$. *[1 P.]*

Mit diesen Kriterien sind sowohl $\rho_{1,\gamma}$ als auch $\rho_{2,\gamma}$ konvexe Risikomaße *[2 P.]* , jedoch ist nur $\rho_{2,\gamma}$ kohärent. *[1 P.]*

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [17 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2 sowie einem Korrelationskoeffizienten von $\rho(R_1, R_2) = 0{,}25$.

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie zunächst die Größe x_{MVP}, wobei $(x_{\text{MVP}}, 1 - x_{\text{MVP}})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie nun die Größe x_{OPT}, wobei $(x_{\text{OPT}}, 1 - x_{\text{OPT}})$ die Investmentgewichte des optimalen Portfolios bezeichnen! Gehen Sie dabei davon aus, dass der Investor die folgende Präferenzfunktion besitzt:

$$U(R) = \mathbb{E}[R] - 5\mathrm{Var}(R).$$

(b) *[4 Punkte]* Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form für die (μ, σ)-Koordinaten der (rein riskanten) Randportfolios (lokal varianzminimalen Portfolios):

$$\sigma^2 = 10\mu^2 - 2\mu + 0{,}25.$$

Wie lautet der effiziente Rand, wobei μ als Funktion von σ darzustellen ist?

(c) *[3 Punkte]* Gegeben sei nun ein Portfolio aus zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Weisen Sie nach, dass für jedes (feste) x $(0 \leq x \leq 1)$, wobei x das anteilige Investment in die erste Aktie bezeichne, die Portfolio-Varianz $\sigma_\rho^2(x)$ monoton steigend im Korrelationskoeffizienten $\rho := \rho(R_1, R_2)$ ist.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $R = xR_1 + (1-x)R_2$, $\sigma_i^2 := \mathrm{Var}(R_i)$, $i = 1, 2$, sowie $\rho(R_1, R_2) = 0{,}25$ gilt:

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}(R) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 0{,}5x(1-x)\sigma_1\sigma_2.$$

[1 P.]

Entsprechend lautet die Bedingung erster Ordnung für das varianzminimale Portfolio

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}x} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 0{,}5\sigma_1\sigma_2 - x\sigma_1\sigma_2 \\ &= 2x(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_2^2 + 0{,}5\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

[2 P.]

und hieraus folgt insgesamt

$$x_{\text{MVP}} = \frac{\sigma_2^2 - 0{,}25\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2}.$$

[1 P.]

(ii) Mit $R = xR_1 + (1-x)R_2$, $\mu_i := \mathbb{E}[R_i]$, $\sigma_i^2 := \mathrm{Var}(R_i)$, $i = 1, 2$, sowie $\rho(R_1, R_2) = 0{,}25$ gilt

$$\begin{aligned} U(R) &= \mathbb{E}[R] - 5\mathrm{Var}(R) \\ &= (\mu_1 - \mu_2)x + \mu_2 - 5[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 0{,}5x(1-x)\sigma_1\sigma_2] \end{aligned}$$

[1,5 P.]

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}U(R)}{\mathrm{d}x} \\ &= (\mu_1 - \mu_2) - 5[2x(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_2^2 + 0{,}5\sigma_1\sigma_2] \end{aligned}$$

[2 P.]

und damit insgesamt

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{OPT}} &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) + 10(\sigma_2^2 - 0{,}25\sigma_1\sigma_2)}{10(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2)} \\ &= \frac{(\mu_1 - \mu_2)/10 + (\sigma_2^2 - 0{,}25\sigma_1\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 0{,}5\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}$$

[2,5 P.]

(b) Zu lösen ist die quadratische Gleichung

$$10\mu^2 - 2\mu + (0{,}25 - \sigma^2) = 0.$$

[1 P.]

Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40(0{,}25 - \sigma^2)}}{20} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{40\sigma^2 - 6}}{20} \\ &= 0{,}1 \pm \sqrt{0{,}1\sigma^2 - 0{,}015}. \end{aligned}$$

[2 P.]

Der effiziente Rand entspricht dem oberen Ast dieser Wurzelfunktion, d. h.

$$\mu = 0{,}1 + \sqrt{0{,}1\sigma^2 - 0{,}015}.$$

[1 P.]

(c) Es gilt

$$\sigma_\rho^2(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\rho x(1-x)\sigma_1\sigma_2.$$

[1 P.]

Hieraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\rho^2(x)}{\mathrm{d}\rho} = 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \geq 0.$$

[1 P.]

Damit ist σ_ρ^2 für $0 \leq x \leq 1$ monoton steigend in ρ. *[1 P.]*

Aufgabe 9. *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [16 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Gegeben sei ein rein riskantes Portfolio P, d. h. ein Portfolio aus der Menge der durch reine Aktienmischung realisierbaren Portfolios. Betrachten Sie nun ein Mischportfolio, das mit einem bestimmten Anteil x ($0 \leq x < \infty$) in P investiert ist und mit dem restlichen Anteil in die sichere Anlage zum risikofreien Zins r_0.

(i) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gesamtrendite R_x des Mischportfolios formal dar!

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von R_x!

(iii) *[3 Punkte]* Charakterisieren Sie alle realisierbaren $(\mathbb{E}[R_x], \sigma(R_x))$-Kombinationen, indem Sie $\mathbb{E}[R_x]$ als Funktion von $\sigma(R_x)$ darstellen! Welcher Zusammenhang besteht dabei mit der sogenannten *Sharpe-Ratio*?

(b) *[9 Punkte]* Im Rahmen der CAPM-Modellwelt seien die beiden Wertpapierportfolios mit den Renditen R_1 und R_2 gemäß der Wertpapiermarktlinie korrekt bewertet. Die Erwartungswerte und Beta-Faktoren seien gegeben durch:

$$\mathbb{E}[R_1] = 0{,}04, \quad \beta_1 = 0{,}2,$$
$$\mathbb{E}[R_2] = 0{,}15, \quad \beta_2 = 1{,}2.$$

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie den sicheren Zins r_0 sowie die erwartete Rendite $\mathbb{E}[R_M]$ des Marktportfolios auf Basis der Wertpapiermarktlinie!

(ii) *[2 Punkte]* Unterstellen Sie, dass auf dem Markt ein Wertpapierportfolio mit einer erwarteten Rendite von 15% und einem Beta-Faktor von 1,5 existiert. Weist dieses Wertpapierportfolio eine Gleichgewichtsrendite auf?

(iii) *[3 Punkte]* Unterstellen Sie nun, dass für die Standardabweichung des Marktportfolios $\sigma(R_M) = 0{,}2$ gilt und dass das Portfolio mit der Rendite R_2 Erwartungswert-Varianz-optimal ist. Berechnen Sie die Standardabweichung von R_2!

Lösungsskizze:

(a) (i) Für die Rendite des Mischportfolios gilt

$$R_x = x \cdot R_P + (1 - x) \cdot r_0.$$

[1 P.]

(ii) Hieraus folgt mit $\mu_P := \mathbb{E}[R_P]$ und $\sigma_P^2 := \mathrm{Var}(R_P)$

$$\begin{aligned} \mu &:= \mathbb{E}[R_x] = x \cdot \mu_P + (1-x) \cdot r_0 = r_0 + x \cdot (\mu_P - r_0) \\ \sigma^2 &:= \mathrm{Var}(R_x) = x^2 \cdot \sigma_P^2 \\ \sigma &= x \cdot \sigma_P. \end{aligned}$$

[1,5 P.], [1 P.], [0,5 P.]

(iii) Aus (ii) folgt $x = \sigma/\sigma_P$ *[1 P.]* und damit

$$\mu = r_0 + \frac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\sigma = r_0 + \mathrm{SR}(R_P)\sigma,$$

[2 P.]

wobei $\mathrm{SR}(R_P) = (\mu_P - r_0)/\sigma_P$ die Sharpe-Ratio von R_P bezeichne.

(b) (i) Aus der Gleichung für die Wertpapiermarktlinie ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0{,}15 &= r_0 + 1{,}2(\mathbb{E}[R_M] - r_0) \\ 0{,}04 &= r_0 + 0{,}2(\mathbb{E}[R_M] - r_0). \end{aligned}$$

[2 P.]

Hieraus resultiert zunächst $\mathbb{E}[R_M] - r_0 = 0{,}11$ und weiter $r_0 = \underline{0{,}018}$ sowie $\mathbb{E}[R_M] = \underline{0{,}128}$. *[2 P.]*

(ii) Bei einem Beta von 1,5 ergibt sich im CAPM-Gleichgewicht

$$\mathbb{E}[R] = 0{,}018 + 1{,}5 \cdot 0{,}11 = 0{,}183.$$

[1 P.]

Relativ zur Gleichgewichtsrendite weist das Portfolio mithin eine zu geringe erwartete Rendite auf. *[1 P.]*

(iii) Die Menge aller optimalen Portfolios ist allgemein charakterisiert durch die Kapitalmarktlinie

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R) = 0{,}018 + \frac{0{,}11}{0{,}2}\sigma(R).$$

[2 P.]

Dies impliziert im vorliegenden Fall

$$\sigma(R_2) = (\mathbb{E}[R_2] - 0{,}018)/0{,}55 = 0{,}132/0{,}55 = \underline{0{,}24}.$$

[1 P.]

<u>Alternative Lösung:</u>

Wenn Portfolio 2 optimal ist, muss $\rho(R_2, R_M) = 1$ gelten. *[1 P.]*

Aus $\beta_2 = 1{,}2$ resultiert dann

$$1{,}2 = \beta_2 = \frac{\mathrm{Cov}(R_2, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \frac{\rho(R_2, R_M)\sigma(R_2)}{\sigma(R_M)} = \frac{\sigma(R_2)}{0{,}2}$$

[1,5 P.]

und damit

$$\sigma(R_2) = 0{,}24.$$

[0,5 P.]