Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

# Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 2. Juni 2023

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

**Aufgabe 1. Risikomaße - Axiomatik.** *[24 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Erklären Sie Subadditivität und argumentieren Sie, weshalb sie eine wünschenswerte Eigenschaft von Risikomaßen darstellen könnte. Geben Sie ein Argument an, weshalb ein nicht subadditives Risikomaß aus der Perspektive der Aufsicht problematisch sein könnte.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass der Value at Risk im Allgemeinen nicht subadditiv ist.

(c) *[8 Punkte]* Betrachten Sie einen multivariat normalverteilten Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^T$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ den Raum aller Verlustgrößen der Gestalt $L = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{VaR}_\alpha$ subadditiv auf dem Raum $\mathcal{M}$ für alle $\alpha > 0.5$ ist.

(d) *[4 Punkte]* Betrachten Sie die Verlustgröße $L$ eines Finanzinstituts, die als Funktion $\ell$ der Änderung eines $n$-dimensionalen Risikofaktors $\mathbf{x}$ modelliert wird:

$$L = \ell(\mathbf{x})$$

Für eine vorgegebene Menge von Szenarien $S \subset \mathbb{R}^n$ von möglichen Änderungen der Risikofaktoren (Szenarien) wird ein Stresstest-Risikomaß durch

$$\varrho_S(L) = \sup\{\ell(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in S\}$$

eingeführt. Zeigen Sie, dass $\varrho_S$ subadditiv ist.

**Aufgabe 2. Risikomaße - Berechnung.** *[14 Punkte]* Betrachten Sie eine Verlustgröße $X$ mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & ; \quad 0 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & ; \quad x \geq 3. \end{cases}$$

(a) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau 85% die Risikomaße Value-at-Risk, Tail Value at Risk und Expected Shortfall.

(b) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie die Aussagekraft der Werte der Risikomaße Tail Value at Risk und Expected Shortfall im Kontext von Teil a).

**Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko.** *[24 Punkte]* Die Verlustgröße $X$ sei Pareto-verteilt mit den Parametern $b$, $c$, d.h. mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x}\right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) *[4 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Schätzer für $VaR_\alpha(X)$ unter Verwendung der Momentenschätzer $\hat{b}$, $\hat{c}$ für die Parameter gegeben ist durch

$$T(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

(b) *[20 Punkte]* Es liegen $n$ unabhängige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ vor. Entwickeln Sie zur Bewertung des Parameterrisikos einen Algorithmus, der den Value at Risk zum Niveau $\alpha$ der Residualposition $X - T(\hat{b}, \hat{c})$ per Simulation bestimmt.

*Hinweis.* Sie können ohne Beweis den folgenden Zusammenhang verwenden:

$$b = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 - \mu^2}, \quad c = \mu(b-1),$$

wobei $\mu$ den Erwartungswert und $\sigma^2$ die Varianz bezeichnen.

**Aufgabe 4. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken** *[25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* “Extremwerttheorie ist ein nützliches Werkzeug im aktuariellen Risikomanagement”. Diskutieren Sie diese Aussage anhand eines selbst gewählten Beispiels aus dem aktuariellen Risikomanagement.

(b) *[10 Punkte)]* Betrachten Sie einen Versicherungsvertrag mit Schadenshöhe gegeben durch die Zufallsgröße $X$. Die Verteilung von $X$ ist durch eine Exponentialverteilung mit potentiell zufälligem Parameter $\Lambda$ gegeben, so dass $P(X > x) = E(e^{-\Lambda x})$. Wir betrachten die folgenden 2 Szenarien:

(i) $\Lambda = \lambda_0$ (deterministischer Parameter), so dass $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$.

(ii) $\Lambda$ hat eine Gamma Verteilung mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ und Dichte $g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$. Hier ist $\Gamma(\alpha) > 0$ die Gamma Funktion (die genaue Form ist für die Lösung der Aufgabe unwichtig) und der Vorfaktor $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}$ ist die Normierungskonstante der Gamma-Dichte. In diesem Fall gilt

$$P(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda\,.$$

Zeigen Sie, dass in Szenario (ii) die Schadensgröße $X$ eine Pareto Verteilung mit Überlebensfunktion

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

hat und folgern Sie, dass der tail von $X$ polynomial abfällt mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Vergleichen Sie dieses Randverhalten mit dem Verhalten der Überlebensfunktion von $X$ in Szenario (i) und diskutieren Sie den Unterschied unter Modellierungsgesichtspunkten.

(c) Datenanalyse

(i) *[3 Punkte]* Sie haben $n$ unabhängige Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von $X$ gegeben. Beschreiben Sie eine grafische Methode, um Szenario (i) von Szenario (ii) zu unterscheiden.

(ii) *[9 Punkte]* Erklären Sie kurz, wie der tail von $X$ und speziell der Parameter $\xi = 1/\alpha$ mittels der POT-Methode geschätzt werden kann. Welchen Schätzwert $\hat{\xi}$ würden Sie in etwa für die beiden Szenarien erwarten (unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsanzahl $n$ ausreichend groß ist, so dass Schätzfehler vernachlässigt werden können).

**FIGURE 1**
**PLOT OF ALAE VERSUS LOSS.**
**BOTH VARIABLES ARE ON A LOGARITHMIC SCALE.**
**THIRTY-FOUR LOSS OBSERVATIONS ARE CENSORED.**
**THIS PLOT DEMONSTRATES A STRONG RELATIONSHIP BETWEEN ALAE AND LOSS.**

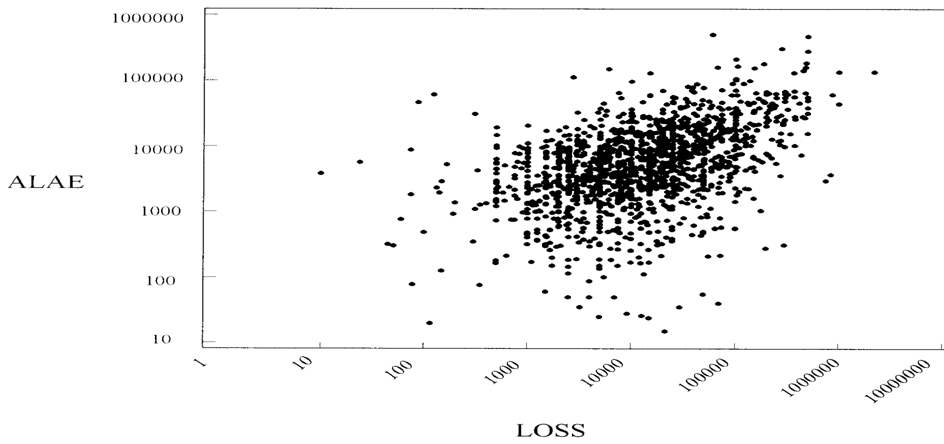


Abbildung 1: Scatter plot der Schadendaten; (aus Frees-Valdez (97)).

**Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten.** *[20 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen verfüge über Schadendaten der Form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, wobei $X_i$ die Höhe des Schadens und $Y_i$ die sogenannten *allocated loss adjustment expenses* (ALAE) beschreibt. (Die ALAE umfassen beispielsweise Anwalts- und Gutachterkosten im Zusammenhang mit der Schadensabwicklung). Ein scatter Plot der losses findet sich in Bild 1.

(a) *[2 Punkte]* Erläutern Sie kurz, warum man Abhängigkeiten zwischen Schadenshöhe $X$ und ALAE $Y$ erwarten sollte.

(b) *[7 Punkte]* Die Gumbel Copula mit Parameter $\theta$ werde zur Modellierung der gemeinsamen Verteilung von $X$ und $Y$ verwendet; es gilt

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

Zur Modellierung der Verteilung von $X$ und $Y$ werde eine Pareto Verteilung mit Parametern $\lambda_X, \alpha_X$ bzw. $\lambda_Y, \alpha_Y$ verwendet mit $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, d.h.

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

und analog für $Y$. Begründen Sie qualitativ, warum die Gumbel copula gut zur Beschreibung der in Bild 1 dargestellten Daten geeignet ist und geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ an. Was passiert für $\theta = 1$ bzw. $\theta \to \infty$?

(c) (i) *[6 Punkte]* Skizzieren Sie zwei Methoden zur Schätzung von $\theta$.

(ii) *[5 Punkte]* Sie haben die folgenden 4 Beobachtungen von $X$ und $Y$.

| data point | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 15.4 | 0.6 | 122.2 | 107.1 |
| $Y$ | 9.1 | 0.7 | 2.8 | 16.7 |

Berechnen Sie Kendalls $\tau$ und einen Schätzer für $\theta$.

*Hinweis*. Für die Gumbel copula gilt $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$.

**Aufgabe 6. Risikoaggregation und Abhängigkeitsmodellierung.** *[20 Punkte]* Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit zwei Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1$, $L_2$. Das Unternehmen verwendet ein positiv homogenes Risikomaß $\rho$ um das Risikokapital für das Gesamtunternehmen zu bestimmen, so dass $\mathrm{SCR}_i = \rho(L_i)$, $i = 1, 2$. (SCR steht für solvency capital requirement). Um das firmenweite SCR zu bestimmen verwendet das Unternehmen eine Kapitalallokationsregel der Form

$$\mathrm{SCR} = \left(\mathrm{SCR}_1^2 + 2\rho \cdot \mathrm{SCR}_1 \cdot \mathrm{SCR}_2 + \mathrm{SCR}_2^2\right)^{1/2}; \qquad (1)$$

hierbei ist $\rho \in [0, 1]$ ein Korrelationsparameter, der vom Regulator vorgegeben wird.

(a) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie Stärken und Schwächen einer Kapitalallokationsregel der Form (1).

(b) *[5 Punkte]* Welche Aggregationsregel erhält man, wenn man in (1) $\rho = 1$ in setzt? Ist diese Wahl von $\rho$ immer konservativ, in dem Sinn, dass die Ungleichung $\mathrm{SCR}(L) \leq \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$ gilt? Betrachten Sie den Fall, dass das SCR mit VaR und Expected Shortfall berechnet wird.

(c) *[8 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $L_1$ und $L_2$ lognormalverteilt sind, $L_1 \sim \mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $L_2 \sim \mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Für welche Abhängigkeitsstruktur ist die Korrelation zwischen den Risiken maximal? Ist dies auch die Abhängigkeitsstruktur, die den Value at Risk von $L$ maximiert? Unter welchen Bedingungen an die Parameter $\mu_i$, $\sigma_i$, $i = 1, 2$, ist die maximal mögliche Korrelation gleich 1?

(d) *[3 Punkte]* Diskutieren Sie im Hinblick auf Teilaufgabe c) die Aussage “Eine Korrelation nahe Null zwischen zwei Risiken impliziert immer ein großes Potential zur Diversifizierung von Risiken.” (Betrachten Sie nur den Fall positiver Korrelationen.)

**Aufgabe 7. Risikomessung für Kreditportfolien.** *[25 Punkte]* Betrachten Sie $m$ Finanzinstitutionen, deren logarithmischer asset value durch das folgende Modell beschrieben wird

$$X_i = \sqrt{\beta_i} F + \sqrt{1-\beta_i} \epsilon_i ,$$

für Parameter $\beta_i$ mit $|\beta_i| < 1$ und unabhängige, standard normalverteilte Zufallsvariable $F, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$.

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die sogenannte *asset Korrelation*, d.h. die Korrelation von $X_i$ und $X_j$ und die Varianz von $X_i$.

(b) *[2 Punkte]* Betrachten Sie ein multivariates Merton Modell, in dem Firma $i$ ausfällt, falls $X_i < d_i$ für gegebene Schranken $d_1, \ldots, d_m$. Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit von Firma $i$.

(c) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Ausfallindikatoren $Y_i = 1_{\{X_i < d_i\}}$, $1 \le i \le m$, einem probitnormalen Bernoulli Mischmodell mit Faktor $\psi = -F$ und bedingten Ausfallswahrscheinlichkeiten

$$p_i(\psi) = \Phi\left(\frac{d_i + \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right)$$

genügen. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_i$ und der Ausfallskorrelation $\mathrm{corr}(Y_i, Y_j)$ im Kontext des Mischmodells an.

(d) *[9 Punkte]* Erläutern Sie, wie man eine Realisierung von $Y_1, \ldots Y_m$ im Rahmen des multivariaten Merton Modells aus Teilaufgabe (b) bzw. im Rahmen des Misch-Modells aus Teilaufgabe (c) generieren würde und vergleichen Sie kurz die numerische Effizienz der beiden Ansätze.

**Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement.** *[28 Punkte]*

Betrachten Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kollektiv von $N$ Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie gemischte Versicherung mit Versicherungssumme $S$ und einer Restlaufzeit von 3 Jahren besitzen. (Die Versicherungssumme wird im Erlebensfall bei Ablauf des Vertrages, im Todesfall am Ende des Todesjahres ausgezahlt.) Gegeben sind die Wahrscheinlichkeit ${}_1p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 51 erreicht, und die Wahrscheinlichkeit ${}_2p_{50}$, dass eine 50-jährige Person das Alter 52 erreicht.

Das Versicherungsunternehmen hat den Marktwert der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten in Zero-Bonds mit einer Laufzeit von 1 Jahr investiert.

Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern $a$, $b$ und $\sigma$ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad (*)$$

Bezeichnet $\lambda$ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß $Q$ dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

*Hinweis.* Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t,T)$ und $B_\lambda(t,T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(\alpha(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $\alpha(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(\alpha_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $\alpha_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

**Geben Sie alle Ergebnisse in Abhängigkeit der in der Aufgabenstellung aufgeführten Größen an.**

(a) *[10 Punkte]* Unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

(b) *[2 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist. Beschreiben Sie ein Portfolio von Zerobonds, das die versicherungstechnischen Verpflichtungen repliziert.

(c) *[8 Punkte]* Nehmen Sie nun an, dass die einjährigen Zerobonds im Bestand illiquide sind und nicht verkauft werden können. Entwickeln Sie unter der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, eine Strategie auf Basis von Swap- oder Forward-Kontrakten, die das benötigte Risikokapital auf Null reduziert und keine Kosten verursacht.

(d) *[8 Punkte]* Für den Fall, dass die Anzahl der Toten zufällig ist, entwickeln Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe von Simulationen das zum Zeitpunkt 0 benötigte Risikokapital bestimmt, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge des Zinsrisikos und des versicherungstechnischen Risikos auszugleichen. Lässt sich das benötigte Risikokapital mit einer modifizierten Version der Strategie aus c) auf Basis von Zinsinstrumenten auf Null reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1. Risikomaße - Axiomatik

(a) Ein Risikomaß $\varrho$ ist subadditiv, wenn $\varrho(X_1+X_2) \leq \varrho(X_1)+\varrho(X_2)$ für alle Risiken $X_i$ gilt. Subadditivität ist eine wünschenswerte Eigenschaft, da der Diversifikationseffekt berücksichtigt und dadurch ein dezentralisiertes Risikomanagement ermöglicht wird.

Aus der Perspektive der Aufsicht könnte ein nicht subadditives Risikomaß den falschen Anreiz bieten, dass Unternehmen sich ohne eine in der Unternehmenssteuerung bedingten Motivation in kleinere Einheiten aufspalten, nur um die Solvenzkapitalanforderung zu reduzieren. Dadurch könnte eine unangemessene Aufbaustruktur des Unternehmens entstehen, die zu einem erhöhten operationellen Risiko führt.

(b) Seien $X_1$ und $X_2$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = 0.96, \quad \mathbb{P}(X_i = 10) = 0.04, \quad i = 1, 2.$$

$-X_i$ lässt sich als Gewinn eines Versicherungsvertrages mit Prämie 1, Schadenhöhe 11 und Schadeneintrittswahrscheinlichkeit von 0.04 auffassen.

Der VaR zum Niveau 95% eines Vertrages erfasst das Risiko einer Schadenzahlung nicht:

$$VaR_{95\%}(X_i) = -1$$

Die Verteilung von $X_1 + X_2$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = -2) &= 0.96^2 = 0.9216, \\ \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 9) &= 2 \cdot 0.96 \cdot 0.04 = 0.0768, \\ \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 20) &= 0.04^2 = 0.0016. \end{aligned}$$

Es gilt

$$VaR_{95\%}(X_1 + X_2) = 9 > -2 = VaR_{95\%}(X_1) + VaR_{95\%}(X_2).$$

(c) Seien $L_1 = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^1 X_j$, $L_2 = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^2 X_j$ und $L = L_1 + L_2$. Es gilt $L_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , $i = 1, 2$ und $L \sim N(\mu_L, \sigma_L^2)$, da Linearkombinationen von multivariat normalverteilten Zufallsvariaben wieder multivariat normalverteilt sind. Offensichtlich gilt $\mu_L = \mu_1 + \mu_2$ und

$$\sigma_L^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2,$$

wobei $\rho \in [-1, 1]$ die Korrelation zwischen $L_1$ und $L_2$ bezeichnet. Mit $\mathrm{VaR}_\alpha(L_i) = \mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(\alpha)$ und $\phi^{-1}(\alpha) > 0$ (da $\alpha > 0.5$) folgt daraus

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu_L + \sigma_L \phi^{-1}(\alpha) \leq \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)\phi^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2).$$

(d) Für $L_1 = \ell_1(\mathbf{x})$ und $L_2 = \ell_2(\mathbf{x})$ gilt

$$\begin{aligned}\varrho_S(L_1+L_2) &= \sup\{\ell_1(\mathbf{x})+\ell_2(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in S\}\\ &\le \sup\{\ell_1(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in S\}+\sup\{\ell_2(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in S\}\\ &= \varrho_S(L_1)+\varrho_S(L_2).\end{aligned}$$

**Aufgabe 2. Risikomaße - Berechnung.**

(a) Wegen $F(3-) = 0.75 < 0.85 < \frac{8}{9} = F(3)$ erhalten wir $VaR_{0.85} = 3$ gemäß der Definition des VaR. Nach Definition berechnen wir

$$\begin{aligned}TVaR_{0.85}(X) &= \mathbb{E}(X|X > VaR_{0.85}(X))\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X>3)}\int_3^\infty x\cdot\frac{2}{x^3}\,dx\\ &= 9\cdot\left[-\frac{2}{x}\right]_3^\infty\\ &= 6.\end{aligned}$$

und erhalten den Expected Shortfall als Mischung von TVaR und VaR

$$\begin{aligned}ES_{0.85}(X) &= \frac{\mathbb{P}(X>VaR_{0.85}(X))}{1-0.85}\cdot TVaR_{0.85}(X)\\ &\quad+\left(1-\frac{\mathbb{P}(X>VaR_{0.85}(X))}{1-0.85}\right)\cdot VaR_{0.85}(X)\\ &= \frac{1}{9\cdot 0.15}\cdot 6+\left(1-\frac{1}{1.35}\right)\cdot 3\\ &= \frac{47}{9}\approx 5,22.\end{aligned}$$

(b) Der TVaR lässt sich anschaulich als Mittelwert des Verlustes in den 15% schlechtesten Szenarien interpretieren.

Der Expected Shortfall hingegen entsteht nach Definition durch Mittelung der Werte von $VaR_z$, $z \ge 0.85$. Sowohl die Definition wie auch die in a) verwendete Berechnungsformel sind Entscheidungsträgern ohne mathematischen Hintergrund schwierig zu kommunizieren.

**Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko**

(a) Wegen

$$F\left(c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-c\right)=1-\left(\frac{c}{c+c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}-c}\right)^b=1-(1-\alpha)=\alpha$$

gilt $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c$. Den Momentenschätzer für $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ erhält man nun durch Einsetzen der Momentenschätzer $\hat{b}$, $\hat{c}$ für die Parameter.

(b) Seien $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ und $s^2 := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1}(x_i - m)^2$ die Schätzwerte für Erwartungswert bzw. Varianz auf Basis der Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$. Mit dem Hinweis erhalten wir die Schätzwerte $b = \frac{2s^2}{s^2-m^2}$ und $c = m(b-1)$ für die Parameter nach der Momentenmethode.

**Algorithmus** zur Bestimmung des Residualrisikos $RR(X) = \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - T(\hat{b}, \hat{c})\right)$:

1. *Simulation aus der Parameterverteilung.* Für $k = 1, \ldots, r$ wiederhole:

   i. Ziehe Zufallszahlen $x_{ki}$, $i = 1, \ldots, n$, aus der Paretoverteilung mit den Parametern $b$ und $c$, $i = 1, \ldots, n$.

   ii. Setze $m_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{ki}$ und $s_k^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_{ki} - m_k)^2$ und berechne $b_k = \frac{2s_k^2}{s_k^2 - m_k^2}$, $c_k = m_k(b-1)$.

2. *Simulation der Residualposition.* Für $k = 1, \ldots, r$ wiederhole:

   i. Ziehe Zufallszahlen $x_{li}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r'$ aus der Paretoverteilung mit den Parametern $b_k$ und $c_k$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r'$.

   ii. Setze $m_l := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{li}$ und $s_l^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_{li} - m_l)^2$, $l = 1, \ldots, r'$ und berechne $b_l = \frac{2s_l^2}{s_l^2 - m_l^2}$, $c_l = m_l(b-1)$.

   iii. Setze $res_{kl} := x_{l0} - T(b_l, c_l)$, $l = 1, \ldots, r'$.

   iv. Wähle den $[(1-\alpha)r'] + 1$-größten Wert der $res_{kl}$, $l = 1, \ldots, r'$ und bezeichne ihn mit $v_k$.

3. $RR(X) := \frac{1}{r}\sum_{k=1}^r v_k$

**Aufgabe 4. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken.**

(a) Eine mögliche Anwendung ist die Bewertung von Rückversicherungsverträgen mit hohem attachment point im Bereich Naturkatastrophen. Hier hat man meist nur wenige Beobachtungen, eine gute Schätzung des Randverhaltens ist aber wichtig. EVT bietet eine theoretisch fundierten Methode, um dieses Problem anzugehen.
Andere mögliche Anwendungsgebiete sind etwa bestimmte Bereiche des operational risk.

(b) Es gilt

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+x)} \lambda^{\alpha-1} d\lambda\,.$$

Nach Definition der Normierungskonstante der Gamma Verteilung ist das letzte Integral gleich $\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha}$, insgesamt erhalten wir also

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha.$$

Es folgt

$$P(X > x) = x^{-\alpha} \frac{\beta}{1+\beta/x} = x^{-\alpha} L(x),$$

und $L(x) = \frac{\beta}{1+\beta/x}$ ist slowly varying (für großes $x$ annähernd konstant). Im Fall $\Lambda = \lambda_0$ erhalten wir $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$ und somit einen exponentiell schnell abfallenden tail. Interpretation: die Unsicherheit über den Parameter $\Lambda$ macht also aus einem exponentiell schnell abfallenden tail. (light-tailed distribution) einen polynomial abfallenden tail (heavy-tailed distribution).

(c) (i) Die einfachste Methode ist ein QQ Plot der Daten gegen die Exponentialverteilung. Alternativ könnte man den mean excess Plot ansehen, der im Szenario (ii) linear ansteigen sollte, während er im Szenario (i) etwa konstant ist.

(ii) Zunächst wählt man eine hohe Schranke $u$, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, wobei $F_u$ die excess distribution von $F$ bezüglich $u$ bezeichnet. Anschließend modelliert man $F_u$ durch eine GPD und fitted die Parameter $\xi$ und $\beta$ (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle $u$; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ und einen tail Schätzer durch die POT Methode.
In Szenario (i) ($\Lambda$ konstant) würde man einen Wert $\hat{\xi} \approx 0$ erwarten, in Szenario (ii) erwartet man $\hat{\xi} \approx 1/\alpha > 0$ (heavy tailed Szenario).

**Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten.**

(a) Gründe für Abhängigkeit: Gebühren sind oft proportional zum Streitwert; bei größeren Schadensummen wird man mehr Aufwand bei der Schadenhöhenermittlung treiben etc.

(b) Die Daten deuten auf eine starke obere Randabhängigkeit aber auf keine starke Abhängigkeit im unteren Rand hin; dieses Verhalten kann durch die Gumbel copula modelliert werden, da für die Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (für $\theta > 1$) und $\lambda_l = 0$ gilt. Nach Sklar gilt

$$F(x,y) = C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_Y(x))$$
$$= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right).$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir Unabhängigkeit, für $\theta \to \infty$ Komonotonie.

(c) (i) Zwei mögliche Verfahren zur Schätzung von $\theta$ sind Maximum likelihood und ein Momentenschätzer basierend auf Kendalls $\tau$.

(ii) Wir haben 4 Beobachtungen und somit $\binom{4}{2} = 6$ Beobachtungen. Der Schätzer für $\rho_\tau$ berechnet sich zu $\rho_\tau = \frac{1}{6}\Big(1-1+1+1+1-1\Big) = 1/3$; damit ist $\hat{\theta} = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

**Aufgabe 6. Risikoaggregation und Abhängigkeitsmodellierung**

(a) Vor- und Nachteile.

- Pro: Leicht berechenbar, Diversifikation wird zumindest auf informelle Weise berücksichtigt.
- Con: nicht modellbasiert außer für elliptische Verteilungen; beruht auf dem Konzept der linearen Korrelation; es ist schwer einen angemessenen Wert für $\rho$ zu bestimmen.

(b) Für $\rho = 1$ erhält man die sogenannte “simple summation”, $\mathrm{SCR} = \mathrm{SCR}_1 + \mathrm{SCR}_2$. Diese Wahl von $\rho$ ist nicht konservativ, falls VaR als Risikomaß verwendet wird; Gegenbeispiele sind alle Beispiele in denen VaR nicht subadditiv ist. Für ES ist simple summation konservativ da ES subadditiv ist.

(c) Nach dem Satz von Höffding wird die maximale Korrelation $\rho_{\max}$ erreicht, falls beide Risiken komonoton sind. In diesem Fall gilt, dass $\mathrm{V\alpha R}(L_1{+}L_2) = \mathrm{V\alpha R}(L_1) + \mathrm{V\alpha R}(L_2)$. Dies ist im Allgemeinen nicht der Maximalwert von VaR (fehlende Subadditivität). Die Gleichung $\rho_{\max} = 1$ gilt genau dann, wenn beide Zufallsvariablen vom gleichen Typ sind und somit für $\sigma_1 = \sigma_2$. (die $\mu_i$) dürfen verschieden sein.)

(d) Die Aussage ist im Allgemeinen nicht korrekt; für bestimmte Randverteilungen können sogar komonotone (also perfekt abhängige) Risiken eine Korrelation nahe Null aufweisen. Für elliptisch verteilte Risiken ist die Aussage hingegen korrekt.

**Aufgabe 7. Risikomessung für Kreditportfolien.**

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) = E\Big(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2 + \sqrt{(1-\beta_i)(1-\beta_j)}\epsilon_i\epsilon_j\Big)\\ &= E(\sqrt{\beta_i\beta_j}F^2) = \sqrt{\beta_i\beta_j}.\end{aligned}$$

For $i = j$ ergibt sich

$$\operatorname{var}(X_i) = E(X_i^2) = E\big(\beta_i F^2 + (1-\beta_i)\epsilon_i^2\big) = \beta_i + (1-\beta_i) = 1.$$

(b) Es gilt, da $X_i \sim N(0,1)$, $\bar{p}_i = P(Y_i = 1) = P(X_i < d_i) = \Phi(d_i)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}p_i(\psi) = P(Y_i = 1 \mid \Psi = \psi) &= P(X_i < d_i \mid \Psi = \psi)\\ &= P(\sqrt{1-\beta_i}\varepsilon_i < d_i - \sqrt{\beta_i}\psi)\\ &= \Phi\left(\frac{d_i - \sqrt{\beta_i}\psi}{\sqrt{1-\beta_i}}\right).\end{aligned}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit von Firma $i$ berechnet sich zu

$$\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)\varphi(\psi)d\psi$$

wobei $\varphi(\cdot)$ die Dichte der Standard Normalverteilung ist. Für die Ausfallskorrelation gilt die Formel

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_iY_j) - \bar{p}_i\bar{p}_j}{\sqrt{(\bar{p}_i - \bar{p}_i^2)(\bar{p}_j - \bar{p}_j^2)}}.$$

Die Berechnung von $\bar{p}_i$ wurde bereits diskutiert. Weiterhin gilt

$$E(Y_iY_j) = E\big(E(Y_iY_j \mid \Psi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\psi)p_j(\psi)\varphi(\psi)d\psi\,.$$

(d) Simulation des multivariaten Merton Modells.

(i) Generiere $m+1$ unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen $\hat{F}, \hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_m$.

(ii) Setze $\hat{X}_i = \sqrt{\beta_i}\hat{F} + \sqrt{1-\beta_i}\hat{\epsilon}_i$

(iii) Ausgabe: $\hat{Y}_i = 1$, falls $\hat{X}_i < d_i$; $\hat{Y}_i = 0$, sonst.

Simulation des Bernoulli Misch Modells

(i) (Äußerer Schritt) Generiere eine Zufallsvariable $\hat{\psi} \sim N(0,1)$.

(ii) (Innerer Schritt) Generiere $m$ unabhängige Bernoulli Zufallsvariablen $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m$ mit Parameter $p_i = p_i(\hat{\psi})$.

Die Simulation im Rahmen des Bernoulli Mischmodells ist numerisch deutlich weniger aufwändig, da man nur eine (und nicht $m+1$) normalverteilte Zufallsvariablen generieren muss.

**Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement.**

(a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten infolge eines Zinsrückgangs zu bestimmen ist. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit $t \in \{0, 1\}$ (einschließlich der sofort fälligen Zahlungen) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} PV(0) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot D(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(0,2) + {}_2p_{50} \cdot D(0,3)) \\ PV(1) &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot D(1,2) + {}_2p_{50} \cdot D(1,3)) \end{aligned}$$

Der Marktwert ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Unter Verwendung der Zerobondpreise

$$\begin{aligned} P(0,t) &= \exp\left(-A_\lambda(0,t) - B(0,t) \cdot r(0)\right) \quad \text{mit} \\ A_\lambda(0,t) &= \left(b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t - B(0,t)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,t)^2 \end{aligned}$$

beträgt der Marktwert zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} MV(0) &= \mathbb{E}_Q(PV(0)) \\ &= S \cdot N \cdot ((1 - {}_1p_{50}) \cdot P(0,1) + ({}_1p_{50} - {}_2p_{50}) \cdot P(0,2) + {}_2p_{50} \cdot P(0,3)). \end{aligned}$$

Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= r(0)\exp(-a) + b(1 - \exp(-a)) \\ Var(r(1)) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q(PV(1)\,|\,r(1)=r_{0.05}(1)) \\ &= S\cdot N\cdot((1-{}_1p_{50})+({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P_{0.95}(1,2)+{}_2p_{50}\cdot P_{0.95}(1,3)) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Zerobondpreise

$$\begin{aligned} P_{0.95}(1,t) &= \exp\left(-A_\lambda(1,t)-B(1,t)\cdot r_{0.05}(1)\right) \quad \text{mit} \\ A_\lambda &= \left(b_\lambda-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(t-1-B(1,t))+\frac{\sigma^2}{4a}B(1,t)^2 \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) &= MV_{0.95}(1)\cdot P(0,1)-MV(0) \\ &= S\cdot N\cdot(({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P_{0.95}(1,2)+{}_2p_{50}\cdot P_{0.95}(1,3))\cdot P(0,1) \\ &\quad -S\cdot N\cdot(({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P(0,2)+{}_2p_{50}\cdot P(0,3)) \end{aligned}$$

zu stellen.

(b) Das replizierende Portfolio besteht aus Zerobonds mit Laufzeit 1 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot(1-{}_1p_{50})$, aus Zerobonds mit Laufzeit 2 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})$ und aus Zerobonds mit Laufzeit 3 über den Nominalbetrag $S\cdot N\cdot{}_2p_{50}$. Dessen Marktwert ist gerade $MV(0)$ aus a).

(c) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds ist gleich der Summe der zum Zeitpunkt 1 fälligen Versicherungsleistungen und der Nominalbeträge $Nom_1$ und $Nom_2$,

$$\begin{aligned} Nom_1 &:= \frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})\cdot P(0,2)}{P(0,1)}=\frac{S\cdot N\cdot({}_1p_{50}-{}_2p_{50})}{1+F(0,1,2)} \\ Nom_2 &:= \frac{S\cdot N\cdot{}_2p_{50}\cdot P(0,3)}{P(0,1)}=\frac{S\cdot N\cdot{}_2p_{50}}{1+2F(0,1,3)}, \end{aligned}$$

wobei $F(0,1,t)$ den Forward-Zins zum Zeitpunkt 0 für die Periode $[1,t]$ bezeichnet. Zur Elimination des Zinsänderungsrisikos kann das Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt 0 einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag $Nom_1$ mit $K=F(0,1,2)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 2 und einen Receiver-Swap über den Nominalbetrag $Nom_2$ mit $K=F(0,1,3)$ und einzigem Zahlungszeitpunkt 3 kostenlos erwerben.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 1 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_1}{P(1,2)}=Nom_1\cdot(1+L(1,2))$$

und ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 2 und Nominalbetrag

$$\frac{Nom_2}{P(1,3)} = Nom_2 \cdot (1 + 2L(1,3))$$

kaufen. Zusammen mit der endfälligen Zahlung der Receiver-Swaps können dann die zu den Zeitpunkten 2 und 3 fälligen Versicherungsleistungen gezahlt werden.

Der Receiver-Swap eliminiert das Zinsänderungsrisiko dadurch, dass der Terminzins $F(0,1,t)$ den variablen Zins in der Periode $[1,t]$ ersetzt.

Alternativ können zum Zeitpunkt 0 Forward-Kontrakte über den Kauf von Zerobonds zum Zeitpunkt 1 über den Nominalbetrag $S{\cdot}N{\cdot}({}_1p_{50}{-}{}_2p_{50})$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 2 bzw. den Nominalbetrag $S{\cdot}N{\cdot}{}_2p_{50}$ mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 3 geschlossen werden. Analog wie oben ist zu begründen, dass der zum Zeitpunkt 0 vereinbarte und zum Zeitpunkt 1 zahlbare Forward-Preis $Nom_1$ bzw. $Nom_2$ beträgt.

(d) Algorithmus: Simuliere unter dem realen Maß $m$ Vektoren $(r_i, N_i)$, $i = 1, \ldots, m$, wobei $r_i$ eine Realisation der Short Rate $r(1)$ und $N_i$ eine Realisation der Anzahl der Versicherten zum Zeitpunkt 1 darstellen. D.h., ziehe $m$ Zufallszahlen $r_i$ aus

$$\mathcal{N}\left(r(0)\exp(-a) + b(1-\exp(-a)), \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a))\right)$$

und $m$ Zufallszahlen $N_i$ aus $Binomial(N, {}_1p_{50})$. Berechne für jeden Vektor $(r_i, N_i)$ den Marktwert $MV_i$ zum Zeitpunkt 1 mit Hilfe der analytischen Formeln aus b) auf Basis des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Wähle den $[0.05 \cdot m]$ + 1-größten Wert der $MV_i$ und bezeichne ihn mit $MV_{0.95}$. Das benötigte Risikokapital ergibt sich dann als

$$RK = P(0,1)MV_{0.95} - MV(0).$$

Das benötigte Risikokapital lässt sich nicht durch eine modifizierte Version der Strategie aus c) auf Null reduzieren, da versicherungstechnische Risiken nicht durch Zinsinstrumente gehedget werden können. Es verbleibt die Unsicherheit über das Volumen der benötigten Zinsinstrumente, da der Bestandsverlauf ungewiss ist.