Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 2. Juni 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße - Axiomatik. *[24 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Erklären Sie Subadditivität und argumentieren Sie, weshalb sie eine wünschenswerte Eigenschaft von Risikomaßen darstellen könnte. Geben Sie ein Argument an, weshalb ein nicht subadditives Risikomaß aus der Perspektive der Aufsicht problematisch sein könnte.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist.

(c) *[8 Punkte]* Betrachten Sie einen multivariat normalverteilten Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^T$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ den Raum aller Verlustgrößen der Gestalt $L = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass VaR_α subadditiv auf dem Raum $\mathcal{M}$ für alle $\alpha > 0.5$ ist.

(d) *[4 Punkte]* Betrachten Sie die Verlustgröße L eines Finanzinstituts, die als Funktion ℓ der Änderung eines n-dimensionalen Risikofaktors $\mathbf{x}$ modelliert wird:

$$L = \ell(\mathbf{x})$$

Für eine vorgegebene Menge von Szenarien $S \subset \mathbb{R}^n$ von möglichen Änderungen der Risikofaktoren (Szenarien) wird ein Stresstest-Risikomaß durch

$$\varrho_S(L) = \sup\{\ell(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in S\}$$

eingeführt. Zeigen Sie, dass ϱ_S subadditiv ist.

Aufgabe 2. Risikomaße - Berechnung. *[14 Punkte]* Betrachten Sie eine Verlustgröße X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & ; \quad 0 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & ; \quad x \geq 3. \end{cases}$$

(a) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau 85% die Risikomaße Value-at-Risk, Tail Value at Risk und Expected Shortfall.

(b) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie die Aussagekraft der Werte der Risikomaße Tail Value at Risk und Expected Shortfall im Kontext von Teil a).

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko. *[24 Punkte]* Die Verlustgröße X sei Pareto-verteilt mit den Parametern b, c, d.h. mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x}\right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) *[4 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Schätzer für $VaR_\alpha(X)$ unter Verwendung der Momentenschätzer $\hat{b}$, $\hat{c}$ für die Parameter gegeben ist durch

$$T(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

(b) *[20 Punkte]* Es liegen n unabhängige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ vor. Entwickeln Sie zur Bewertung des Parameterrisikos einen Algorithmus, der den Value at Risk zum Niveau α der Residualposition $X - T(\hat{b}, \hat{c})$ per Simulation bestimmt.

Hinweis. Sie können ohne Beweis den folgenden Zusammenhang verwenden:

$$b = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 - \mu^2}, \quad c = \mu(b-1),$$

wobei μ den Erwartungswert und σ^2 die Varianz bezeichnen.

Aufgabe 4. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken *[25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* "Extremwerttheorie ist ein nützliches Werkzeug im aktuariellen Risikomanagement". Diskutieren Sie diese Aussage anhand eines selbst gewählten Beispiels aus dem aktuariellen Risikomanagement.

(b) *[10 Punkte)]* Betrachten Sie einen Versicherungsvertrag mit Schadenshöhe gegeben durch die Zufallsgröße X. Die Verteilung von X ist durch eine Exponentialverteilung mit potentiell zufälligem Parameter Λ gegeben, so dass $P(X > x) = E(e^{-\Lambda x})$. Wir betrachten die folgenden 2 Szenarien:

(i) $\Lambda = \lambda_0$ (deterministischer Parameter), so dass $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$.

(ii) Λ hat eine Gamma Verteilung mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ und Dichte $g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$. Hier ist $\Gamma(\alpha) > 0$ die Gamma Funktion (die genaue Form ist für die Lösung der Aufgabe unwichtig) und der Vorfaktor $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}$ ist die Normierungskonstante der Gamma-Dichte. In diesem Fall gilt

$$P(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda \, .$$

Zeigen Sie, dass in Szenario (ii) die Schadensgröße X eine Pareto Verteilung mit Überlebensfunktion

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

hat und folgern Sie, dass der tail von X polynomial abfällt mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Vergleichen Sie dieses Randverhalten mit dem Verhalten der Überlebensfunktion von X in Szenario (i) und diskutieren Sie den Unterschied unter Modellierungsgesichtspunkten.

(c) Datenanalyse

(i) *[3 Punkte]* Sie haben n unabhängige Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von X gegeben. Beschreiben Sie eine grafische Methode, um Szenario (i) von Szenario (ii) zu unterscheiden.

(ii) *[9 Punkte]* Erklären Sie kurz, wie der tail von X und speziell der Parameter $\xi = 1/\alpha$ mittels der POT-Methode geschätzt werden kann. Welchen Schätzwert $\hat{\xi}$ würden Sie in etwa für die beiden Szenarien erwarten (unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsanzahl n ausreichend groß ist, so dass Schätzfehler vernachlässigt werden können).

FIGURE 1
PLOT OF ALAE VERSUS LOSS.
BOTH VARIABLES ARE ON A LOGARITHMIC SCALE.
THIRTY-FOUR LOSS OBSERVATIONS ARE CENSORED.
THIS PLOT DEMONSTRATES A STRONG RELATIONSHIP
BETWEEN ALAE AND LOSS.

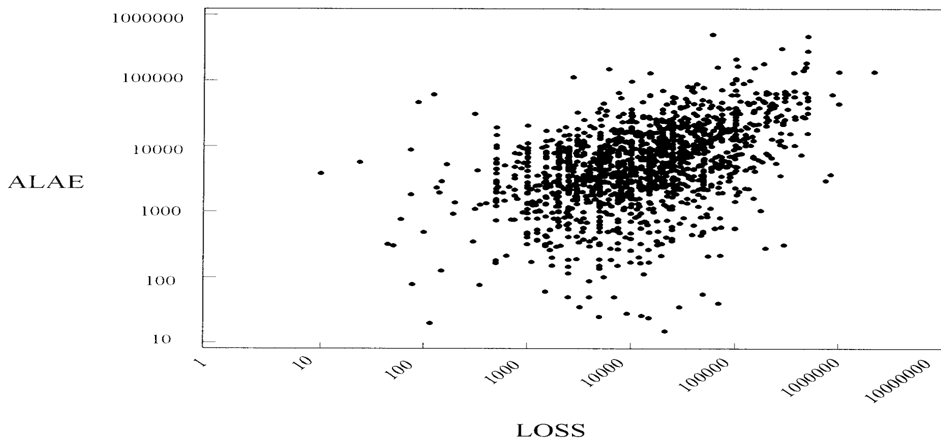

Abbildung 1: Scatter plot der Schadendaten; (aus Frees-Valdez (97)).

Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten. *[20 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen verfüge über Schadendaten der Form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, wobei X_i die Höhe des Schadens und Y_i die sogenannten *allocated loss adjustment expenses* (ALAE) beschreibt. (Die ALAE umfassen beispielsweise Anwalts- und Gutachterkosten im Zusammenhang mit der Schadensabwicklung). Ein scatter Plot der losses findet sich in Bild 1.

(a) *[2 Punkte]* Erläutern Sie kurz, warum man Abhängigkeiten zwischen Schadenshöhe X und ALAE Y erwarten sollte.

(b) *[7 Punkte]* Die Gumbel Copula mit Parameter θ werde zur Modellierung der gemeinsamen Verteilung von X und Y verwendet; es gilt

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

Zur Modellierung der Verteilung von X und Y werde eine Pareto Verteilung mit Parametern λ_X, α_X bzw. λ_Y, α_Y verwendet mit $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, d.h.

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

und analog für Y. Begründen Sie qualitativ, warum die Gumbel copula gut zur Beschreibung der in Bild 1 dargestellten Daten geeignet ist und geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ an. Was passiert für $\theta = 1$ bzw. $\theta \to \infty$?

(c) (i) *[6 Punkte]* Skizzieren Sie zwei Methoden zur Schätzung von θ.

(ii) *[5 Punkte]* Sie haben die folgenden 4 Beobachtungen von X und Y.

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für θ.

Hinweis. Für die Gumbel copula gilt $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$.

Aufgabe 6. Risikoaggregation und Abhängigkeitsmodellierung. *[20 Punkte]*
Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigem loss L_1, L_2. Das Unternehmen verwendet ein positiv homogenes Risikomaß ρ um das Risikokapital für das Gesamtunternehmen zu bestimmen, so dass $\mathrm{SCR}_i = \rho(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR steht für solvency capital requirement). Um das firmenweite SCR zu bestimmen verwendet das Unternehmen eine Kapitalallokationsregel der Form

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

hierbei ist $\rho \in [0, 1]$ ein Korrelationsparameter, der vom Regulator vorgegeben wird.

(a) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie Stärken und Schwächen einer Kapitalallokationsregel der Form (1).

(b) *[5 Punkte]* Welche Aggregationsregel erhält man, wenn man in (1) $\rho = 1$ in setzt? Ist diese Wahl von ρ immer konservativ, in dem Sinn, dass die Ungleichung $\mathrm{SCR}(L) \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ gilt? Betrachten Sie den Fall, dass das SCR mit VaR und Expected Shortfall berechnet wird.

(c) *[8 Punkte]* Nehmen Sie an, dass L_1 und L_2 lognormalverteilt sind, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Für welche Abhängigkeitsstruktur ist die Korrelation zwischen den Risiken maximal? Ist dies auch die Abhängigkeitsstruktur, die den Value at Risk von L maximiert? Unter welchen Bedingungen an die Parameter μ_i, σ_i, $i = 1, 2$, ist die maximal mögliche Korrelation gleich 1?

(d) *[3 Punkte]* Diskutieren Sie im Hinblick auf Teilaufgabe c) die Aussage “Eine Korrelation nahe Null zwischen zwei Risiken impliziert immer ein großes Potential zur Diversifizierung von Risiken.” (Betrachten Sie nur den Fall positiver Korrelationen.)

Aufgabe 7. Risikomessung für Kreditportfolien. *[25 Punkte]* Betrachten Sie m Finanzinstitutionen, deren logarithmischer asset value durch das folgende Modell beschrieben wird

$$X_i = \sqrt{\beta_i} F + \sqrt{1-\beta_i} \epsilon_i \,,$$

für Parameter β_i mit $|\beta_i| < 1$ und unabhängige, standard normalverteilte Zufallsvariable $F, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$.

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die sogenannte *asset Korrelation*, d.h. die Korrelation von X_i und X_j und die Varianz von X_i.

(b) *[2 Punkte]* Betrachten Sie ein multivariates Merton Modell, in dem Firma i ausfällt, falls $X_i < d_i$ für gegebene Schranken $d_1, \ldots, d_m$. Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit von Firma i.

(c) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Ausfallindikatoren $Y_i = 1_{\{X_i < d_i\}}$, $1 \le i \le m$, einem probitnormalen Bernoulli Mischmodell mit Faktor $\psi = -F$ und bedingten Ausfallswahrscheinlichkeiten

$$p_i(\psi) = \Phi\left(\frac{d_i + \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right)$$

genügen. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_i$ und der Ausfallskorrelation $\mathrm{corr}(Y_i, Y_j)$ im Kontext des Mischmodells an.

(d) *[9 Punkte]* Erläutern Sie, wie man eine Realisierung von $Y_1, \ldots Y_m$ im Rahmen des multivariaten Merton Modells aus Teilaufgabe (b) bzw. im Rahmen des Misch-Modells aus Teilaufgabe (c) generieren würde und vergleichen Sie kurz die numerische Effizienz der beiden Ansätze.

Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement. *[28 Punkte]*

Betrachten Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kollektiv von N Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S und einer Restlaufzeit von 3 Jahren besitzen. (Die Versicherungssumme wird im Erlebensfall bei Ablauf des Vertrages, im Todesfall am Ende des Todesjahres ausgezahlt.) Gegeben sind die Wahrscheinlichkeit ${}_1p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 51 erreicht, und die Wahrscheinlichkeit ${}_2p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 52 erreicht.

Das Versicherungsunternehmen hat den Marktwert der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten in Zero-Bonds mit einer Laufzeit von 1 Jahr investiert.

Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern a, b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad (*)$$

Bezeichnet λ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t,T)$ und $B_\lambda(t,T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(\alpha(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $\alpha(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(\alpha_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $\alpha_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

Geben Sie alle Ergebnisse in Abhängigkeit der in der Aufgabenstellung aufgeführten Größen an.

(a) *[10 Punkte]* Unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

(b) *[2 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist. Beschreiben Sie ein Portfolio von Zerobonds, das die versicherungstechnischen Verpflichtungen repliziert.

(c) *[8 Punkte]* Nehmen Sie nun an, dass die einjährigen Zerobonds im Bestand illiquide sind und nicht verkauft werden können. Entwickeln Sie unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, eine Strategie auf Basis von Swap- oder Forward-Kontrakten, die das benötigte Risikokapital auf Null reduziert und keine Kosten verursacht.

(d) *[8 Punkte]* Für den Fall, dass die Anzahl der Toten zufällig ist, entwickeln Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe von Simulationen das zum Zeitpunkt 0 benötigte Risikokapital bestimmt, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos und des versicherungstechnischen Risikos auszugleichen. Lässt sich das benötigte Risikokapital mit einer modifizierten Version der Strategie aus c) auf Basis von Zinsinstrumenten auf Null reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße - Axiomatik

(a) Ein Risikomaß ϱ ist subadditiv, wenn $\varrho(X_1+X_2) \leq \varrho(X_1)+\varrho(X_2)$ für alle Risiken X_i gilt. Subadditivität ist eine wünschenswerte Eigenschaft, da der Diversifikationseffekt berücksichtigt und dadurch ein dezentralisiertes Risikomanagement ermöglicht wird.

Aus der Perspektive der Aufsicht könnte ein nicht subadditives Risikomaß den falschen Anreiz bieten, dass Unternehmen sich ohne eine in der Unternehmenssteuerung bedingten Motivation in kleinere Einheiten aufspalten, nur um die Solvenzkapitalanforderung zu reduzieren. Dadurch könnte eine unangemessene Aufbaustruktur des Unternehmens entstehen, die zu einem erhöhten operationellen Risiko führt.

(b) Seien X_1 und X_2 unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit

$$\mathbb{P}(X_i=-1)=0.96, \quad \mathbb{P}(X_i=10)=0.04, \quad i=1,2.$$

$-X_i$ lässt sich als Gewinn eines Versicherungsvertrages mit Prämie 1, Schadenhöhe 11 und Schadeneintrittswahrscheinlichkeit von 0.04 auffassen.

Der VaR zum Niveau 95% eines Vertrages erfasst das Risiko einer Schadenzahlung nicht:

$$VaR_{95\%}(X_i)=-1$$

Die Verteilung von X_1+X_2 ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1+X_2=-2) &= 0.96^2=0.9216,\\ \mathbb{P}(X_1+X_2=9) &= 2\cdot 0.96\cdot 0.04=0.0768,\\ \mathbb{P}(X_1+X_2=20) &= 0.04^2=0.0016.\end{aligned}$$

Es gilt

$$VaR_{95\%}(X_1+X_2)=9>-2=VaR_{95\%}(X_1)+VaR_{95\%}(X_2).$$

(c) Seien $L_1=\sum_{j=1}^d \lambda_j^1 X_j$, $L_2=\sum_{j=1}^d \lambda_j^2 X_j$ und $L=L_1+L_2$. Es gilt $L_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,2$ und $L\sim N(\mu_L,\sigma_L^2)$, da Linearkombinationen von multivariat normalverteilten Zufallsvariaben wieder multivariat normalverteilt sind. Offensichtlich gilt $\mu_L=\mu_1+\mu_2$ und

$$\sigma_L^2=\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2\leq(\sigma_1+\sigma_2)^2,$$

wobei $\rho\in[-1,1]$ die Korrelation zwischen L_1 und L_2 bezeichnet. Mit $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i)=\mu_i+\sigma_i\phi^{-1}(\alpha)$ und $\phi^{-1}(\alpha)>0$ (da $\alpha>0.5$) folgt daraus

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L)=\mu_L+\sigma_L\phi^{-1}(\alpha)\leq\mu_1+\mu_2+(\sigma_1+\sigma_2)\phi^{-1}(\alpha)=\mathrm{VaR}_\alpha(L_1)+\mathrm{VaR}_\alpha(L_2).$$

(d) Für $L_1 = \ell_1(\mathbf{x})$ und $L_2 = \ell_2(\mathbf{x})$ gilt

$$\begin{aligned}\varrho_S(L_1 + L_2) &= \sup\{\ell_1(\mathbf{x}) + \ell_2(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in S\}\\ &\leq \sup\{\ell_1(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in S\} + \sup\{\ell_2(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in S\}\\ &= \varrho_S(L_1) + \varrho_S(L_2).\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Risikomaße - Berechnung.

(a) Wegen $F(3-) = 0.75 < 0.85 < \frac{8}{9} = F(3)$ erhalten wir $VaR_{0.85} = 3$ gemäß der Definition des VaR. Nach Definition berechnen wir

$$\begin{aligned}TVaR_{0.85}(X) &= \mathbb{E}(X|X > VaR_{0.85}(X))\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 3)} \int_3^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\, dx\\ &= 9 \cdot \left[-\frac{2}{x}\right]_3^\infty\\ &= 6.\end{aligned}$$

und erhalten den Expected Shortfall als Mischung von TVaR und VaR

$$\begin{aligned}ES_{0.85}(X) &= \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{0.85}(X))}{1-0.85} \cdot TVaR_{0.85}(X)\\ &\quad + \left(1 - \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{0.85}(X))}{1-0.85}\right) \cdot VaR_{0.85}(X)\\ &= \frac{1}{9 \cdot 0.15} \cdot 6 + \left(1 - \frac{1}{1.35}\right) \cdot 3\\ &= \frac{47}{9} \approx 5,22.\end{aligned}$$

(b) Der TVaR lässt sich anschaulich als Mittelwert des Verlustes in den 15% schlechtesten Szenarien interpretieren.

Der Expected Shortfall hingegen entsteht nach Definition durch Mittelung der Werte von VaR_z, $z \geq 0.85$. Sowohl die Definition wie auch die in a) verwendete Berechnungsformel sind Entscheidungsträgern ohne mathematischen Hintergrund schwierig zu kommunizieren.

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko

(a) Wegen

$$F\left(c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c\right) = 1 - \left(\frac{c}{c + c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c}\right)^b = 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

gilt $\text{VaR}_\alpha(X) = c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c$. Den Momentenschätzer für $\text{VaR}_\alpha(X)$ erhält man nun durch Einsetzen der Momentenschätzer $\hat{b}$, $\hat{c}$ für die Parameter.

(b) Seien $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ und $s^2 := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1}(x_i - m)^2$ die Schätzwerte für Erwartungswert bzw. Varianz auf Basis der Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$. Mit dem Hinweis erhalten wir die Schätzwerte $b = \frac{2s^2}{s^2 - m^2}$ und $c = m(b-1)$ für die Parameter nach der Momentenmethode.

Algorithmus zur Bestimmung des Residualrisikos $RR(X) = \text{VaR}_\alpha\Big(X - T(\hat{b}, \hat{c})\Big)$:

1. *Simulation aus der Parameterverteilung.* Für $k = 1, \ldots, r$ wiederhole:

   i. Ziehe Zufallszahlen x_{ki}, $i = 1, \ldots, n$, aus der Paretoverteilung mit den Parametern b und c, $i = 1, \ldots, n$.

   ii. Setze $m_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{ki}$ und $s_k^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_{ki} - m_k)^2$ und berechne $b_k = \frac{2s_k^2}{s_k^2 - m_k^2}$, $c_k = m_k(b-1)$.

2. *Simulation der Residualposition.* Für $k = 1, \ldots, r$ wiederhole:

   i. Ziehe Zufallszahlen x_{li}, $i = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r'$ aus der Paretoverteilung mit den Parametern b_k und c_k, $i = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r'$.

   ii. Setze $m_l := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{li}$ und $s_l^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_{li} - m_l)^2$, $l = 1, \ldots, r'$ und berechne $b_l = \frac{2s_l^2}{s_l^2 - m_l^2}$, $c_l = m_l(b-1)$.

   iii. Setze $res_{kl} := x_{l0} - T(b_l, c_l)$, $l = 1, \ldots, r'$.

   iv. Wähle den $[(1-\alpha)r'] + 1$-größten Wert der res_{kl}, $l = 1, \ldots, r'$ und bezeichne ihn mit v_k.

3. $RR(X) := \frac{1}{r}\sum_{k=1}^r v_k$

Aufgabe 4. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken.

(a) Eine mögliche Anwendung ist die Bewertung von Rückversicherungsverträgen mit hohem attachment point im Bereich Naturkatastrophen. Hier hat man meist nur wenige Beobachtungen, eine gute Schätzung des Randverhaltens ist aber wichtig. EVT bietet eine theoretisch fundierten Methode, um dieses Problem anzugehen.
Andere mögliche Anwendungsgebiete sind etwa bestimmte Bereiche des operational risk.

(b) Es gilt

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+x)}\lambda^{\alpha-1}d\lambda\,.$$

Nach Definition der Normierungskonstante der Gamma Verteilung ist das letzte Integral gleich $\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha}$, insgesamt erhalten wir also

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha.$$

Es folgt

$$P(X > x) = x^{-\alpha}\frac{\beta}{1+\beta/x} = x^{-\alpha}L(x),$$

und $L(x) = \frac{\beta}{1+\beta/x}$ ist slowly varying (für großes x annähernd konstant). Im Fall $\Lambda = \lambda_0$ erhalten wir $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$ und somit einen exponentiell schnell abfallenden tail. Interpretation: die Unsicherheit über den Parameter Λ macht also aus einem exponentiell schnell abfallenden tail. (light-tailed distribution) einen polynomial abfallenden tail (heavy-tailed distribution).

(c) (i) Die einfachste Methode ist ein QQ Plot der Daten gegen die Exponentialverteilung. Alternativ könnte man den mean excess Plot ansehen, der im Szenario (ii) linear ansteigen sollte, während er im Szenario (i) etwa konstant ist.

(ii) Zunächst wählt man eine hohe Schranke u, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Anschließend modelliert man F_u durch eine GPD und fitted die Parameter ξ und β (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle u; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ und einen tail Schätzer durch die POT Methode.
In Szenario (i) (Λ konstant) würde man einen Wert $\hat{\xi} \approx 0$ erwarten, in Szenario (ii) erwartet man $\hat{\xi} \approx 1/\alpha > 0$ (heavy tailed Szenario).

Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten.

(a) Gründe für Abhängigkeit: Gebühren sind oft proportional zum Streitwert; bei größeren Schadensummen wird man mehr Aufwand bei der Schadenhöhenermittlung treiben etc.

(b) Die Daten deuten auf eine starke obere Randabhängigkeit aber auf keine starke Abhängigkeit im unteren Rand hin; dieses Verhalten kann durch die Gumbel copula modelliert werden, da für die Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (für $\theta > 1$) und $\lambda_l = 0$ gilt. Nach Sklar gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_Y(x)) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right). \end{aligned}$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir Unabhängigkeit, für $\theta \to \infty$ Komonotonie.

(c) (i) Zwei mögliche Verfahren zur Schätzung von θ sind Maximum likelihood und ein Momentenschätzer basierend auf Kendalls τ.

(ii) Wir haben 4 Beobachtungen und somit $\binom{4}{2} = 6$ Beobachtungen. Der Schätzer für ρ_τ berechnet sich zu $\rho_\tau = \frac{1}{6}\Big(1-1+1+1+1-1\Big) = 1/3$; damit ist $\hat{\theta} = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Aufgabe 6. Risikoaggregation und Abhängigkeitsmodellierung

(a) Vor- und Nachteile.

- Pro: Leicht berechenbar, Diversifikation wird zumindest auf informelle Weise berücksichtigt.
- Con: nicht modellbasiert außer für elliptische Verteilungen; beruht auf dem Konzept der linearen Korrelation; es ist schwer einen angemessenen Wert für ρ zu bestimmen.

(b) Für $\rho = 1$ erhält man die sogenannte “simple summation”, $\mathrm{SCR} = \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. Diese Wahl von ρ ist nicht konservativ, falls VaR als Risikomaß verwendet wird; Gegenbeispiele sind alle Beispiele in denen VaR nicht subadditiv ist. Für ES ist simple summation konservativ da ES subadditiv ist.

(c) Nach dem Satz von Höffding wird die maximale Korrelation $\rho_{\max}$ erreicht, falls beide Risiken komonoton sind. In diesem Fall gilt, dass $\mathrm{V\alpha R}(L_1{+}L_2) = \mathrm{V\alpha R}(L_1) + \mathrm{V\alpha R}(L_2)$. Dies ist im Allgemeinen nicht der Maximalwert von VaR (fehlende Subadditivität). Die Gleichung $\rho_{\max} = 1$ gilt genau dann, wenn beide Zufallsvariablen vom gleichen Typ sind und somit für $\sigma_1 = \sigma_2$. (die μ_i) dürfen verschieden sein.)

(d) Die Aussage ist im Allgemeinen nicht korrekt; für bestimmte Randverteilungen können sogar komonotone (also perfekt abhängige) Risiken eine Korrelation nahe Null aufweisen. Für elliptisch verteilte Risiken ist die Aussage hingegen korrekt.

Aufgabe 7. Risikomessung für Kreditportfolien.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) = E\Big(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2 + \sqrt{(1-\beta_i)(1-\beta_j)}\epsilon_i\epsilon_j\Big)\\ &= E(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2) = \sqrt{\beta_i\beta_j}.\end{aligned}$$

For $i=j$ ergibt sich

$$\operatorname{var}(X_i) = E(X_i^2) = E\big(\beta_i F^2 + (1-\beta_i)\epsilon_i^2\big) = \beta_i + (1-\beta_i) = 1.$$

(b) Es gilt, da $X_i \sim N(0,1)$, $\bar{p}_i = P(Y_i = 1) = P(X_i < d_i) = \Phi(d_i)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}p_i(\psi) = P(Y_i = 1 \mid \Psi = \psi) &= P(X_i < d_i \mid \Psi = \psi)\\ &= P(\sqrt{1-\beta_i}\varepsilon_i < d_i - \sqrt{\beta_i}\psi)\\ &= \Phi\left(\frac{d_i - \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right).\end{aligned}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit von Firma i berechnet sich zu

$$\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)\varphi(\psi)d\psi$$

wobei $\varphi(\cdot)$ die Dichte der Standard Normalverteilung ist. Für die Ausfallskorrelation gilt die Formel

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_i Y_j) - \bar{p}_i\bar{p}_j}{\sqrt{(\bar{p}_i - \bar{p}_i^2)(\bar{p}_j - \bar{p}_j^2)}}.$$

Die Berechnung von $\bar{p}_i$ wurde bereits diskutiert. Weiterhin gilt

$$E(Y_i Y_j) = E\big(E(Y_i Y_j \mid \Psi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)p_j(\psi)\varphi(\psi)d\psi\,.$$

(d) Simulation des multivariaten Merton Modells.

(i) Generiere $m+1$ unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen $\hat{F}, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_m$.

(ii) Setze $\hat{X}_i = \sqrt{\beta_i}\hat{F} + \sqrt{1-\beta_i}\hat{\epsilon}_i$

(iii) Ausgabe: $\hat{Y}_i = 1$, falls $\hat{X}_i < d_i$; $\hat{Y}_i = 0$, sonst.

Simulation des Bernoulli Misch Modells

(i) (Äußerer Schritt) Generiere eine Zufallsvariable $\hat{\psi} \sim N(0,1)$.

(ii) (Innerer Schritt) Generiere m unabhängige Bernoulli Zufallsvariablen $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m$ mit Parameter $p_i = p_i(\hat{\psi})$.

Die Simulation im Rahmen des Bernoulli Mischmodells ist numerisch deutlich weniger aufwändig, da man nur eine (und nicht $m+1$) normalverteilte Zufallsvariablen generieren muss.

Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement.

(a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge eines Zinsrückgangs zu bestimmen ist. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit $t \in \{0, 1\}$ (einschließlich der sofort fälligen Zahlungen) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} PV(0) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot D(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(0,2) + {}_2p_{50} \cdot D(0,3)) \\ PV(1) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(1,2) + {}_2p_{50} \cdot D(1,3)) \end{aligned}$$

Der Marktwert ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Unter Verwendung der Zerobondpreise

$$\begin{aligned} P(0,t) &= \exp\left(-A_\lambda(0,t) - B(0,t) \cdot r(0)\right) \quad \text{mit} \\ A_\lambda(0,t) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - B(0,t)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,t)^2 \end{aligned}$$

beträgt der Marktwert zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) \\ &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot P(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0,2) + {}_2p_{50} \cdot P(0,3)). \end{aligned}$$

Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) \\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1)\,|\,r(1)=r_{0.05}(1)) \\ &= S\cdot N\cdot((1-{}_1p_{50})+({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P_{0.95}(1,2)+{}_2p_{50}\cdot P_{0.95}(1,3)) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Zerobondpreise

$$\begin{aligned} P_{0.95}(1,t) &= \exp\left(-A_\lambda(1,t)-B(1,t)\cdot r_{0.05}(1)\right) \quad \text{mit} \\ A_\lambda &= \left(b_\lambda-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t-1-B(1,t))+\frac{\sigma^2}{4a}B(1,t)^2 \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1)\cdot P(0,1)-MV(0) \\ &= S\cdot N\cdot(({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P_{0.95}(1,2)+{}_2p_{50}\cdot P_{0.95}(1,3))\cdot P(0,1) \\ &\quad -S\cdot N\cdot(({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P(0,2)+{}_2p_{50}\cdot P(0,3)) \end{aligned}$$

zu stellen.

(b) Das replizierende Portfolio besteht aus Zerobonds mit Laufzeit 1 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot(1-{}_1p_{50})$, aus Zerobonds mit Laufzeit 2 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})$ und aus Zerobonds mit Laufzeit 3 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot{}_2p_{50}$. Dessen Marktwert ist gerade $MV(0)$ aus a).

(c) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds ist gleich der Summe der zum Zeitpunkt 1 fälligen Versicherungsleistungen und der Nominalbeträge Nom_1 und Nom_2,

$$\begin{aligned} Nom_1 &:= \frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P(0,2)}{P(0,1)} = \frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})}{1+F(0,1,2)} \\ Nom_2 &:= \frac{S\cdot N\cdot{}_2p_{50}\cdot P(0,3)}{P(0,1)} = \frac{S\cdot N\cdot{}_2p_{50}}{1+2F(0,1,3)}, \end{aligned}$$

wobei $F(0,1,t)$ den Forward-Zins zum Zeitpunkt 0 für die Periode $[1,t]$ bezeichnet. Zur Elimination des Zinsänderungsrisikos kann das Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt 0 einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag Nom_1 mit $K=F(0,1,2)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 2 und einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag Nom_2 mit $K=F(0,1,3)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 3 kostenlos erwerben.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 1 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_1}{P(1,2)} = Nom_1\cdot(1+L(1,2))$$

und ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 2 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_2}{P(1,3)} = Nom_2 \cdot (1 + 2L(1,3))$$

kaufen. Zusammen mit der endfälligen Zahlung der Receiver-Swaps können dann die zu den Zeitpunkten 2 und 3 fälligen Versicherungsleistungen gezahlt werden.

Der Receiver-Swap eliminiert das Zinsänderungsrisiko dadurch, dass der Terminzins $F(0,1,t)$ den variablen Zins in der Periode $[1,t]$ ersetzt.

Alternativ können zum Zeitpunkt 0 Forward-Kontrakte über den Kauf von Zerobonds zum Zeitpunkt 1 über den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot ({}_1p_{50} - {}_2p_{50})$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 2 bzw. den Nominalbetrag $S \cdot N \cdot {}_2p_{50}$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 3 geschlossen werden. Analog wie oben ist zu begründen, dass der zum Zeitpunkt 0 vereinbarte und zum Zeitpunkt 1 zahlbare Forward-Preis Nom_1 bzw. Nom_2 beträgt.

(d) Algorithmus: Simuliere unter dem realen Maß m Vektoren (r_i, N_i), $i = 1, \ldots, m$, wobei r_i eine Realisation der Short Rate $r(1)$ und N_i eine Realisation der Anzahl der Versicherten zum Zeitpunkt 1 darstellen. D.h., ziehe m Zufallszahlen r_i aus

$$\mathcal{N}\left(r(0)\exp(-a) + b(1-\exp(-a)), \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a))\right)$$

und m Zufallszahlen N_i aus $Binomial(N, {}_1p_{50})$. Berechne für jeden Vektor (r_i, N_i) den Marktwert MV_i zum Zeitpunkt 1 mit Hilfe der analytischen Formeln aus b) auf Basis des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Wähle den $[0.05 \cdot m] + 1$-größten Wert der MV_i und bezeichne ihn mit $MV_{0.95}$. Das benötigte Risikokapital ergibt sich dann als

$$RK = P(0,1)MV_{0.95} - MV(0).$$

Das benötigte Risikokapital lässt sich nicht durch eine modifizierte Version der Strategie aus c) auf Null reduzieren, da versicherungstechnische Risiken nicht durch Zinsinstrumente gehedget werden können. Es verbleibt die Unsicherheit über das Volumen der benötigten Zinsinstrumente, da der Bestandsverlauf ungewiss ist.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.1
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

2 June 2023

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 11 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Please enter your answers only in the designated sheets.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures – Axiomatics. *[24 points]*

(a) *[6 points]* Define subadditivity and explain why subadditivity might be a desirable property of a risk measure. From the perspective of a supervisory authority argue that a risk measure that fails to be subadditive could be problematic.

(b) *[6 points]* Give an example of your own choice showing that Value at Risk is not subadditive in general.

(c) *[8 points]* Suppose that $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^T$ is multivariate normally distributed. Denote by $\mathcal{M}$ the space of all loss variables of the form $L = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i$ where $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Show that VaR_α is subadditive on $\mathcal{M}$ for $\alpha > 0.5$.

(d) *[4 points]* Consider the potential loss L of a financial institution which is modelled by a risk mapping of the form

$$L = \ell(\mathbf{x}),$$

where $\mathbf{x}$ denotes some n-dimensional risk factor change and where ℓ is the risk mapping. Fix a set $S \subset \mathbb{R}^n$ of possible risk factor changes or scenarios. Then a stress test risk measure is given by

$$\varrho_S(L) = \sup\{\ell(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}.$$

Show that ϱ_S is subadditive.

Question 2. Risk Measures – Computation. *[14 points]*

Suppose that the loss variable X has the cumulative distribution function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & ; \quad 0 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & ; \quad x \geq 3. \end{cases}$$

(a) *[10 points]* Determine the risk measures Value at Risk, Tail Value at Risk and Expected Shortfall at the confidence level of 85%.

(b) *[4 points]* Discuss how to possibly interpret the values of the risk measures obtained in part a).

Question 3. Risk Measures and Parameter Risk. *[24 points]*

Let the loss variable X be Pareto-distributed with parameters b, c, i.e. its cumulative distribution function is given by

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x}\right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) *[4 points]* Verify that the estimator for $VaR_\alpha(X)$ based on the moment estimators $\hat{b}$, $\hat{c}$ for the parameters is given by

$$T(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

(b) *[20 points]* We are given n independent observations $x_1, \ldots, x_n$. In order to evaluate parameter risk, develop an algorithm determining the Value at Risk at the confidence level α of the residual position $X - T(\hat{b}, \hat{c})$ by means of simulations.

Hint. You may use the following relations without proof:

$$b = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 - \mu^2}, \quad c = \mu(b-1),$$

where μ and σ^2 denote the expected value and the variance, respectively.

Question 4. Extreme Value Theory and Tail Behaviour of Risks. *[25 points]*

(a) *[3 points]* "Extreme Value Theory is a useful tool in actuarial risk management". Discuss this statement briefly, using a risk management example of your choice.

(b) *[10 points]* Consider an insurance contract with claim size given by the random variable X. The distribution of X is modelled via an exponential distribution with possibly random parameter Λ, so that $P(X > x) = E(e^{-\Lambda x})$. We consider the following two scenarios:

(i) $\Lambda = \lambda_0$ (deterministic parameter), so that $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$.

(ii) Λ has a Gamma distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$ and density $g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$, where $\Gamma(\alpha) > 0$ denotes the Gamma function (the exact form does not matter for solving the assignment) and the factor $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}$ is the norming constant of the Gamma-density. In that case

$$P(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda \, .$$

Show that in scenario (ii) the claim size X has a Pareto distribution with survival function

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

and conclude that the tail of X decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Compare this tail behavior with the behavior of the survival function of X in scenario (i) and discuss the differences from a modelling point of view.

(c) Data analysis

(i) *[3 points]* You have n independent observations $x_1, \ldots, x_n$ of X at your disposal. Describe a graphical method for discriminating between scenario (i) and scenario (ii).

(ii) *[9 points]* Explain briefly how one could estimate the tail of X and in particular the parameter $\xi = 1/\alpha$ via the POT-method. Which estimated value $\hat{\xi}$ would you expect for both scenarios, provided that the number n of observations is sufficiently large so that estimation errors are negligible.

FIGURE 1
PLOT OF ALAE VERSUS LOSS.
BOTH VARIABLES ARE ON A LOGARITHMIC SCALE.
THIRTY-FOUR LOSS OBSERVATIONS ARE CENSORED.
THIS PLOT DEMONSTRATES A STRONG RELATIONSHIP BETWEEN ALAE AND LOSS.

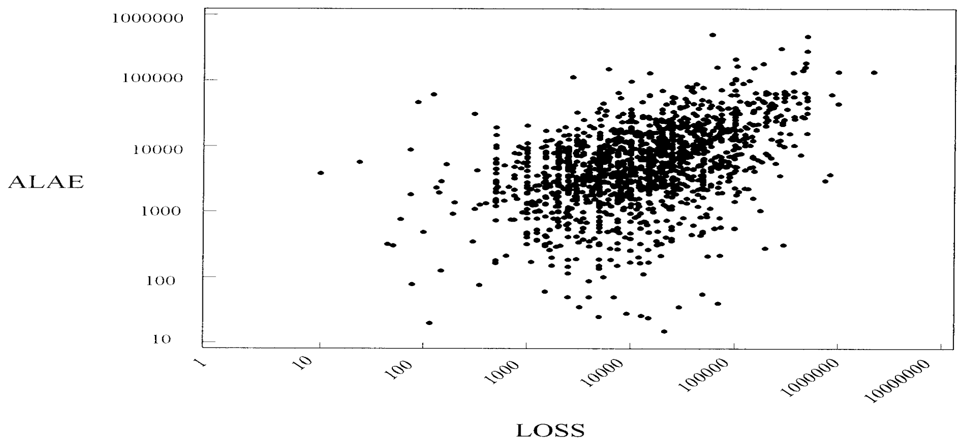

Abbildung 1: Scatter plot of the claims data; (from Frees-Valdez (97)).

Question 5. Copulas Applied to Claims Data. *[20 points]*

Consider an insurance company that has claim data of the form $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, where X_i represents the size of the claim and Y_i denotes the so-called *allocated loss adjustment expenses* (ALAE). (The ALAE comprise for instance lawyer fees or claim investigations costs). A scatter plot is given in Figure 1.

(a) *[2 points]* Explain briefly, why one should expect dependence between claim size X and ALAE Y.

(b) *[7 points]* A Gumbel copula with parameter θ is used to model the joint distribution of X and Y; it holds that

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty .$$

To model the marginal distribution of X and Y the company uses Pareto distributions with parameters λ_X, α_X respectively λ_Y, α_Y where $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, that is

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

and similarly for Y. Discuss qualitatively why the Gumbel copula is well-suited for modelling the data from Figure 1 and give the joint distribution function $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$. What happens for $\theta = 1$ resp. for $\theta \to \infty$?

(c) (i) *[6 points]* Sketch two methods for estimating θ.

(ii) *[5 points]* You have the following 4 observations of X and Y.

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Compute Kendalls τ and an estimator for θ.

Hint. For the Gumbel copula it holds that $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$.

Question 6. Risk Aggregation and Dependence Modelling. *[20 points]*

Consider an insurance company with two business lines and associated loss L_1, L_2. The company uses a positive homogeneous risk measure ρ to determine the risk capital for the individual business lines so that $\mathrm{SCR}_i = \rho(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR stands for solvency capital requirement). In order to determine the firm-wide SCR(L) the company uses a capital aggregation rule of the form

$$\mathrm{SCR}(L) = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \tag{1}$$

here $\rho \in [0, 1]$ is a correlation parameter that is exogenously given by the regulator.

(a) *[4 points]* Discuss strengths and weaknesses of a capital aggregation rule of the form (1).

(b) *[5 points]* Which aggregation rule does one obtain for $\rho = 1$ in (1). Is this choice always conservative in the sense that $\mathrm{SCR}(L) \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$? Consider the case that SCR is computed using VaR and Expected Shortfall.

(c) *[8 points]* Assume that L_1 and L_2 are lognormally distributed, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. For which dependence structure is the correlation between the two risks maximal? Is this also the dependence structure that maximizes Value at Risk of L? Under which conditions on the parameters μ_i, σ_i is the maximal correlation equal to one?

(d) *[3 points]* Comment in view of c) on the statement “A correlation of two risks close to zero always implies a high potential for diversification.” (Concentrate on the case of positive correlation.)

Question 7. Credit Portfolio Risk. *[25 points]*

Consider m financial institutions with logarithmic asset value given by the following model

$$X_i = \sqrt{\beta_i} F + \sqrt{1-\beta_i} \epsilon_i \,,$$

for parameters β_i with $|\beta_i| < 1$ and independent standard normal random variables $F, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$.

(a) *[4 points]* Compute the so-called *asset correlation*, that is the correlation of X_i and X_j and the variance of X_i.

(b) *[2 points]* Consider a multivariate Merton model, where firm i defaults, if $X_i < d_i$ for given thresholds $d_1, \ldots, d_m$. Compute the default probability of firma i.

(c) *[10 points]* Show that the default indicators $Y_i = 1_{\{X_i < d_i\}}$, $1 \leq i \leq m$, follow a probit normal Bernoulli mixture model with factor $\psi = -F$ and conditional default probabilities

$$p_i(\psi) = \Phi\left(\frac{d_i + \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right).$$

Give a formula for computing the default probability $\bar{p}_i$ and the default correlation $\mathrm{corr}(Y_i, Y_j)$ in the context of the mixture model.

(d) *[9 points]* Explain how to generate a realisation of $Y_1, \ldots Y_m$ in the context of the multivariate Merton model from (b) respectively in the context of the Bernoulli mixture model from (c) and compare the numerical efficiency of both approaches.

Question 8. Interest Rate Risk Management. *[28 points]*

At time $t = 0$, consider a portfolio of N persons aged 50 that hold a paid-up endowment policy with insured sum S and a remaining time to expiration of 3 years. (The sum insured is paid out at expiry of the contract in case of survival and otherwise at the end of the year of death.) We are given the probability ${}_1p_{50}$, that a 50-year-old person reaches the age of 51, and the probability ${}_2p_{50}$ that a 50-year-old person reaches the age of 52.

The insurance company has invested the market value of the insurance liabilities in zero-bonds with maturity of 1 year.

The short rate $r(t)$ is supposed to follow the Vasicek model with parameters a, b and σ under the real world measure:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad (*)$$

If λ denotes the market price of risk then, under the risk neutral measure Q, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Hint. In the Vasicek model, the expected value of the stochastic discounting factor $D(t,T)$ is given by:

- under the **real world measure**:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A(t,T)$ and $B(t,T)$,

- under the **risk neutral measure**:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A_\lambda(t,T)$ and $B_\lambda(t,T)$.

Further, the short rate follows a normal distribution:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ with deterministic functions $a(t)$ and $b(t)$ under the **real world measure**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ with deterministic functions $a_\lambda(t)$ and $b_\lambda(t)$ under the **risk neutral measure**.

Represent all results in terms of the above mentioned quantities.

(a) *[10 points]* Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk with probability 0.95.

(b) *[2 points]* Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, describe a portfolio of zero-bonds replicating the insurance liabilities.

(c) *[8 points]* Suppose now that the zero bonds with maturity 1 that the insurance company holds are illiquid and cannot be sold to a third party. Develop a strategy using swap or forward contracts that, under the assumption that the actual number of deaths is equal to the expected number, reduces the required risk capital to zero and does not involve any costs.

(d) *[8 points]* In the case that the number of deaths is random, develop an algorithm that, by means of simulations, determines the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in market value of the insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk and insurance risk with probability 0.95. Is it possible to reduce the required risk capital to zero by means of a modified version of the strategy from c) based on interest rate derivatives? Give reasons for your answer.

Proposal for solution

Question 1. Risk Measures –Axiomatics.

(a) A risk measure is subadditive if $\varrho(X_1+X_2) \leq \varrho(X_1)+\varrho(X_2)$ holds for all risks X_i. Subadditivity is desirable as it encourages diversification and makes decentralized risk management possible.

From the perspective of a supervisory authority a risk measure which is not subadditive could give the wrong incentive to break up a company into various subsidiaries in order to reduce the required regulatory capital. This could lead to some inadequate organization entailing a high operational risk.

(b) Let X_1 and X_2 be iid random variables with

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = 0.96, \quad \mathbb{P}(X_i = 10) = 0.04, \quad i = 1, 2.$$

$-X_i$ may be viewed as the profit of an insurance contract with premium 1, claim size 11 and probability of a claim occuring 0.04.

The VaR at confidence level 95% of a contract does not take into account the risk of a claim payment:

$$VaR_{95\%}(X_i) = -1$$

The distribution of $X_1 + X_2$ is given by:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1+X_2=-2) &= 0.96^2 = 0.9216, \\ \mathbb{P}(X_1+X_2=9) &= 2 \cdot 0.96 \cdot 0.04 = 0.0768, \\ \mathbb{P}(X_1+X_2=20) &= 0.04^2 = 0.0016. \end{aligned}$$

It holds that

$$VaR_{95\%}(X_1+X_2) = 9 > -2 = VaR_{95\%}(X_1) + VaR_{95\%}(X_2).$$

(c) Let $L_1 = \sum_{j=1}^d \lambda_j^1 X_j$ and $L_2 = \sum_{j=1}^d \lambda_j^2 X_j$ and let $L = L_1 + L_2$. It holds that $L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$ and $L \sim N(\mu_L, \sigma_L^2)$. Here we use that linear combinations of multivariate normal random variables are again multivariate normal. Obviously, we have $\mu_L = \mu_1 + \mu_2$ and

$$\sigma_L^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1+\sigma_2)^2,$$

where $\rho \in [-1, 1]$ denotes the correlation between L_1 and L_2. It follows that $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = \mu_i + \sigma_i\phi^{-1}(\alpha)$ and hence, since $\phi^{-1}(\alpha) > 0$ (as $\alpha > 0.5$)

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu_L + \sigma_L\phi^{-1}(\alpha) \leq \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1+\sigma_2)\phi^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2).$$

(d) It holds for $L_1 = \ell_1(\mathbf{x})$ and $L_2 = \ell_2(\mathbf{x})$ that

$$\begin{aligned}\varrho_S(L_1 + L_2) &= \sup\{\ell_1(\mathbf{x}) + \ell_2(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in S\}\\ &\le \sup\{\ell_1(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in S\} + \sup\{\ell_2(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in S\}\\ &= \varrho_S(L_1) + \varrho_S(L_2)\end{aligned}$$

Question 2. Risk Measures – Computation.

(a) Because of $F(3-) = 0.75 < 0.85 < \frac{8}{9} = F(3)$, we obtain $VaR_{0.85} = 3$ by the definition of Value at Risk. Using the definition, we compute

$$\begin{aligned}TVaR_{0.85}(X) &= \mathbb{E}(X|X > VaR_{0.85}(X))\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > 3)} \int_3^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\, dx\\ &= 9 \cdot \left[-\frac{2}{x}\right]_3^\infty\\ &= 6.\end{aligned}$$

and obtain the Expected Shortfall as a mixture of TVaR and VaR.

$$\begin{aligned}ES_{0.85}(X) &= \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{0.85}(X))}{1-0.85} \cdot TVaR_{0.85}(X)\\ &\quad + \left(1 - \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{0.85}(X))}{1-0.85}\right) \cdot VaR_{0.85}(X)\\ &= \frac{1}{9 \cdot 0.15} \cdot 6 + \left(1 - \frac{1}{1.35}\right) \cdot 3\\ &= \frac{47}{9} \approx 5.22.\end{aligned}$$

(b) TVaR may be looked upon as the mean loss given the event that the loss exceeds the VaR. This event occurs with probability 15%.

By definition, the Expected Shortfall is the average of all VaR_z, $z \ge 0.85$. Both the definition and the formula used in part a) to compute the Expected Shortfall are difficult to explain to managers without mathematical background.

Question 3. Risk Measures and Parameter Risk.

(a) Because of

$$F\left(c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-c\right)=1-\left(\frac{c}{c+c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-c}\right)^{b}=1-(1-\alpha)=\alpha$$

it holds that $\mathrm{VaR}_\alpha(X)=c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-c$. We get the moment estimator for $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ by inserting the moment estimators $\hat{b}$, $\hat{c}$ for the parameters.

(b) Let $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ and $s^2:=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1}(x_i-m)^2$ be the estimated values for the expected value and the variance, repsectivey, based on the observations $x_1,\dots,x_n$. Using the hint, we get the estimated values $b=\frac{2s^2}{s^2-m^2}$ and $c=m(b-1)$ for the Parameters according to the method of moments.

Algorithm to evaluate the residual risk $RR(X)=\mathrm{VaR}_\alpha\left(X-T(\hat{b},\hat{c})\right)$:

1. *Simulation of the parameter distribution.* For $k=1,\dots,r$ repeat:

   i. Draw random numbers x_{ki}, $i=1,\dots,n$, from the Pareto distribution with parameters b and c, $i=1,\dots,n$.

   ii. Set $m_k:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ki}$ and $s_k^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ki}-m_k)^2$ and compute $b_k=\frac{2s_k^2}{s_k^2-m_k^2}$, $c_k=m_k(b-1)$.

2. *Simulation of the residual position.* For $k=1,\dots,r$ repeat:

   i. Draw random numbers x_{li}, $i=0,1,\dots,n$, $l=1,\dots,r'$ from the Pareto distribution with parameters b_k and c_k, $i=0,1,\dots,n$, $l=1,\dots,r'$.

   ii. Set $m_l:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{li}$ and $s_l^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{li}-m_l)^2$, $l=1,\dots,r'$ and compute $b_l=\frac{2s_l^2}{s_l^2-m_l^2}$, $c_l=m_l(b-1)$.

   iii. Set $res_{kl}:=x_{l0}-T(b_l,c_l)$, $l=1,\dots,r'$.

   iv. Choose the $[(1-\alpha)r']+1$-largest value of res_{kl}, $l=1,\dots,r'$ and denote it by v_k.

3. $RR(X):=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}v_k$

Question 4. Extreme Value Theory and Tail Behaviour of Risks.

(a) A possible application is the valuation of reinsurance contracts with high attachment point for Nat Cat risk. In this area one often has only few available data but a precise estimate for the tail behavior is very important. EVT offers an approach rooted in statistical theory to address this problem. Other potential applications are certain aspects of operational risk (other answers are possible as well).

(b) It holds that

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+x)} \lambda^{\alpha-1} d\lambda\,.$$

By definition of the norming constant of the Gamma distribution the last integral equals $\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha}$, hence we get

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha.$$

It follows that

$$P(X > x) = x^{-\alpha} \frac{\beta}{1+\beta/x} = x^{-\alpha} L(x),$$

and $L(x) = \frac{\beta}{1+\beta/x}$ is slowly varying (for x large roughly constant). In the case where $\Lambda = \lambda_0$ we get $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$ and hence an exponentially decaying tail.

Interpretation: the uncertainty regarding the parameter Λ transforms an exponential tail (light tailed distribution) into a polynomially decaying tail (heavy-tailed distribution).

(c) (i) The simplest approach is a QQ plot of the data against the exponential distribution. Alternatively, one might consider the mean excess plot; this plot should be linearly increasing in scenario (ii) and it should be roughly constant in scenario (i).

(ii) First one chooses a high threshold u, for instance the 95% quantile of the data. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, where F_u represents the excess distribution of F with respect to the threshold u. Next one models F_u by a GPD and one fits ξ and β to the observed threshold exceedances (eg via maximum likelihood); this leads to the estimates $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ and via the POT approach to an estimate for the tail of the losses.

In scenario (i) (Λ constant) one would expect $\hat{\xi} \approx 0$, in scenario (ii) one would expect $\hat{\xi} \approx 1/\alpha > 0$ (heavy tailed scenario).

Question 5. Copulas Applied to Claims Data.

(a) Reasons for dependence: fees proportional to the value of the underlying claim; more intense investigations for large claims etc.

(b) The data point to a pronounced upper tail dependence but no lower tail dependence; this can be modelled with a Gumbel copula, since for the Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (for $\theta > 1$) and $\lambda_l = 0$. Sklar's theorem gives that

$$F(x,y) = C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_Y(x))$$
$$= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right).$$

For $\theta = 1$ we get independence, for $\theta \to \infty$ comonotonicity.

(c) (i) Two possible approaches for estimating θ are maximum likelihood and a moment estimator based on Kendalls τ.

(ii) We have 4 observations and hence $\binom{4}{2} = 6$ pairs. The estimator for ρ_τ computes to $\rho_\tau = \frac{1}{6}\Big(1-1+1+1+1-1\Big) = 1/3$; hence $\hat\theta = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Question 6. Risk Aggregation and Dependence Modelling

(a)
- Pro: easy to compute, reflects potential diversification at least in an ad-hoc way.
- Con: not model-based except for elliptical distributions; relies on the problematic notion of linear correlation; finding an appropriate value for ρ is difficult.

(b) For $\rho = 1$ we obtain simple summation, $\mathrm{SCR}(L) = \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. This choice is not conservative if we use VaR as risk measure; any counterexample to the subadditivity of VaR is a counterexample. For ES simple summation would be conservative since ES is subadditive.

(c) According to Höffding's theorem maximal correlation $\rho_{\max}$ is attained if both risks are comonotonic. In that case it holds that $\mathrm{V\alpha R}(L_1 + L_2) = \mathrm{V\alpha R}(L_1) + \mathrm{V\alpha R}(L_2)$. This is in general not the maximal value of as VaR is not subadditive. It holds that $\rho_{\max} = 1$ if and only if both rvs are of the same type, that is for $\sigma_1 = \sigma_2$.

(d) The statement is in general not correct; depending on the choice of the marginal distribution even comonotonic (perfectly dependent) risks may have low linear correlation (for instance two lognormal risks with very different σ). The statement is however correct for elliptical distributions.

Question 7. Credit Portfolio Risk.

(a) It holds that

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) = E\big(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2 + \sqrt{(1-\beta_i)(1-\beta_j)}\epsilon_i\epsilon_j\big)\\ &= E(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2) = \sqrt{\beta_i\beta_j}.\end{aligned}$$

For $i = j$ we get

$$\operatorname{var}(X_i) = E(X_i^2) = E\big(\beta_i F^2 + (1-\beta_i)\epsilon_i^2\big) = \beta_i + (1-\beta_i) = 1.$$

(b) Since $X_i \sim N(0,1)$, one has $\bar{p}_i = P(Y_i = 1) = P(X_i < d_i) = \Phi(d_i)$.

(c) It holds that

$$\begin{aligned}p_i(\psi) = P(Y_i = 1 \mid \Psi = \psi) &= P(X_i < d_i \mid \Psi = \psi)\\ &= P(\sqrt{1-\beta_i}\varepsilon_i < d_i - \sqrt{\beta_i}\psi)\\ &= \Phi\left(\frac{d_i - \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right).\end{aligned}$$

The default probability of firm i computes to

$$\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)\varphi(\psi)d\psi$$

where $\varphi(\cdot)$ is the standard normal density. For the default correlation we have the formula

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_iY_j) - \bar{p}_i\bar{p}_j}{\sqrt{(\bar{p}_i - \bar{p}_i^2)(\bar{p}_j - \bar{p}_j^2)}}.$$

We already explained how to compute $\bar{p}_i$. Further it holds that

$$E(Y_iY_j) = E\big(E(Y_iY_j \mid \Psi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)p_j(\psi)\varphi(\psi)d\psi\,.$$

(d) Simulation of the multivariate Merton model.

(i) Generate $m+1$ independent $N(0,1)$-distributed random variables $\hat{F}, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_m$.

(ii) Put $\hat{X}_i = \sqrt{\beta_i}\hat{F} + \sqrt{1-\beta_i}\hat{\epsilon}_i$

(iii) Return $\hat{Y}_i = 1$, if $\hat{X}_i < d_i$; $\hat{Y}_i = 0$, else.

Simulation of the Bernoulli mixture model

(i) (Outer step) Generate a random variable $\hat{\psi} \sim N(0,1)$.

(ii) (Inner step) Generate m independent Bernoulli rvs $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m$ with parameter $p_i = p_i(\hat{\psi})$.

The simulation in the context of the Bernoulli mixture model is more efficient numerically, since only one (instead of $m+1$) standard normal rvs need to be generated.

Question 8. Interest Rate Risk Management.

(a) Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number means that we do not take into account insurance risk. As a consequence, we have to determine the required risk capital needed to buffer an increase in market value of insurance liabilities due to decreasing interest rates. The stochastic present value of the insurance liabilities at time $t \in \{0, 1\}$ (including the payments falling due immediately) is then given by

$$\begin{aligned} PV(0) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot D(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(0,2) + {}_2p_{50} \cdot D(0,3)) \\ PV(1) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(1,2) + {}_2p_{50} \cdot D(1,3)) \end{aligned}$$

The market value is determined under the risk neutral measure. Using the prices of the zero bonds

$$\begin{aligned} P(0,t) &= \exp\left(-A_\lambda(0,t) - B(0,t) \cdot r(0)\right) \quad \text{with} \\ A_\lambda(0,t) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - B(0,t)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,t)^2, \end{aligned}$$

we get the market value at time 0

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) \\ &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot P(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0,2) + {}_2p_{50} \cdot P(0,3)). \end{aligned}$$

The 95%-quantile of the market value of the insurance liabilities at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real-world measure

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) \\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

we obtain the 5%- quantile

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In this VaR-scenario, the market value of insurance liabilities is given by

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = r_{0.05}(1)) \\ &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P_{0.95}(1,2) + {}_2p_{50} \cdot P_{0.95}(1,3)) \end{aligned}$$

using the zero bond prices

$$\begin{aligned} P_{0.95}(1,t) &= \exp\left(-A_\lambda(1,t) - B(1,t) \cdot r_{0.05}(1)\right) \quad \text{with} \\ A_\lambda &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - 1 - B(1,t)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(1,t)^2. \end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1)\cdot P(0,1) - MV(0)\\ &= S\cdot N\cdot(({}_1p_{50} - {}_2p_{50})\cdot P_{0.95}(1,2) + {}_2p_{50}\cdot P_{0.95}(1,3))\cdot P(0,1)\\ &\quad - S\cdot N\cdot(({}_1p_{50} - {}_2p_{50})\cdot P(0,2) + {}_2p_{50}\cdot P(0,3)).\end{aligned}$$

(b) The replicating portfolio consists of zero bonds with maturity 1 and nominal amount $S\cdot N\cdot(1 - {}_1p_{50})$, zero bonds with maturity 2 and nominal amount $S\cdot N\cdot({}_1p_{50} - {}_2p_{50})$ and zero bonds with maturity 3 and nominal amount $S\cdot N\cdot {}_2p_{50}$. Its market value turns out to be $MV(0)$ from a).

(c) The payment of the zero bonds expiring at time 1 is equal to the sum of the insurance liabilities falling due at time 1 and the nominal amounts Nom_1 and Nom_2,

$$\begin{aligned}Nom_1 &:= \frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50} - {}_2p_{50})\cdot P(0,2)}{P(0,1)} = \frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50} - {}_2p_{50})}{1+F(0,1,2)}\\ Nom_2 &:= \frac{S\cdot N\cdot {}_2p_{50}\cdot P(0,3)}{P(0,1)} = \frac{S\cdot N\cdot {}_2p_{50}}{1+2F(0,1,3)},\end{aligned}$$

where $F(0,1,t)$ denotes the forward rate at time 0 for the period $[1,t]$. In order to eliminate interest rate risk the insurance company can enter the following derivatives at time 0 for free: a receiver swap with nominal amount Nom_1, fixed leg $K = F(0,1,2)$ and single payment date 2 and a receiver swap with nominal amount Nom_2, fixed leg $K = F(0,1,3)$ and single payment date 3.

At time 1, the insurance company can buy default-free zero bonds with maturity 1 and nominal amount

$$\frac{Nom_1}{P(1,2)} = Nom_1\cdot(1+L(1,2))$$

and default-free zero bonds with maturity 2 and nominal amount

$$\frac{Nom_2}{P(1,3)} = Nom_2\cdot(1+2L(1,3)).$$

Together with the payments of the receiver swaps, then the insurance benefits falling due at times 2 and 3 can be paid out.

The receiver-swap eliminates interest rate risk by replacing the variable rate of the period $[1,t]$ with the fixed forward rate $F(0,1,t)$.

Alternatively, at time 0, it is possible to enter forward contracts entitling to buy zero bonds with nominal amount $S\cdot N\cdot({}_1p_{50} - {}_2p_{50})$ and maturity 2 and nominal amount $S\cdot N\cdot {}_2p_{50}$ and maturity 3 at time 1. In an analogous manner as above, then we have to argue that the forward price which is agreed upon at time 0 and has to be paid at time 1 is equal to Nom_1 and Nom_2, respectively.

(d) Algorithm: Under the real-world measure, simulate m vectors (r_i, N_i), $i = 1, \ldots, m$, where r_i is a realisation of the short rate $r(1)$ and N_i a realisation of the number of insured persons at time 1. I.e., draw m random numbers r_i from

$$\mathcal{N}\left(r(0)\exp(-a) + b(1-\exp(-a)), \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a))\right)$$

and m random numbers N_i from $\text{Binomial}(N, {}_1p_{50})$. For each vector (r_i, N_i), compute the market value MV_i at time 1 with the help of the analytical formulae from b) based on the risk neutral probability measure. Choose the $[0.05 \cdot m] + 1$-largest value of the MV_i and denote it by $MV_{0.95}$. Then, the required risk capital is determined by

$$RC = P(0,1) \cdot MV_{0.95} - MV(0).$$

The required risk capital cannot be reduced to zero by a modified version of the strategy from c), since insurance risk cannot be hedged by interest rate derivatives. There remains uncertainty about the necessary amount of interest rate derivatives, because the evolution of the number of insured persons is uncertain.