



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 2. Juni 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias



Aufgabe 1. [Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]

- (a) [12 Punkte] [Sensitivitäten] Es seien der folgende Zahlungsstrom, der zugehörige bewertungsrelevante Zero-Zinssatz (hier: laufzeitunabhängig) sowie entsprechende Diskontfaktoren gegeben. Die Zahlungen erfolgen jeweils am Ende der Jahre 5 und 10.

Hinweis: Nutzen Sie zur schnelleren Berechnung die gegebenen Diskontfaktoren.

	Jahr 5	Jahr 10
Zahlungsstrom	20	200
Zins z	2%	2%
$q^{\text{Jahr}} = (1 + z)^{-\text{Jahr}}$	0,906	0,820
$\check{q}^{\text{Jahr}} = (1 + z + 0,2\%)^{-\text{Jahr}}$	0,897	0,804

- (i) [2 Punkte] Berechnen Sie den *heutigen Marktwert* des Zahlungsstroms.
- (ii) [4 Punkte] Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Zins-Duration* des Zahlungsstroms, indem Sie eine Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte) verwenden.
- (iii) [4 Punkte] Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 10 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte).
- (iv) [2 Punkte] Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 5 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte). Sie können – sofern möglich – bisherige Ergebnisse verwenden.
- (b) [10 Punkte] [Allgemeine Modelle] Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind.
- (i) [2 Punkte] Besitzen zwei Paare von Zufallsvariablen (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) die gleichen Randverteilungen und (Pearson-)Korrelationen, so ist ihr Risikoprofil identisch.
- (ii) [2 Punkte] Beträgt die (approximierte, relative) effektive Zins-Duration eines Finanztitels gleich null, dann besitzt dieser kein Zinsänderungsrisiko.
- (iii) [2 Punkte] Der Verkäufer einer Europäischen Call- oder Put-Option profitiert ceteris paribus vom Anstieg der Volatilität des Basiswertes.
- (iv) [2 Punkte] Bei der Beschaffung von Modell-Inputs kann ein intransparenter Markt Schwierigkeiten bereiten, da auf diesem kein Handel stattfindet.
- (v) [2 Punkte] Es sei ein fixer positiver Zahlungsstrom gegeben. Dann kann je nach Ausgestaltung die Zinsduration positiv sowie auch negativ sein.
- (c) [3 Punkte] [Geld, Blockchain & Crypto-Assets] Nennen Sie die drei durch die Deutsche Bundesbank definierten Funktionen von Geld.



Lösungsskizze:

- (a) (i) Für den Zahlungsstrom mit Laufzeit von 10 Jahren und Zahlungen c_5 und c_{10} sowie assoziiertem Diskontfaktor $q = (1 + \text{Zins})^{-1}$ ist der Marktwert gegeben durch

$$\begin{aligned} MW &= c_5 \cdot q^5 + c_{10} \cdot q^{10} \\ &\approx 18,120 + 164,000 \\ &\approx 182,120. \end{aligned}$$

- (ii) Unter dem veränderten Diskontfaktor $\tilde{q} = (1 + \text{Zins} + 0,02\%)^{-1}$ resultiert der Marktwert

$$\begin{aligned} \widetilde{MW} &= c_5 \cdot \tilde{q}^5 + c_{10} \cdot \tilde{q}^{10} \\ &\approx 17,940 + 160,800 \\ &\approx 178,740. \end{aligned}$$

Berechnung der approximierten effektiven Zinsduration:

$$\begin{aligned} D_{eff} &= - \frac{\widetilde{MW} - MW}{0,2\% \cdot MW} \\ &= - \frac{178,740 - 182,120}{0,002 \cdot 178,740} \\ &\approx 9,280. \end{aligned}$$

- (iii) Berechnung der approximierten effektiven Key-Rate-Duration zu Jahr 10:

$$\begin{aligned} KR D_{eff}^{(10)} &= - \frac{c_{10} \cdot \tilde{q}^{10} - c_{10} \cdot q^{10}}{0,2\% \cdot MW} \\ &\approx - \frac{160,800 - 164,000}{0,002 \cdot 182,120} \\ &\approx 8,785. \end{aligned}$$

- (iv) Da Zahlungen nur in Jahr 5 und 10 stattfinden, gilt in diesem Fall für die Summe der Key-Rate-Durationen:

$$\begin{aligned} D_{eff} &= KR D_{eff}^{(5)} + KR D_{eff}^{(10)} \\ \Leftrightarrow KR D_{eff}^{(5)} &= D_{eff} - KR D_{eff}^{(10)} \\ &\approx 9,280 - 8,785 \\ &\approx 0,495. \end{aligned}$$

- (b) (i) Falsch, denn die (Pearson-) Korrelation beschreibt nur in Spezialfällen die Abhängigkeitsstruktur eindeutig. Im Allgemeinen ist diese jedoch durch die zugrunde liegende Copula bestimmt. Deshalb kann das Risikoprofil unterschiedlich sein.



- (ii) Falsch, es könnte sich um eine lokale Eigenschaft handeln. Weiterhin beschreiben Durationen nur Änderungen bzgl. paralleler Zinsbewegungen.
 - (iii) Falsch, denn der Käufer einer Europäischen Call- oder Put-Option profitiert *ceteris paribus* vom Anstieg der Volatilität des Basiswertes.
 - (iv) Falsch: intransparenter Markt: keine öffentlichen Daten verfügbar; inaktiver Markt: kein Handel
 - (v) Falsch, denn diese kann nur positiv sein. Das leitet sich direkt aus der Definition her.
- (c) Sparmittelfunktion, Tauschmittelfunktion, Wertmessfunktion



Aufgabe 2. [Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]

(a) [7 Punkte] [Kapitalanlagen der Versi Holding AG]

- (i) [2 Punkte] Eine von der Versi Holding AG emittierte Anleihe wurde von einer Ratingagentur in die höchste Ratingkategorie AAA (Prime; höchste Bonität) eingestuft. Eine zweite Ratingagentur stuft dieselbe Anleihe in die zweithöchste Ratingkategorie AA+ (High grade; sehr gute bis hohe Bonität) ein. Welches Bonitätsrating hat die entsprechende Aktie der Versi Holding AG? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (ii) [2 Punkte] Begründen Sie, warum der erwartete Verlust durch einen Zahlungsausfall bei einem Swap kleiner ist als bei einem Darlehen mit dem gleichen Nominalvolumen.
- (iii) [3 Punkte] Ein Finanzmanager der Versi Holding AG behauptet, er hätte für das Unternehmen einen Kredit über einen Zeitraum von 5 Jahren mit einem festen Zinssatz i.H.v. 4,7% abgeschlossen. Dies hätte er dadurch erreicht, dass er einen Fixed-for-floating Payer-Swap (Laufzeit: 5 Jahre; Fixed-leg: 3,2% p. a.; Floating-leg: 12-Monats-EURIBOR) abgeschlossen habe und eine variabel verzinsliche Anleihe (Laufzeit: 1 Jahr; Referenzzins: 12-Monats-EURIBOR; Kupon: 12-Monats-EURIBOR + 1,5% p. a. begeben hat. Um die Fristenkongruenz (5 Jahre) sicherzustellen, plant der Finanzmanager die variabel verzinsliche Anleihe für den entsprechenden Zeitraum einjährig rollierend zu begeben. Überprüfen Sie die Behauptung des Finanzmanagers.

(b) [11 Punkte] [Inflation]

- (i) [3 Punkte] Die Inflation notierte in Deutschland im Oktober 2022 bei 10,6% und damit so hoch wie seit rund 50 Jahren nicht mehr. Nennen Sie zwei wesentliche Gründe für die hohen Inflationsraten und erläutern Sie diese prägnant.
- (ii) [6 Punkte] Gegeben seien zwei inflationsindexierte Anleihen (Inflation Linked Bonds; ILBs):

- eine kapitalindexierte Anleihe (CIB), und
- eine kuponindexierte Anleihe (IIB).

Für beide Anleihen gelten folgende Konditionen:

- Laufzeit 4 Jahre,
- Nominalwert 1.000 €,
- realer Kupon 3% p. a.



Die Inflationsrate beträgt 7% (Jahr 1), 11% (Jahr 2), 5% (Jahr 3) und 3% (Jahr 4). Geben Sie für CIB und IIB die jeweiligen Cash-Flows der Kupon- und Nominalwertrückzahlung für die Jahre 1 bis 4 an. Begründen Sie auf Basis der Cash-Flows, welche der beiden Anleihen den besseren Inflationschutz bietet.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass kein Indexation-Lag existiert.

(iii) [2 Punkte] Nennen Sie zwei Nachteile von ILBs.

(c) [7 Punkte] [Private-Equity-Investments]

(i) [4 Punkte] Erläutern Sie, was man im Rahmen von Private-Equity-Investments unter Venture-Capital und Buyout-Capital-Finanzierungen versteht und grenzen Sie diese beiden Arten hinsichtlich der Aspekte „Entwicklungsphasen“ und „Investitionsrisiko“ voneinander ab.

(ii) [3 Punkte] Nennen Sie zwei Exitstrategien von Private-Equity-Investments und beschreiben Sie diese prägnant.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Beurteilung der Anlagequalität von Anleihen basiert auf einer Bonitätsbewertung des emittierenden Unternehmens. Das Rating spiegelt die Höhe der Wahrscheinlichkeit wider, dass das emittierende Unternehmen seinen Zahlungsverpflichtungen nachkommen wird. Die Anlagequalität bei Aktien bezieht sich dagegen nicht auf die Bonität des Unternehmens, d. h. die Aktie der Versi Holding AG hat kein Bonitätsrating.

(ii) In einem Zinsswap hängt das Exposure eines Finanzinstituts von der Differenz eines festen zu einem variablen Zinssatz ab. Es besitzt keine Exposure gegenüber dem Nominalbetrag. Bei einem Darlehen kann jedoch der gesamte Nominalbetrag verloren gehen.

(iii) Der Zinssatz des abgeschlossenen Kreditgeschäfts ist nicht fest wie vom Finanzmanager behauptet. Z. B. kann die Versi Holding AG im Falle der Verschlechterung seines Ratings das variabel verzinsliche Darlehen nicht zu EURIBOR plus 150 bps rollen, sondern muss höhere Refinanzierungskosten bezahlen. Dadurch würde sich jedoch auch der effektive Festzinssatz erhöhen, sodass die Behauptung, der Finanzmanager „hätte einen Kredit über einen Zeitraum von 5 Jahren mit dem festen Zinssatz i.H.v. 4,7% abgeschlossen“, falsch ist.

(b) (i) Gründe für die aktuell hohe Inflation:

- Steigende/erhöhte Nachfrage: Die Verbraucher haben ihr persönliches Konsumverhalten nach den Lockerungen der Corona-Restriktionen geändert und in diesem Kontext aufgestaute Anschaffungen von Waren und Gütern oder auch Unternehmungen entsprechend nachgeholt.



- Sinkendes/geringeres Angebot: Die steigende Nachfrage trifft gleichzeitig auf ein geringeres Angebot, welches infolge der globalen Corona-Krise und den damit verbundenen Lieferkettenproblemen reduziert wurde. Vor diesem Hintergrund stiegen auch die Produktionskosten von Waren und Gütern der Unternehmen, welche in der Regel an die Verbraucher weitergegeben werden.
- Gleichzeitig kommt es infolge des Ukraine-Russland-Konflikts zusehends zu Engpässen bei wichtigen Rohstoffen, welche das Angebot verknappen – wie etwa im Energie-oder Getreidesektor.

Hinweis: Es waren nur zwei Gründe anzuführen und zu erläutern.

(ii) Darstellung der Cash-Flows in den Zeitpunkten 1, . . . , 4:

1. CIB:

ZP	realer Kupon	Inflationsrate	Infl.-Index	Kupon-CF in €	Rückzahlungs-CF in €
1	3%	7%	1,07	32,10	
2	3%	11%	1,19	35,63	
3	3%	5%	1,25	37,41	
4	3%	3%	1,28	38,53	1.284,50

2. IIB:

ZP	realer Kupon	Inflationsrate	Kupon-CF in €	Rückzahlungs-CF in €
1	3%	7%	100	
2	3%	11%	140	
3	3%	5%	80	
4	3%	3%	60	1.000

Der Vergleich der Cash-Flows zeigt, dass beim IIB der Inflationsausgleich nur über die Kuponzahlungen erfolgt und die Rückzahlung zum vorher festgelegten Nominalwert stattfindet. Beim CIB ergeben sich zwar im Vergleich zum IIB (aufgrund einer anderen Berechnungsmetrik) niedrigere Kuponzahlungen, dafür erfolgt die Rückzahlung jedoch mit dem indexierten Nominalwert. Der Rückzahlungs-CF im Zeitpunkt 4 ist wiederum der maßgebliche Treiber dafür, dass der CIB in der hier vorliegenden Situation den besseren Inflationsschutz bietet.

(iii) Nachteile: [Andere Nennungen sind möglich.]

- Der Markt für inflationsindexierte Anleihen ist eng. – Beispiel Deutschland: Inflationsindexierte Bundeswertpapiere (ILBs) sind zwar heute



etablierter Bestandteil der Finanzierungsstrategie des Bundes; ihr jährlicher Anteil am Auktionsvolumen beträgt seit 2006 im Schnitt aber lediglich ca. 3%. Entsprechend gering ist die Liquidität, einhergehend mit relativ großen Spannen zwischen An- und Verkaufspreisen. Grund hierfür ist auch ein hoher Anteil von risikoscheuen Langfristinvestoren in inflationsindizierten Anleihen (buy and hold).

- Diskrepanz zwischen der aus Unternehmenssicht relevanten Inflation und der den inflationsindexierten Anleihen zugrunde liegenden Inflation. Z. B. basiert die Inflationindexierung sowohl für Nennwert als auch für die Kuponzahlungen bei den ILBs auf dem Harmonisierten Verbraucherpreisindex (HVPI) des Euroraums (Gesamtindex ohne Tabak). Für ein Unternehmen spielt jedoch auch die Lohninflation eine maßgebliche Rolle, sodass mitunter deutliche Unterschiede bei Inflationsindizes auftreten können.

(c) (i) Venture-Capital (VC) vs. Buyout-Capital (BC):

- *Venture-Capital (VC)*: Das Engagement von Venture-Capital-Gesellschaften ist i. A. auf bestimmte Entwicklungsphasen (Seed Stage, Early Stage, Expansion Stage) des Zielunternehmens begrenzt und währenddessen auf die Erzielung eines maximalen Wertzuwachses ausgerichtet. Dieses Risiko- oder Wagniskapital wird als Kapitalunterstützung meist benötigt, um Produkte zu entwickeln oder erstes Umsatzwachstum zu finanzieren. Das Risiko des unternehmerischen Scheiterns ist in diesen Entwicklungsphasen relativ hoch, da noch nicht absehbar ist, ob sich das Unternehmen und die geplanten Produkte am Markt durchsetzen werden.
- *Buyout-Capital (BC)*: Zu Buyout-Investitionen gehören MBOs, MBIs und Turnaround-Investitionen. Es geht um Investitionen in reife Unternehmen, die mit ihren Produkten oder Dienstleistungen bereits länger am Markt etabliert sind. Das Investitionsrisiko ist beim Buyout-Capital entsprechend geringer als in früheren Phasen.

(ii) Exit-Strategien:

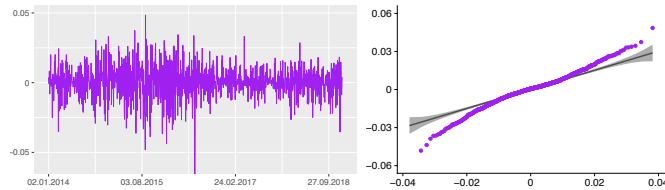
- *IPO*: Neuemission, d. h. die Beteiligung wird teilweise oder gesamthaft durch die Emission von Aktien am Kapitalmarkt platziert.
- *Trade-Sale*: Beteiligung wird nach deren (Weiter-)Entwicklung an ein Unternehmen verkauft.
- *Secondary Purchase*: Beteiligung wird an einem anderen Finanzinvestor weitergereicht (das Unternehmen bleibt somit weiterhin PE-finanziert).

Hinweis: Es waren nur zwei Exit-Strategien zu nennen.

Aufgabe 3. [Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]

Angenommen, Sie arbeiten im Asset Management und befassen sich mit der Analyse von Finanzmarktzeitreihen sowie der Modellierung von Kapitalmarktprodukten.

- (a) [8 Punkte] Zur Ad-hoc-Analyse der täglichen Log-Renditen eines Aktienindizes haben Sie die historischen Log-Renditen visualisiert sowie einen Q-Q-Plot zum Vergleich der empirischen Renditeverteilung mit der Normalverteilung erstellt.



- (i) [2 Punkte] Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesen beiden Graphiken in Bezug auf wesentliche empirische Eigenschaften der vorliegenden Renditezeitreihe?
- (ii) [3 Punkte] Beschreiben Sie die mathematische Struktur des GARCH-Zeitreihenmodells. Erklären Sie anhand dieser Struktur explizit, welche zentrale empirische Eigenschaft von Finanzmarktzeitreihen durch das GARCH-Modell erfasst wird.
- (iii) [3 Punkte] Ein*e Kolleg*in aus Ihrer Abteilung schlägt - in Kenntnis der obigen Analysen - vor, die Dynamik des Aktienindizes mit dem Black-Scholes-Modell zu modellieren. Beurteilen Sie diesen Vorschlag und begründen Sie Ihre Beurteilung anhand von zwei Fakten.
- (b) [5 Punkte] Ihre Auswertung historischer Zeitreihen der jährlichen Renditen eines Immobilienindizes legt nahe, dass die beobachtbaren Renditen einem *autoregressiven Prozess 1. Ordnung* der Form $R_t = \alpha + \beta R_{t-1} + Z_t$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, mit einem zentrierten weißen Rauschen (Z_t) ($\mathbb{E}[Z_t] = 0$) folgen sowie eine zeitunabhängige mittlere Rendite und eine zeitunabhängige Volatilität aufweisen.

Hinweis: Es gilt $\text{Cov}(R_{t-1}, Z_t) = 0$, $t \in \mathbb{N}$.

- (i) [1 Punkt] Berechnen Sie den Wert ρ der Autokorrelation 1. Ordnung in der beobachtbaren Renditezeitreihe.
- (ii) [4 Punkte] Aufgrund der Ankerfunktion von Bewertungsgutachten wirken sich die tatsächlichen Rendite-Innovation R_t^* , die unabhängig von der Vergangenheit sind, nur anteilig auf die beobachtbare Rendite R_t aus. Dies wird modellhaft erfasst durch $R_t = \rho R_{t-1} + (1 - \rho)R_t^*$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[R_t^*], \quad \text{Var}(R_t^*) = \frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2} \text{Var}(R_t).$$

Erläutern Sie *kurz*, warum die Varianz in Bezug auf die Autokorrelation bereinigt werden muss.



- (c) [12 Punkte] In Asset-Modellen wird die Dynamik von Preisprozessen häufig durch Stochastische Differentialgleichungen (SDEs) beschrieben.
- (i) [2 Punkte] Gehen Sie davon aus, dass die Diskontierung im zeitstetigen Finanzmarktmodell durch einen Geldmarktfonds mit Zinsrate r erfolgt. Grenzen Sie die Form der SDE eines Asset-Preisprozesses unter dem real-world-Maß \mathbb{P} und einem Martingalmaß \mathbb{Q} in Bezug auf den Drift-Term gegeneinander ab. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- (ii) [5 Punkte] Geben Sie mit Begründung an, welcher der folgenden stochastischen Prozesse einen diskontierten Aktienpreisprozess unter einem Martingalmaß beschreiben kann:
- $X_t := 3(W_t)^2 + 2, t \geq 0,$
 - $Y_t := \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0.$
- (iii) [2 Punkte] Erläutern Sie *kurz*, warum in der Praxis die Volatilität eines Asset-Preisprozesses selbst als stochastischer Prozess modelliert wird.
- (iv) [3 Punkte] Geben Sie eine Modifikation des Heston-Modells zur Modellierung der stochastischen Volatilität an, mit der Phasen unterschiedlicher Volatilität an Märkten modelliert werden können.

Lösungsskizze:

- (a) (i) Die Visualisierung der Renditezeitreihe verdeutlicht, dass die Volatilität im Zeitverlauf variiert. Bei Finanzmarktzeitreihen treten extreme Renditen in Clustern auf (*Volatility Clustering*). Die Q-Q-Plots weisen eine „invertierte S-Form“ auf und weichen von einer Geraden ab. Dies bedeutet, dass die Normalverteilung kein geeignetes Modell für die Verteilung täglicher Renditen ist.
- (ii) Ist $(Z_t)_{t \in T}$ ein striktes Weißes Rauschen $\text{SWN}(0, 1)$, so heißt ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ GARCH(p,q)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t \in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0.$$

Sind beim GARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \dots, |X_{t-p}|$ groß, so überträgt sich dies auf die Volatilität σ_t und - modulo Wirkung des Shocks Z_t aus dem Rauschen - auf $|X_t|$. Ebenfalls führen hohe zurückliegende Volatilitäten $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$ per Formel zu einer hohen Volatilität σ_t . Insgesamt werden persistente Perioden hoher Volatilität (Volatilitätscluster) abgebildet.



(iii) Der Vorschlag ist nicht sachgerecht und daher abzulehnen. Im Widerspruch zu obigen Graphiken (bzw. den Schlussfolgerungen in (i)) weist das Black-Scholes-Modell

- eine konstante Volatilität
- sowie normalverteilte Log-Renditen auf.

(b) (i) Es gilt

$$\rho(R_t, R_{t-1}) = \frac{\text{Cov}(R_t, R_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(R_t)}\sqrt{\text{Var}(R_{t-1})}} = \frac{\text{Cov}(\alpha + \beta R_{t-1} + Z_t, R_{t-1})}{\text{Var}(R_{t-1})} = \beta \frac{\text{Cov}(R_{t-1}, R_{t-1})}{\text{Var}(R_{t-1})} = \beta.$$

(ii) Mit $\rho = \beta$ gilt wegen $\mathbb{E}[Z_t] = 0$

$$\mathbb{E}[R_t] = \alpha + \rho \mathbb{E}[R_{t-1}], \quad \text{Var}(R_t) = \rho^2 \text{Var}(R_{t-1}) + \text{Var}(Z_t),$$

also wegen $\mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[R_{t-1}]$ und $\text{Var}(R_t) = \text{Var}(R_{t-1})$ insbesondere

$$\mathbb{E}[R_t] = \frac{\alpha}{1-\rho}, \quad \text{Var}(Z_t) = (1-\rho^2) \text{Var}(R_t).$$

Weiterhin liefert Umstellen und Einsetzen der Regressionsgleichung

$$R_t^* = \frac{1}{1-\rho}(R_t - \rho R_{t-1}) = \frac{1}{1-\rho}(\alpha + Z_t).$$

Daher gilt wegen $\mathbb{E}[Z_t] = 0$

$$\mathbb{E}[R_t^*] = \frac{\alpha}{1-\rho} = \mathbb{E}[R_t],$$

$$\text{Var}(R_t^*) = \frac{1}{(1-\rho)^2} \text{Var}(Z_t) = \frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2} \text{Var}(R_t).$$

Ohne Bereinigung der Autokorrelation würde die tatsächliche Volatilität der Renditen unterschätzt und z. B. im internen Modell ein zu geringes Immobilienrisiko ausgewiesen werden.

(c) (i) Unter einem Martingalmaß \mathbb{Q} ist der Drift-Term durch die Zinsrate r festgelegt, d. h. für einen Asset-Preisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ gilt

$$dS_t = S_t(\sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} + r dt),$$

wobei $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter \mathbb{Q} bezeichnet und im Allgemeinen $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ einen stochastischen Volatilitätsprozess darstellt. Anderenfalls würde per Itô-Formel bei der Umrechnung auf die SDE des diskontierten Asset-Preisprozesses der Drift-Term nicht verschwinden, sodass die Martingalbedingung verletzt wäre. Unter dem real-world Maß \mathbb{P} bestehen dagegen (jenseits technischer Anforderungen für die Lösbarkeit der SDE) keine Einschränkungen bezüglich des Drift-Terms, d. h. es gilt mit einem \mathbb{P} -Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t \geq 0}$ und einem im Allgemeinen stochastischen Drift-Prozess $(\mu_t)_{t \geq 0}$

$$dS_t = S_t(\sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} + \mu_t dt).$$



(ii) Die Martingaleigenschaft kann z. B. anhand der SDE ablesen werden: Verschwindet der dt -Term (Drift), so ist der Itô-Prozess ein (lokales) Martingal, anderenfalls nicht.

- $X_t := 3(W_t^Q)^2 + 2, t \geq 0$:

- Anwendung der Itô-Formel (Version 1) auf $X_t = f(W_t^Q)$ mit $f(w) = 3w^2 + 2$ (Ableitungen: $f'(w) = 6w, f''(w) = 6$)

$$df(W_t^Q) = f'(W_t^Q) dW_t^Q + \frac{1}{2} f''(W_t^Q) dt$$

- Fazit:

$$dX_t = df(W_t^Q) = 6W_t^Q dW_t^Q + \frac{1}{2} \cdot 6 dt = 6W_t^Q dW_t^Q + 3 dt,$$

d. h. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist kein Martingal und damit kein diskontierter Preisprozess.

- $Y_t := \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t), t \geq 0$:

- Anwendung der Itô-Formel (Version 2) auf $Y_t = e^{\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t} = f(W_t^Q, t)$ mit $f(w, t) = e^{\sigma w - \frac{1}{2} \sigma^2 t}$:

$$df(W_t^Q, t) = \frac{\partial}{\partial w} f(W_t^Q, t) dW_t^Q + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(W_t^Q, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial w)^2} f(W_t^Q, t) \right) dt.$$

- Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial w} f(w, t) = \sigma f(w, t), \frac{\partial}{\partial t} f(w, t) = -\frac{1}{2} \sigma^2 f(w, t), \frac{\partial^2}{(\partial w)^2} f(w, t) = \sigma^2 f(w, t),$$

- Fazit:

$$df(W_t^Q, t) = \sigma f(W_t^Q, t) dW_t^Q + \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(W_t^Q, t) dt = \sigma f(W_t^Q, t) dW_t^Q.$$

bzw. $dY_t = \sigma Y_t dW_t^Q$, d. h. $(Y_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal und damit ein Kandidat für einen diskontierten Preisprozess.

(iii) Aus der Analyse von Zeitreihen von Aktienreturns ist erstens erkennbar, dass sich die Volatilität im Zeitverlauf ändert. Insbesondere sind Phasen mit niedriger und hoher Volatilität zu beobachten. Zweitens besteht eine Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Call- und Put-Optionen vom Strike und der Restlaufzeit/Maturität. Dies steht im Widerspruch zu einer konstanten Volatilität und motiviert die Volatilität als Funktion des aktuellen Aktienkurses und der Zeit (*lokale Volatilitätsmodelle*) oder mehr flexibler als stochastischen Prozess (*stochastische Volatilitätsmodelle*) zu modellieren.



- (iv) Eine Erweiterung des Heston-Modells im Kontext von Regime-Switching-Modellen ist gegeben durch folgende Modellierung des diskontierten Aktienpreisprozesses unter einem Martingalmaß \mathbb{Q} :

$$\begin{aligned}d\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t \sqrt{Y_t} dB_t, \\dY_t &= \kappa(\theta - Y_t) dt + X_t \xi \sqrt{Y_t} dW_t.\end{aligned}$$

Hierbei sind B, W korrelierte Wiener-Prozesse unter \mathbb{Q} mit $\langle B, W \rangle_t = \rho t$, $\rho \in (-1, 1)$, und $(X_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet einen (zeitlich homogenen) Markov-Prozess mit z. B. zwei Zuständen $\{z_1, z_2\}$, $0 < z_1 < 1 < z_2$. In diesem Fall hängt die „Vol of Vol“ vom Zustand des exogenen Faktors ab. Die zwei Zustände spiegeln eine Verringerung oder Verstärkung der Volatilität wider.

Aufgabe 4. [Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]

Es sei eine Datenmatrix X gegeben mit 20 Spalten und 500 Zeilen. Jede Zeile stelle eine Zinskurve mit 20 Laufzeiten zu aufeinander folgenden Wochen der ungefähr letzten 10 Jahre dar. Sie möchten wöchentliche Zinskurvenänderungen mit einer Hauptkomponentenanalyse (*Principal Component Analysis* (PCA)) modellieren.

- (a) [3 Punkte] Nennen Sie drei generelle Gründe, die für eine Verwendung einer PCA bei der Zinskurvenmodellierung sprechen.
- (b) [3 Punkte] Nennen Sie Ihre Erwartung, welche Gestalt die ersten drei Basisfunktionen besitzen werden.
- (c) [3 Punkte] Erklären Sie *kurz*, wie Sie die Basisfunktionen der PCA berechnen. Gehen Sie davon aus, dass Ihnen die Matrix der zentrierten wöchentlichen Änderungen vorliegt.
- (d) [2 Punkte] Geben Sie die Formel an, mit der Sie eine beliebige Faktorladung PC_i , $i \in \{1, \dots, 20\}$, einer zentrierten wöchentlichen Änderung $x \in \mathbb{R}^{1,20}$ berechnen. Gehen Sie davon aus, dass Ihnen die Eigenvektoren der PCA bereits vorliegen.
- (e) [2 Punkte] Es sei Ihnen die Matrix $H \in \mathbb{R}^{499,20}$ aller Faktorladungen zu allen wöchentlichen Änderungen bekannt. Was lässt sich über die Korrelation $c_{i,j}$ von zwei beliebigen Spalten i, j der Matrix H aussagen?
- (f) [2 Punkte] Es seien Ihnen die ersten beiden Eigenvektoren der PCA EV_1 und EV_2 bekannt. Sie möchten die PC-Realisierung $[PC_1^{(*)}, PC_2^{(*)}]$ in eine wöchentliche Änderung transformieren. Schreiben Sie die Formel auf, die Sie zur Berechnung verwenden.
- (g) [2 Punkte] Notieren Sie die Formel zur Berechnung der erklärten Varianz der i -ten Faktorladung.
- (h) [2 Punkte] Wie müsste die mit der PCA zu modellierende Matrix aussehen, wenn Sie anstatt absoluter Änderungen relative geshiftete Änderungen mit einem beliebigen aber festem Shiftvektor $z \in \mathbb{R}^{1,20}$ modellieren wollten?
- (i) [6 Punkte] Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede zwischen der PCA und dem Nelson-Siegel Modell.

Lösungsskizze:

- (a)
 - Gute Abbildung historischer Zinskurvenbewegungen mit wenigen Parametern
 - Dimensionsreduktion



- Einfache Berechnung der Faktorladungen durch Matrixmultiplikation
- Unkorreliertheit der historischen Faktorladungen

[Weitere Nennungen sind möglich.]

(b) Parallelshift, Steigung, Krümmung

(c) Gesucht sind die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix der zentrierten wöchentlichen Änderungen. Es sind zuerst die Matrix der wöchentlichen Änderungen zu erstellen und anschließend die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix dieser Matrix zu berechnen.

(d) $PC_i = x EV_i$

(e) $c_{i,j} = \delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker Symbol ist.

(f) $z^{(*)} = [EV_1, EV_2]^T [PC_1^{(*)}, PC_2^{(*)}]$

(g) Es seien $\lambda_i, i \in \{1, \dots, 20\}$ die Eigenwerte, die Sie aus der PCA erhalten haben. Dann gilt für die erklärte Varianz $(\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1, \dots, 20} \lambda_k}$.

(h) $M := \left[\frac{(X_{i,j} + z_j) - (X_{i-1,j} + z_j)}{X_{i-1,j} + z_j} \right]_{(i,j)}, i \in \{2, \dots, 500\}, j \in \{1, \dots, 20\}$

(i) *Gemeinsamkeiten:*

- Erklärung der Zinskurve mit wenigen Basisfunktionen
- Kleinste Quadrate Minimierung zur Bestimmung der Modellparameter
- Grob ähnliche Interpretation der Parameter: Parallelverschiebung, Steigung, Krümmung

Unterschiede:

- PCA auch für beliebige Transformationen von Zinskurvenänderungen möglich
- Basisfunktionen sind diskret vs. stetig
- Extrapolation bei Nelson-Siegel automatisch gegeben, bei PCA nicht

[Weitere Nennungen sind möglich.]

Aufgabe 5. [Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [40 Punkte]

Angenommen, das Portfolio Ihrer Versicherung enthält Aktien des Solarparkbetreibers „Sun Power AG“, dessen Aktien an der Börse gehandelt werden. Sie entscheiden sich, den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ zur Risikomessung unter dem real-world Maß \mathbb{P} durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ zu modellieren, und verwenden in konsistenter Form das assoziierte Black-Scholes-Modell für Bewertungszwecke. Hierbei ist die Wertentwicklung des Geldmarktfonds bei stetiger Verzinsung mit Zinsrate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \geq 0$.

- (a) [10 Punkte] Nehmen Sie an, dass das Jahr 260 Handelstage umfasst.
- (i) [2 Punkte] Geben Sie inklusive *kurzer* Herleitung die Marginalverteilung der täglichen Log-Renditen der Aktie unter dem real-world Maß \mathbb{P} an.
 - (ii) [2 Punkte] Begründen Sie, warum die täglichen Log-Renditen unter \mathbb{P} stochastisch unabhängig sind, und bewerten Sie diese Eigenschaft im Kontext empirischer Finanzmarktzeitreihen.
 - (iii) [2 Punkte] Erläutern Sie inklusive Formelwerk, wie Sie anhand einer Zeitreihe täglicher Log-Renditen einen geeigneten Schätzwert $\hat{\sigma}$ für den Volatilitätsparameter σ im Black-Scholes-Modell ermitteln können.
 - (iv) [4 Punkte] Erklären Sie im Kontext des Black-Scholes-Modells den Begriff der impliziten Volatilität. Erläutern Sie *kurz*, wie man mit dieser – alternativ zur aus Renditedaten geschätzten historischen Volatilität $\hat{\sigma}$ – unter Einsatz numerischer Verfahren eine Kalibrierung der Volatilität vornehmen kann. Bewerten Sie mithilfe der impliziten Volatilität die empirische Validität des Black-Scholes-Modells.
- (b) [4 Punkte] Betrachten Sie ein Teilportfolio, das aus 200 Aktien der „Sun Power AG“ und 25 ausfallfreien Nullkuponanleihen (Nennwert pro Anleihe: 1000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) besteht. Stellen Sie – in Abhängigkeit des (unbekannten) Aktienkurses S_0 am Jahresanfang sowie der Parameter μ, σ, r – Formeln für die Werte V_0, V_1 dieses Teilportfolios zu den Zeitpunkten 0 und 1 auf. Leiten Sie auf Basis der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung eine explizite Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[V_1 \leq V_0]$ her, dass der Portfoliowert V_1 in einem Jahr unter den Startportfoliowert V_0 fällt.
- (c) [15 Punkte] Ihnen wird ein Finanzderivat angeboten, das Ihnen zur Maturität $T > 0$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T der „Sun Power AG“ die Auszahlung $C_T := (S_T - 70)^2$ liefert.
- (i) [3 Punkte] Geben Sie die Dynamik des Aktienpreisprozesses $(S_t)_{t \geq 0}$ unter dem (eindeutigen) äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} an und weisen Sie mithilfe der Itô-Formel nach, dass der diskontierte Aktienpreis in der Tat ein Martingal unter \mathbb{Q} ist.



- (ii) [7 Punkte] Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitragefreien Preises C_t des Finanzderivats C_T zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ her. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion v gilt.
- Hinweis:* Für $X \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$.
- (iii) [5 Punkte] Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der Ihre Gegenpartei die Auszahlung C_T durch Handel von Geldmarktfonds und Aktie theoretisch perfekt absichern kann. Wie hoch sind die Kosten für die Implementierung der Hedging-Strategie?
- (d) [5 Punkte] Ein Kollege hat im Black-Scholes-Modell für eine Call-Option auf die Aktie mit Restlaufzeit von 3 Jahren und Strike $K = 220$ den Preis 23,3457 berechnet. Aus Marktdaten ist für Sie ablesbar, dass der heutige Kurs der Aktie $S_0 = 200$ und die Zinsrate $r = 0,015$ betragen, während Ihnen die Volatilität unbekannt ist.
- (i) [2 Punkte] Angenommen, Sie erhalten den Auftrag eine Put-Option auf die Aktie mit Restlaufzeit von 3 Jahren und Strike $K = 220$ zu bewerten, möchten aus Effizienzgründen die Volatilität nicht neu kalibrieren. Nutzen Sie die Ergebnisse des Kollegen, um den Preis der Put-Option zu ermitteln.
- (ii) [3 Punkte] Beschreiben Sie unter Angabe entsprechender Formeln, wie Sie die Absicherungsstrategie der Call-Option über Aktie und Geldmarktfonds in eine Absicherungsstrategie für die Put-Option übersetzen können.
- (e) [6 Punkte] Bei einer *Lookback-Put-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t \geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ ist das Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{LP}} := \max_{t \in [0, T]} S_t - S_T$$

abhängig vom gesamten Kursverlauf bis zum Zeitpunkt T . Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen z_1, z_2, \dots aus einer Standardnormalverteilung generieren können.

Erläutern Sie, wie Sie zur Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* vorgehen. Geben Sie dabei explizit an, an welchen Stellen Approximationen zum Einsatz kommen.

Lösungsskizze:

- (a) (i) Der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ ist unter dem real-world Maß \mathbb{P} gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \geq 0,$$



wobei der Zufall durch einen \mathbb{P} -Wiener-Prozess $(W_t)_{t \geq 0}$ getrieben wird. Mit $\delta := \frac{1}{260}$ gilt somit für die Log-Rendite R_i an Handelstag $i \in \mathbb{N}$

$$R_i = \ln\left(\frac{S_{i\delta}}{S_{(i-1)\delta}}\right) = \sigma(W_{i\delta} - W_{(i-1)\delta}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta \sim \mathcal{N}((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta, \sigma^2\delta). \quad (1)$$

- (ii) Die Inkremente $(W_{i\delta} - W_{(i-1)\delta})_{i \in \mathbb{N}}$ des Wiener-Prozesses sind stochastisch unabhängig und diese Eigenschaft überträgt sich mit Blick auf (1) unmittelbar auf die täglichen Log-Renditen R_1, R_2, \dots . Aus empirischer Sicht ist dies nicht realistisch, da die Renditen typischer Finanzmarktzeitreihen durch Autokorrelation, Volatilitätscluster etc. geprägt sind.
- (iii) Da die täglichen Renditen R_1, \dots, R_n unabhängig und identisch verteilt mit $\text{Var}(R_i) = \sigma^2\delta$ sind, bietet sich als (erwartungstreue) Schätzfunktion für σ^2

$$\hat{\sigma}^2(R_1, \dots, R_n) := \frac{1}{\delta} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \quad \text{mit} \quad \bar{R} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

an. Entsprechend ist eine Schätzfunktion für die historische Volatilität gegeben durch

$$\hat{\sigma}(R_1, \dots, R_n) = \sqrt{\hat{\sigma}^2(R_1, \dots, R_n)} = \sqrt{\frac{1}{\delta} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}.$$

Einsetzen der realisierten Stichprobendaten aus der Zeitreihe liefert einen Schätzwert für die Volatilität σ .

- (iv) Der Preis einer Option (z. B. Europäische Call-Option) steigt ceteris paribus, wenn die Volatilität σ erhöht wird. Aufgrund dieser Monotonie kann man für einen am Markt beobachteten Preis einer Option C_0^{Markt} die Volatilität σ_{imp} bestimmen, die im Black-Scholes-Modell vorliegen müsste, sodass der Modellpreis $C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma)$ mit dem Marktpreis übereinstimmt (wenn alle anderen Parameter gegeben sind). Diese Größe heißt *implizite Volatilität*.

Daher kann durch Invertieren der Modellpreise (z. B. Black-Scholes-Formel für Call- und Put-Optionen) aus Marktpreisen die Volatilität ermittelt werden. Üblicherweise ist die Preisformel $C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma)$ nicht explizit nach σ auflösbar, sodass numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung der Funktion $f(\sigma) = C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma) - C_0^{\text{Markt}}$ erforderlich sind, z. B. das Newton-Verfahren.

Empirische Beobachtungen zeigen, dass die implizite Volatilität von der Restlaufzeit der Option (Term-Structure) sowie vom zugrunde liegenden Strike der Option abhängen (Smile, Skew). Da die Volatilität im Black-Scholes-Modell jedoch konstant ist, wird dadurch das Black-Scholes-Modell empirisch falsifiziert.



(b) Das Teilportfolio hat zu den Zeitpunkten 0 bzw. 1 die Werte

$$\begin{aligned} V_0 &= 200 \cdot S_0 + 25 \cdot 1000 e^{-r} = 200 \cdot S_0 + 25000 e^{-r} \\ V_1 &= 200 \cdot S_1 + 25 \cdot 1000 = 200 \cdot S_1 + 25000 \\ &= 200 \cdot S_0 \exp(\sigma W_1 + \mu - \frac{1}{2} \sigma^2) + 25000, \end{aligned}$$

wobei der Zufall bei V_1 nur durch die Zufallsvariable $W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ getrieben wird. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V_1 \leq V_0] &= \mathbb{P}[200 \cdot S_0 e^{\sigma W_1 + \mu - \frac{1}{2} \sigma^2} + 25000 \leq 200 \cdot S_0 + 25000 e^{-r}] \\ &= \mathbb{P}[e^{\sigma W_1 + \mu - \frac{1}{2} \sigma^2} \leq 1 + \frac{125}{S_0} (e^{-r} - 1)] \\ &= \mathbb{P}[\sigma W_1 + \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \leq \ln(1 + \frac{125}{S_0} (e^{-r} - 1))] \\ &= \mathbb{P}[W_1 \leq \frac{1}{\sigma} (\ln(1 + \frac{125}{S_0} (e^{-r} - 1)) - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2)] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma} (\ln(1 + \frac{125}{S_0} (e^{-r} - 1)) - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2)\right). \end{aligned}$$

Bemerkung: In obiger Rechnung muss der Term $1 + \frac{125}{S_0} (e^{-r} - 1)$ positiv sein; anderenfalls ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0.

(c) (i) Der Preisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ der Aktie besitzt unter dem Maß \mathbb{Q} die Dynamik

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s_0 > 0,$$

wobei der Zufall durch einen \mathbb{Q} -Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ getrieben wird. Mit anderen Worten: Der Aktienpreisprozess ist unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilität σ .

Die Funktion $f(x, t) = e^{-rt}x$ erlaubt die Darstellung der diskontierten Aktienpreise $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$, in der Form $\tilde{S}_t = f(S_t, t)$. Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des Prozesses $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$

$$d\tilde{S}_t = df(S_t, t) = \frac{\partial}{\partial x} f(S_t, t) dS_t + \frac{\partial}{\partial t} f(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f(S_t, t) d\langle S \rangle_t.$$

Da die Ableitung $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f$ verschwindet, erhält man somit

$$d\tilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt = \tilde{S}_t \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

d. h. der diskontierte Aktienpreisprozess ist als Itô-Integral der Brownschen Bewegung bzw. da der Driftterm in der Stochastischen Differentialgleichung verschwindet ein (lokales) Martingal unter \mathbb{Q} .

(ii) Im Black-Scholes-Modell ist der Aktienpreisprozess unter \mathbb{Q} eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilität σ . Somit



folgt für den arbitrage-freien Preis im Zeitpunkt t mit risikoneutraler Bewertung

$$\begin{aligned}
 C_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - 70)^2 | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T^2 - 140S_T + 4900 | \mathcal{F}_t] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T^2 | \mathcal{F}_t] - 140e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_t] + 4900e^{-r(T-t)} \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^2 | \mathcal{F}_t] - 140S_t + 4900e^{-r(T-t)} \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t)^2 e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} e^{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} | \mathcal{F}_t] - 140S_t + 4900e^{-r(T-t)} \\
 &= (S_t)^2 e^{(2(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - r)(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}] - 140S_t + 4900e^{-r(T-t)} \\
 &= (S_t)^2 e^{(r - \sigma^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2}4\sigma^2(T-t)} - 140S_t + 4900e^{-r(T-t)} \\
 &= (S_t)^2 e^{(r + \sigma^2)(T-t)} - 140S_t + 4900e^{-r(T-t)}.
 \end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t, t)$ mit $v(x, t) = x^2 e^{(r + \sigma^2)(T-t)} - 140x + 4900e^{-r(T-t)}$

(iii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- Einheiten Aktie:

$$g_t^S = \frac{\partial}{\partial x} v(S_t, t) = 2S_t e^{(r + \sigma^2)(T-t)} - 140$$

- Einheiten Geldmarktfonds: Mit $V_t^g = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt

$$g_t^B = \frac{V_t^g - g_t^S S_t}{B_t} = -(S_t)^2 e^{(r + \sigma^2)(T-t) - rt} + 4900e^{-rT}.$$

Der arbitrage-freie Preis C_t entspricht in jedem Zeitpunkt den Kosten der perfekten Replikation.

(d) Die Preise der Call- und Put-Option sind durch die Put-Call-Parität verbunden, d. h. für jeden Zeitpunkt $t \in [0, 3]$ gilt für die entsprechenden arbitrage-freien Preise C_t^{call} bzw. C_t^{put}

$$C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} = S_t - Ke^{-(3-t)r} \quad \text{bzw.} \quad C_t^{\text{put}} = C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(3-t)r}.$$

(i) Daraus folgt speziell für den Bewertungszeitpunkt $t = 0$

$$C_0^{\text{put}} = 23,3457 - 200 + 220e^{-3 \cdot 0,015} = \underline{\underline{33,6652}}.$$

(ii) Es seien $(g_t^{B, \text{call}}, g_t^{S, \text{call}})$ die Einheiten von Geldmarktfonds und Aktie, die im Zeitpunkt t in der Absicherungsstrategie der Aktie gehalten werden. Aus der Put-Call-Parität folgt z. B. durch Ableiten nach dem Aktienkurs (Delta-Hedging) für die Einheiten der Aktie zur Absicherung der Put-Option

$$g_t^{S, \text{put}} = g_t^{S, \text{call}} - 1$$



sowie nachgelagert

$$g_t^{B, \text{put}} = \frac{C_t^{\text{put}} - g_t^{S, \text{put}} S_t}{e^{rt}} = \frac{C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(3-t)r} - (g_t^{S, \text{call}} - 1)S_t}{e^{rt}} = g_t^{B, \text{call}} + Ke^{-3r}.$$

- (e) Der arbitrage-freie Preis der Lookback-Put-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} :

$$C_0^{\text{LP}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C_T^{\text{LP}}] = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max_{t \in [0, T]} S_t - S_T \right].$$

1. Approximation – Diskretisierung des laufenden Maximums:

Für eine Zerlegung $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$ (o. B. d. A. $t_k = T$), des Zeitintervalls $[0, T]$ mit hinreichend klein gewählter äquidistanter Schrittweite $h > 0$ gilt aufgrund der Stetigkeit der Pfade der geometrischen Brownschen Bewegung $\max_{t \in [0, T]} S_t - S_T \approx \max_{i=1, \dots, k} S_{t_i} - S_T$ und damit

$$C_0^{\text{LP}} \approx e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max_{i=1, \dots, k} S_{t_i} - S_T \right].$$

2. Approximation – Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten (diskretisierten) Pfaden des Aktienpreisprozesses $\{s_{t_1}(j), s_{t_2}(j), \dots, s_{t_k}(j)\}$, $j = 1, \dots, n$, approximiert werden:

$$C_0^{\text{LP}} \approx e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max_{i=1, \dots, k} S_{t_i} - S_T \right] \approx e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\max_{i=1, \dots, k} s_{t_i}(j) - s_{t_k}(j) \right).$$

Grundlage dieser Monte-Carlo-Approximation ist das starke Gesetz der großen Zahlen, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Bei der Simulation ist zu beachten, dass der Aktienpreisprozess unter \mathbb{Q} eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ ist. Zur Simulation der Pfade bietet sich die direkte Simulation ausgehend von der geschlossenen Lösung der Stochastischen Differentialgleichung an:

$$s_{t_i}(j) = S_0 \exp(\sigma \sqrt{h} \sum_{l=1}^i z_l(j) + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) h i), \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n.$$

Hierbei werden für jeden Pfad j neue standardnormalverteilte Zufallszahlen $z_1(j), \dots, z_k(j)$ verwendet. Denkbar (wenn auch weniger exakt und damit eine weitere Approximation) wäre auch ausgehend vom Startpreis S_0 und der SDE $ds_t = s_t(r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}})$ eine Diskretisierung gemäß Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$, sodass die Werte des Aktienpreisprozesses zu den relevanten Zeitpunkten inkludiert sind:

$$s_{t_i}(j) = s_{t_{i-1}}(j) + r s_{t_{i-1}}(j) h + \sigma s_{t_{i-1}}(j) \sqrt{h} z_i(j), \quad i = 1, \dots, k.$$

Aufgabe 6. [Short-Rate-Modelle: Cox-Ingersoll-Ross-Prozess] [40 Punkte]

Der *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess* (CIR) ist definiert durch die Stochastische Differentialgleichung

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t, \quad r_0 = r(0) > 0, \kappa, \theta, \sigma > 0,$$

und stellt ein populäres Modell für die Short-Rate dar.

- (a) [2 Punkte] Geben Sie eine weitere Anwendung des CIR-Prozesses in der Finanzmathematik inklusive *kurzer* Beschreibung des Modells an.
- (b) [3 Punkte] Erklären Sie die Bedeutung der Modellparameter κ , θ und σ . Gehen Sie dabei insbesondere auf das Langzeitverhalten und die Rolle des „Wurzelterms“ des CIR-Prozesses ein.
- (c) [2 Punkte] Formulieren Sie die risikoneutrale Bewertungsformel für den Preis $P(t, T)$ einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die zum Fälligkeitszeitpunkt $T > 0$ den normierten Nennwert 1 auszahlt, im Bewertungszeitpunkt $t < T$. Erläutern Sie anhand dieser Formel *kurz*, warum der Preis $P(\cdot, T)$ eine Funktion der Zeit t und des Zustands r_t des CIR-Prozesses ist.
- (d) [20 Punkte] Das CIR-Modell zählt zur Klasse der *affinen Short-Rate-Modelle*, d. h. Preise von ausfallfreien Nullkuponanleihen besitzen für alle Laufzeiten $T > 0$ die Form

$$P(t, T) = e^{-A(t, T) - B(t, T)r_t}, \quad t \in [0, T],$$

mit deterministischen Funktionen $A(\cdot, T)$ und $B(\cdot, T)$.

- (i) [10 Punkte] Zeigen Sie ausgehend von der Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses der Nullkuponanleihe unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß \mathbb{Q} , dass die deterministischen Funktionen $A(\cdot, T)$ und $B(\cdot, T)$ im CIR-Modell durch die folgenden Riccati-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(t, T) &= -\kappa\theta B(t, T), \\ \frac{\partial}{\partial t} B(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) + \kappa B(t, T) - 1, \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen $A(T, T) = 0$ und $B(T, T) = 0$ bestimmt sind.

Hinweis: Wenden Sie die zeitabhängige Itô-Formel auf das Martingal an.

- (ii) [5 Punkte] Durch Lösen dieser Differentialgleichungen ergeben sich geschlossene Formeln für A und B sowie für die Bondpreise im CIR-Modell, die von den Modellparametern κ , θ , σ abhängen. Erläutern Sie, inwiefern diese affine Struktur für die Kalibrierung des CIR-Modells hilfreich ist.



- (iii) [5 Punkte] Das Hull-White-Modell gehört ebenfalls zur Klasse der affinen Modelle. Erläutern Sie den Hauptunterschied zwischen dem Hull-White-Modell und dem CIR-Modell in Bezug auf die Zinslevel, die durch die jeweilige Modellierung möglich sind. Gehen Sie dabei auf je einen Nachteil des Hull-White-Modells und des CIR-Modells ein. Welche Erweiterung des CIR-Modells würden Sie in diesem Kontext vorschlagen?
- (e) [4 Punkte] Eine Grundanforderung an einen Zinsprozess ist die Konformität zur Zinsstruktur. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist und was dies im Hinblick auf die notwendigen Modellparameter bedeutet. Warum ist das hier betrachtete einfache CIR-Modell in dieser Hinsicht ungenügend und welche Anpassungen wären vorzunehmen?
- (f) [4 Punkte] Der CIR-Prozess ist ein Modell für die Short-Rate r_t , die einen Grenzwert des Kassazinses (Spot Rate) darstellt. Die instantane Forward-Rate $f_t(T)$ stellt hingegen einen Grenzwert des Terminzinses dar. Stellen Sie beide Grenzwerte gegenüber und leiten Sie ab, welche Verbindung zwischen beiden Größen besteht. Geben Sie eine Formel an, mit der Sie die Forward-Rate $f_t(T)$ im CIR-Modell auf Basis der Funktionen A und B berechnen können.
- (g) [5 Punkte] Für die praktische Anwendung des CIR-Modells ist es erforderlich, diskretisierte Pfade zu simulieren. Geben Sie für den CIR-Prozess die Diskretisierungsvorschriften für die beiden im Webinar besprochenen Verfahren an. Identifizieren Sie das Problem, das in beiden Verfahren auftreten kann, und schlagen Sie vor, wie dieses behandelt werden kann.

Lösungsskizze:

- (a) Der CIR-Prozess wird u. a. auch im Heston-Modell zur Modellierung der stochastischen Volatilität von Aktienkursen verwendet. Hierbei sind der diskontierte Aktienpreisprozess $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ und die zugehörige Volatilität $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß für zwei korrelierte Wiener-Prozesse B, W mit Kovariation $\langle W, B \rangle_t = \rho t$ modelliert durch

$$\begin{aligned}d\tilde{S}_t &= \sigma_t \tilde{S}_t dB_t, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t} \quad \text{mit } dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t.\end{aligned}$$

[Alternative Beispiele sind möglich, z. B. Modellierung der Hazard-Rate in Kreditrisikomodellen.]

- (b) Der CIR-Prozess ist ein Mean-Reversion-Prozess mit *Mean-Reversion-Level* θ und *Mean-Reversion-Geschwindigkeit* κ . Der Parameter θ gibt an, gegen welchen Wert der deterministische Teil des Prozesses langfristig strebt, wohingegen κ die relative Stärke dieser Asymptotik im Vergleich zum stochastischen Teil skaliert. Der stochastische Teil wird durch den *Volatilitätsparameter* σ bestimmt und treibt den Prozess in eine beliebige Richtung, d. h. insbesondere



weg vom Mean-Reversion-Level. Die Besonderheit des CIR-Prozesses liegt in der Wurzelabhängigkeit des Diffusionsterms von der Short-Rate selbst. Diese sorgt dafür, dass die stochastische Bewegung kleiner wird, je mehr sich r_t der Null annähert und verhindert, dass die Short-Rate negativ wird.

- (c) Als Numéraire wird der Geldmarktfonds mit Wertentwicklung $B_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$, $t \geq 0$, gewählt. Da die Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt T sicher die Auszahlung 1 leistet, ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung zum Zeitpunkt $t \leq T$ der Preis

$$P(t, T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

wobei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die zugrunde liegende Informationsfiltration bezeichnet. Da der CIR-Prozess als Diffusionsprozess ein Markov-Prozess ist, folgt unmittelbar, dass der Bondpreis ausschließlich eine Funktion der Zeit t und des Zustandes r_t ist.

- (d) (i) Mit der Funktion $f(t, r) := \exp(-A(t, T) - B(t, T)r)$ berechnet man für die diskontierten Bondpreise mithilfe der Itô-Formel und $d\langle r \rangle_t = \sigma^2 r_t dt$ zunächst

$$\begin{aligned} d(e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T)) &= d(e^{-\int_0^t r_u du} f(t, r_t)) \\ &= e^{-\int_0^t r_u du} df(t, r_t) + f(t, r_t) d(e^{-\int_0^t r_u du}) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial r}(t, r_t) dr_t + \frac{\partial f}{\partial t}(t, r_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t, r_t) d\langle r \rangle_t - f(t, r_t) r_t dt \right] e^{-\int_0^t r_u du} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial r}(t, r_t) \kappa(\theta - r_t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t, r_t) \sigma^2 r_t - f(t, r_t) r_t \right] e^{-\int_0^t r_u du} dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial r}(t, r_t) \sigma \sqrt{r_t} e^{-\int_0^t r_u du} dW_t. \end{aligned}$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft muss der dt -Term verschwinden, d. h. es gilt für alle t und r

$$\frac{\partial f}{\partial r}(t, r) \kappa(\theta - r) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t, r) \sigma^2 r - f(t, r) r = 0.$$

Das Berechnen der partiellen Ableitungen inklusive Anordnen der Terme führt zur Bedingung

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} A(t, T) - \kappa \theta B(t, T) \right) + \left(-\frac{\partial}{\partial t} B(t, T) + \kappa B(t, T) + \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) - 1 \right) r = 0,$$

die nur bei Gültigkeit folgender Differentialgleichungen erfüllt sein kann:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, T) = -\kappa \theta B(t, T), \quad \frac{\partial}{\partial t} B(t, T) = \kappa B(t, T) + \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) - 1.$$

Die Randbedingungen $A(T, T) = B(T, T) = 0$ resultieren aus $P(T, T) = 1$.

- (ii) Aufgrund der affinen Struktur des CIR-Modells stehen explizite Preisformeln für Nullkuponanleihen in Abhängigkeit der Modellparameter zur Verfügung. Dies ist für die marktkonsistente Kalibrierung des CIR-Modells hilfreich, da eine direkte Übersetzung der beobachtbaren Zinskurve (ausgedrückt über Marktpreise von Nullkuponanleihen) zu den Modellparametern



- ermöglicht wird. Hierzu werden die Modellparameter κ, θ, σ so gewählt, dass in einer geeigneten Metrik der Abstand von Markt- und Modellpreisen minimiert wird.
- (iii) Das Hull-White-Modell besitzt normalverteilte Short-Rates und kann somit - im Gegensatz zum nicht-negativen CIR-Prozess - auch negative Zinsen generieren, die im derzeitigen Niedrigzinsumfeld beobachtet werden. Allerdings sind im Hull-White-Modell negative Zinsen in unbeschränkter Höhe möglich, was aufgrund der Bargeldhaltungsoption unrealistisch ist. Eine Anpassung des CIR-Prozesses, bei der die verschobene Short-Rate $(r_t + s)$ mittels eines CIR-Prozess simuliert wird, würde negative Zinsen bis zur unteren Schranke s erlauben.
- (e) Zinskonformität bedeutet, dass das Modell die Anfangszinskurve $P^M(T)$, die am Markt beobachtet wird, exakt reproduziert, also $P(0, T) = P^M(T)$. Um dies für eine Zinskurve mit N_T beobachteten Stützstellen zu erreichen, müssen also N_T Gleichungen erfüllt werden, was grundsätzlich die Existenz von ebenso vielen unabhängigen Modellparametern erfordert. Das hier betrachtete CIR-Modell hat drei konstante Kalibrierungsparameter (κ, θ und σ), sodass eine Zinskurve mit mehr als drei Stützstellen nicht exakt reproduziert werden kann. Eine mögliche Anpassung wäre, den Mean-Reversion-Level zeitabhängig zu wählen ($\theta \rightarrow \theta(t)$), sodass für jede Laufzeit ein individueller Kalibrierungsparameter gegeben ist.
- (f) Short-Rate und instantane Forward-Rate für $t < T$ sind definiert als

$$r_t = \lim_{T \searrow t} r_t^S(T) = \lim_{\delta \searrow 0} -\frac{\ln P(t, t+\delta)}{\delta},$$

$$f_t(T) = \lim_{\delta \searrow 0} f_t^S(T, T+\delta) = \lim_{\delta \searrow 0} -\frac{\ln P(t, T+\delta) - \ln P(t, T)}{\delta} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T)).$$

Setzt man in der Definition der instantanen Forward-Rate nun $T = t$ und benutzt $P(t, t) = 1$, so folgt direkt $r_t = f_t(t)$. Ferner:

$$f_t(T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T)) = -\frac{\partial}{\partial T} A(t, T) + \frac{\partial}{\partial T} B(t, T)r_t.$$

- (g) Im Webinar wurden die Diskretisierungen nach Euler bzw. Milstein vorgestellt. Für den CIR-Prozess lauten die iterativen Vorschriften für diskrete Zeitschritte der Länge δ

$$\text{Euler: } r_0 = r(0); \quad r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)\delta + \sigma\sqrt{r_i}\Delta W_i,$$

$$\text{Milstein: } r_0 = r(0); \quad r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)\delta + \sigma\sqrt{r_i}\Delta W_i + \frac{\sigma^2}{4}((\Delta W_i)^2 - \delta),$$

wobei $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i \sim \mathcal{N}(0, \delta)$ normalverteilte Zufallszahlen sind.



Bei beiden Diskretisierungsverfahren ist aufgrund des diskreten Fluktuations-terms nicht gewährleistet, dass r_i strikt positiv bleibt. Im Falle negativer Werte ist allerdings die Wurzel nicht definiert. Daher führt man üblicherweise im Diffusionsterm eine untere Schranke ein, indem man $\sqrt{r_i}$ durch $\max\{\sqrt{r_i}, 0\}$ ersetzt.