DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 26. Mai 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 (Auswahl von Tarifmerkmalen) [23 Punkte]

Gegeben sei folgende Situation:

Betrachten Sie drei mögliche Tarifmerkmale der Kfz-Kaskoversicherung mit nachstehenden Faktoren, die den relativen Schadenbedarfsunterschied zwischen den jeweiligen Merkmalsausprägungen ausdrücken.

Merkmal A

Ausprägung	Faktor
1	0,5
2	1,9

Merkmal B

Ausprägung	Faktor
1	0,8
2	1,5

Merkmal C

Ausprägung	Faktor
1	0,5
2	0,9
3	1,2
4	1,6

(a) Berechnen Sie für jedes Merkmal eindimensional den maximal möglichen relativen Spreiz (in Prozent).

Nehmen Sie an, dass Sie noch kein Merkmal für den Tarif ausgewählt haben. Welches erscheint auf dieser Basis als das Wichtigste mit Blick auf die tarifliche Risikodifferenzierung, um es auszuwählen?

In der Situation der schrittweisen Merkmalsauswahl für den Tarif wird eindimensional die Signifikanz aller Merkmale bestimmt. Was kann nach Auswahl des ersten Merkmals mit den Signifikanzen der anderen Merkmale qualitativ passieren? (5 Punkte)

(b) Nehmen Sie an, dass die Merkmale B und C für den Tarif ausgewählt wurden. Welches ist der maximal mögliche relative Spreiz für den aus B und C bestehenden Tarif, wenn Sie annehmen, dass die Merkmale B und C unabhängig sind? (3 Punkte)

(c) Wie eben stellen die Merkmale B und C den Tarif dar. Jemand konfrontiert Sie mit der Aussage, dass das Merkmal A sehr stark risikodifferenzierend sei und daher zusätzlich für den Tarif betrachtet werden müsste.

(i) Beschreiben Sie qualitativ, was in dieser Situation wie (nennen Sie hierzu ein mögliches Verfahren) zu überprüfen ist.

(ii) Wie nennt man das Phänomen, wenn ein Merkmal die Risikodifferenzierung durch andere Merkmale ganz oder teilweise ebenso leisten kann?

(iii) Nehmen Sie an A sei der Neuwert eines Kfz, B das Alter des VN und C der Fahrzeugtyp. Geben Sie anhand dieser Situation qualitativ eine mögliche Erklärung für das genannte Phänomen (Merkmale B und C als Tarif einerseits und Merkmal A zusätzlich andererseits).

(7 Punkte)

(d) Nehmen Sie die drei Merkmale A, B und C mit der jeweiligen eindimensionalen Risikodifferenzierung wie oben an. Der aktuelle Tarif bestehe aus B und C.

Szenario 1: A sei der Neuwert des Kfz, der auf einer Kundenangabe beruht, B sei das Alter des VN und C der Fahrzeugtyp basierend auf den Fahrzeugpapieren. Die mögliche Risikodifferenzierung insgesamt sei ähnlich zwischen A sowie B und C. Nennen Sie qualitativ Argumente, die aus VU-Sicht für oder gegen einen Wechsel vom Tarif bestehend aus B und C zu einem Tarif bestehend aus A sprechen.

Szenario 2: Der Tarif besteht aus B und C, die jetzt aber die Motorstärke in kW und der Neuwert des Kfz als Kundenangabe sind. Das Merkmal A sei jetzt der Fahrzeugtyp basierend auf den Fahrzeugpapieren. Welche Argumente aus VU-Sicht für oder gegen einen Wechsel von B und C zu A sehen Sie jetzt?

(8 Punkte)

Aufgabe 2 (Bestandsgrößen insbes. Prämien und deren Zuordnung zu Schäden) [24 Punkte]

(a) Nennen Sie drei mögliche Bestandsgrößen und jeweils eine mögliche Verwendung in einer Kenngröße oder für einen Analyse- bzw. Bewertungszweck. (6 Punkte)

(b) Nehmen Sie an, dass in einem Kalenderjahr nachstehende Prämienvolumina gebucht werden:

- Zum 1.1. 1.000 Policen mit einer Jahresdurchschnittsprämie von 500
- Zum 1.4. 500 Policen mit einer Jahresdurchschnittsprämie von 600
- Zum 1.9. 1.800 Policen mit einer Jahresdurchschnittsprämie von 400

Welche Gesamtprämie wurde in diesem Kalenderjahr gebucht und wieviel Prämie in diesem Jahr verdient? (6 Punkte)

(c) Benennen Sie zwei Arten der Zuordnung von Schäden zu Prämien und jeweils ein Anwendungsbeispiel. (4 Punkte)

(d) Nehmen Sie an, dass in einem Geschäftsjahr x zu 10.000 Jahreseinheiten 900 Schäden und im Folgejahr $x+1$ weitere 100 gemeldet werden, die sich sämtlich noch im Jahr x ereignet haben.

Im Folgejahr $x+1$ hat sich der Bestand dieses Portfolios auf 20.000 Jahreseinheiten verdoppelt. Im Jahr $x+1$ werden zu diesem Bestand 1.800 Schäden gemeldet. Wie kann die Situation zum Jahr x bzgl. der Spätschadenmeldungen auf das Jahr $x+1$ übertragen werden? Absolut oder relativ? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Welche Schadenhäufigkeit im Jahr $x+1$ erwarten Sie für diesen Bestand in der Anfalljahresbetrachtung? (8 Punkte)

Aufgabe 3 (Credibility-Verfahren) [33 Punkte]

(a) Nennen Sie eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendung von Credibility-Verfahren bzgl. der Verschiedenheit der zu betrachtenden Risiken. (3 Punkte)

(b) Ein heuristischer Credibility-Ansatz beruht auf der Approximation mit der Standard-Normalverteilung:

$$P\left(\sqrt{n}\cdot\frac{|SB-\mu|}{\sigma}\leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\alpha$$

Daraus kann man einen Konfidenzbereich für die Realisierung des Schadenbedarfs SB herleiten:

$$\mu-\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma\leq SB\leq\mu+\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sigma$$

Des Weiteren ergibt sich die Mindestbestandsgröße hier zu:

$$n_0=\frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

Dabei ist n die Risikenanzahl, SB die Realisierung des Schadenbedarfs mit dem Erwartungswert μ, σ die zugehörige Standardabweichung, u das zweiseitige Quantil der Standard-Normalverteilung zum Signifikanzniveau $1-\alpha$ und ε die maximal tolerierte relative Abweichung von SB zum Erwartungswert.

Erläutern Sie, wie sich hieraus ein Credibility-Ansatz (Beschreibung konstituierender Elemente und Anwendungsbeispiel) herleiten lässt und welcher Effekt bei dem Credibility-Faktor zu beachten ist. Nennen Sie ein Anwendungsbeispiel. (8 Punkte)

(c) Gegeben seien drei Kfz-Flotten, die in drei Jahren folgende Schadenbedarfe zeigen:

	SB im Jahr			
Flottennr.	1	2	3	Gesamt
1	63	69	57	63
2	220	42	94	119
3	547	203	614	455
Gesamt	277	105	255	212

Vereinfachend sei angenommen, dass alle Flotten gleich groß sind sowie im Zeitablauf konstante Bestandsgrößen aufweisen. Damit ist das Bühlmann-

Modell anwendbar. Berechnen Sie die drei Schätzer

$$\hat{m} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}R_{ij}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(R_{ij}-\frac{R_{i+}}{J}\right)^2$$

$$\hat{w} = \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{R_{i+}}{J}-\hat{m}\right)^2-\frac{\hat{u}}{J}$$

mit $I = 3$ Flotten in $J = 3$ Jahren und den Schadenbedarfen R_{ij}.

Berechnen Sie weiter den Credibility-Faktor c (der ist für alle Flotten gleich), indem Sie zunächst den korrekten Term für x (dabei gilt die Mengenidentität $\{\hat{u}, \hat{w}\} = \{38.562, 19.013\}$) in $c = \frac{J}{J+x}$ einsetzen und den jeweiligen Credibility-Schätzer für den Schadenbedarf jeder Flotte.

Hinweis: Bei der Berechnung führt die Anwendung angemessener Rundungen nicht zu Punktabzug. (12 Punkte)

(d) Der Schätzer für w kann in manchen Situationen negative Werte annehmen. Beschreiben Sie qualitativ, was das bedeutet und welcher Credibility-Schätzer dann resultiert. (4 Punkte)

(e) Welches Problem des Bühlmann-Modells löst das Bühlmann-Straub-Modell? Welche Voraussetzung des Bühlmann-Straub-Modells ist kritisch? Was kann hierfür eine Lösung sein? Bitte jeweils nur qualitativ beantworten. (6 Punkte)

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 (Cat Burning Cost) [25 Punkte]

(a) Skizzieren Sie, wie die Prämienvolumina bei einem XL pro Risiko bzw. bei einem Naturgefahren-Cat XL in die Burning Cost-Rechnung einfließen. Begründen Sie, warum man für die beiden Vertragsarten unterschiedlich vorgeht. (5 Punkte)

(b) Für einen Naturgefahren-Cat XL 7.000 xs 3.000 liegen Prämien für den Zeitraum 2017–2022, Prämien-Schätzungen für 2023 und 2024 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2017	200.000	100	100
2018	230.000	105	103
2019	280.000	110	106
2020	300.000	111	109
2021	330.000	112	113
2022	350.000	115	125
2023	380.000	125	135
2024	400.000	135	140

Im Beobachtungszeitraum 2017–2022 sind folgende Schadenereignisse bekannt:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2017	1.500
2	2019	4.000
3	2021	7.000
4	2022	3.000

Berechnen Sie den as-if Cat Burning Cost BC^{Cat} für den Beobachtungszeitraum 2017–2022 und das Quotierungsjahr $Q = 2024$. (20 Punkte)

Aufgabe 5 (Feuer-Exposurequotierung) [25 Punkte]

(a) Was ist die grundlegende Annahme bezüglich der Schadenhöhenverteilung der Einzelrisiken bei der Feuer-Exposurequotierung? (2 Punkte)

(b) Nennen Sie beispielhaft zwei Probleme, die bei der Feuer-Exposurequotierung in der Praxis auftreten können. (4 Punkte)

(c) Gegeben sei das folgende Risikoprofil (monetäre Werte in 1.000 EUR):

Band Nr.	mittlere Versicherungssumme	Anzahl Risiken	Prämie
1	1.500	5.000	8.000
2	3.000	2.000	5.000
3	5.000	500	2.000
Summe		7.500	15.000

Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für einen Schadenexzedenten pro Risiko 2.000 xs 2.000 durch. Verwenden Sie hierbei die Exposurekurve

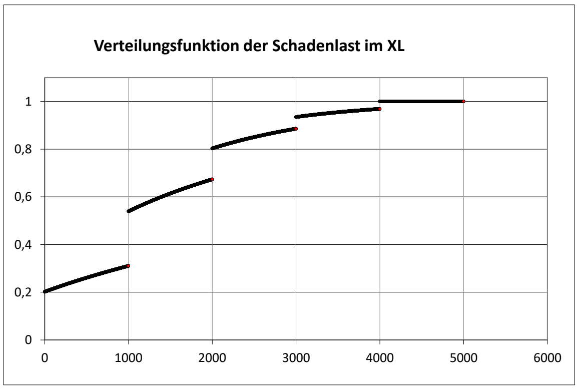
$$G\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \log_2(x+1)$$

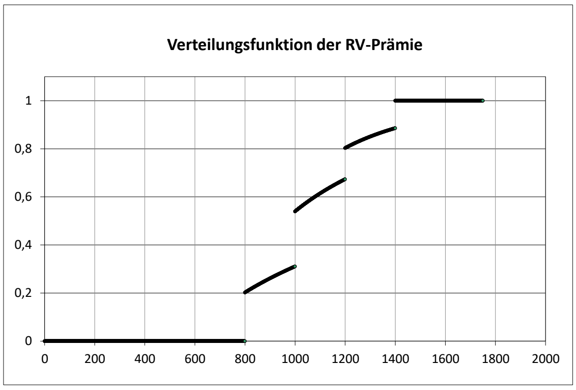
und eine Schadenquote von 70%. (13 Punkte)

(d) Wie berechnet man die Schadenhöhenverteilung eines Einzelrisikos aus der Exposurekurve und umgekehrt? (6 Punkte)

Aufgabe 6 (Bezahlte Wiederauffüllungen) [15 Punkte]

Für einen Schadenexzedenten C xs D seien m bezahlte Wiederauffüllungen zu x% pro rata capita und eine Upfront-Prämie $\widehat{P}_0$ vereinbart. Die Schadenlast des gedeckten Portefeuilles sei durch ein kollektives Modell mit stetiger Schadenhöhenverteilung darstellbar. Die folgenden Graphen zeigen die Verteilungsfunktionen der xs-Schadenlast $\widehat{S}$ sowie der Rückversicherungsprämie.





(a) Geben Sie die allgemeine Formel zur Berechnung der Wiederauffüllungsprämie $\widehat{P}_{\mathrm{WA}}$ aus der xs-Schadenlast $\widehat{S}$ an. [2 Punkte]

(b) Begründen Sie, warum die Verteilungsfunktion der xs-Schadenlast Sprungstellen besitzt, obwohl die Schadenhöhenverteilung stetig ist. [3 Punkte]

(c) Bestimmen Sie aus den Graphen die folgenden Größen (ohne Begründung):

- Die Haftung C.
- Die Anzahl m der Wiederauffüllungen.
- Die Upfront-Prämie $\widehat{P}_0$.
- Den Prozentsatz x% zu dem die Wiederauffüllungen bezahlt sind.
- Die Wahrscheinlichkeit, mit der der XL schadenfrei bleibt.

[10 Punkte]

Aufgabe 7 (Modelle zur Bewertung von Risikoteilung) [10 Punkte]

Für einen Rückversicherungsvertrag τ bezeichnen wir mit $\tilde{S}_\tau$ den Selbstbehaltsschaden und mit $\tilde{N}_\tau$ die Nettoprämie des Erstversicherers. Ferner bezeichne $\tilde{c}$ das vorhandene Risikokapital zu Vertragsbeginn und $\tilde{u}$ die Nutzenfunktion des Erstversicherers. Für den Rückversicherer verwenden wir (wie im Skript) die gleichen Bezeichnungen mit $\hat{}$ statt $\tilde{}$.

(a) Beschreiben Sie folgende Modelle zur Bewertung von Risikoteilung aus Sicht des Erstversicherer:

- Varianzmodell (Varianten 1 und 2)
- Nutzenmodell (6 Punkte)

(b) Wann ist ein Vertrag τ im Nutzenmodell *Pareto-optimal*? (4 Punkte)

Aufgabe 8 (Gewinnanteil) [15 Punkte]

Bei einer Quote sei ein Gewinnanteil von 30% vereinbart, wobei als Verwaltungskostensatz des Rückversicherers 5% angesetzt werden. Es gebe einen Verlustvortrag, der auf drei Jahre begrenzt ist. Nach sechs Jahren hat man folgenden Verlauf:

Vertragsjahr (VJ)	RV-Prämie	Provision	Schadenquote
1	100.000	20%	85%
2	100.000	20%	90%
3	110.000	20%	60%
4	110.000	20%	80%
5	120.000	20%	80%
6	120.000	20%	60%

Berechnen Sie die Gewinnanteile der sechs Vertragsjahre.

Aufgabe 9 (Aggregate XL) [10 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten C xs D mit AAD. Wir nehmen an, dass das gedeckte Portefeuille seit 2013 stabil ist und Prämienniveauänderungen sowie Inflation keine Rolle spielen, so dass keine Indexierung der Schäden nötig ist. Unter Anderem sei die Anzahl an Schäden größer D seit 2013 bekannt:

Jahr	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Anzahl xs-Schäden	0	4	0	0	0	0	1	0	0	4

Da in 10 Jahren 9 xs-Schäden beobachtet wurden, verwendet ein Rückversicherer zur Tarifierung des Schadenexzedenten ein kollektives Modell mit Poisson-verteilter xs-Schadenzahl mit $\lambda = 0{,}9$. Ist dieses Schadenzahlmodell adäquat? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Verteilungsfunktion einer Poisson-verteilten Zufallsgröße N mit $\lambda = 0{,}9$:

n	0	1	2	3	...
$P(N \leq n)$	40,7%	77,2%	93,7%	98,7%	...

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1: Zu (a):

- Merkmal A: maximaler relativer Spreiz = 280%
- Merkmal B: maximaler relativer Spreiz = 87,5%
- Merkmal C: maximaler relativer Spreiz = 220%

Auf Basis des eindimensionalen Spreizes erscheint Merkmal A als das Wichtigste.

Die Signifikanzen der anderen Merkmale können sich nach Auswahl des ersten Merkmals deutlich verändern.

Zu (b): Der dann kleinste Faktor der Merkmale B und C ist $0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$; der dann größte Faktor ist $1{,}5 \cdot 1{,}6 = 2{,}4$. Damit ist der maximal mögliche Spreiz für den Tarif aus B und C 500%.

Zu (c): Es ist die Signifikanz der Merkmale gemeinsam in ihrer Zusammenwirkung zu überprüfen, was mittels schrittweiser Regression oder auch GLM erfolgen kann. Nur wenn A dann zusätzliche Differenzierung liefert, ist eine Aufnahme in den Tarif sinnvoll.

Eindimensionale Differenzierung kann vermöge Substitution (= erfragtes Phänomen) u.U. bereits vollständig durch den vorhandenen Tarif abgebildet sein.

Fahrzeugtyp und Neuwert dürften eher stärker korreliert sein. Darüber hinaus gibt es altersabhängige Präferenzen (z.B. Familiensituation) für bestimmte Fahrzeuge, die auch mit bestimmten Neuwerten einhergehen. Andererseits ist grundsätzlich steigendes Alter und höheres Einkommen parallel. Daher kann ggf. der Neuwert das Alter und den Fahrzeugtyp ganz oder teilweise substituieren.

Zu (d): *Szenario 1:* Argumente für einen Wechsel sind die erhöhte Einfachheit des neuen Tarifs sowohl bzgl. der Anzahl der Merkmale als auch der Anzahl der Ausprägungen; Argumente dagegen sind neben dem Umstellungsaufwand, dass A auf Kundenangaben beruht, also ein weniger zuverlässiges Merkmal ist und dass die tarifliche Differenzierung mit Blick auf die Anzahl möglicher Tarifzellen deutlich abnimmt.

Szenario 2: Gegen einen Wechsel spricht neben dem Umstellungsaufwand als solchem die deutliche Abnahme der Anzahl möglicher Tarifzellen; dafür spricht, dass durch den Wechsel der Tarif einfacher wird, nicht mehr auf reinen Kundeninformationen basiert und der Fahrzeugtyp mit deutlich mehr Ausprägungen (vor Bildung der zwei Ausprägungsklassen) sowie auch die Information von Motorstärke und Neuwert grundsätzlich mitenthaltend die bessere Alternative darstellt.

Zu Aufgabe 2: Zu (a):

- Prämie zur Bestimmung von Schadenquoten
- Anzahl Policen für Kündigungsanalysen
- Jahreseinheiten zur Risikobewertung

Zu (b): Die Summe der gebuchten Prämie ist

$$1.000 \cdot 500 + 500 \cdot 600 + 1.800 \cdot 400 = 1.520.000$$

Für die verdiente Prämie sind die jeweiligen Prämien zeitanteilig zu berücksichtigen:

$$1.000 \cdot 500 + \frac{3}{4} \cdot 500 \cdot 600 + \frac{1}{3} \cdot 1.800 \cdot 400 = 965.000$$

Zu (c):

- Meldejahr: Zuordnung der Schäden gem. Meldedatum wie etwa in der Kraftfahrtgesamtstatistik des GDV
- Anfalljahr: Zuordnung der Schäden gem. Ereignisdatum wie z.B. zur Bestimmung der Reserveposition

Zu (d): Mit Blick auf die Spätschadenmeldungen zum Jahr x kann man erwarten, dass 10% der Schäden, die sich im Jahr $x+1$ ereignet haben, erst im Jahr $x+2$ gemeldet werden. Damit werden 200 Schäden mit Ereignisdatum im Jahr $x+1$ erst im Jahr $x+2$ gemeldet.

Da der Bestand hier recht stark anwächst, führt die Annahme, dass erneut nur 100 Schäden erst im Jahr $x+2$ gemeldet werden zu einer Unterschätzung der Schadenhäufigkeit im Jahr $x+1$, d.h. die Spätschadensituation sollte relativ übertragen werden. Die Schadenhäufigkeit kann man zu $2.000/20.000 = 10\%$ erwarten.

Zu Aufgabe 3: Zu (a): Die Risiken dürfen a priori nicht unterscheidbar sein. Somit wäre eine Anwendung bei Kfz-Flotten sachgerecht, aber nicht bei Diebstahl aus Erst- und Zweitwohnungen.

Zu (b): Hat man eine Bestandsgröße n unterhalb der Mindestbestandsgröße, so ergibt sich der Credibility-Faktor Z als Größenverhältnis der beiden Konfidenzbereiche zu:

$$Z = \sqrt{\frac{n}{n_0}}$$

Z liegt zwischen 0 und 1; d.h. bei Erreichen der Mindestbestandsgröße wird volle Credibility zugeordnet. Durch die Wurzelfunktion werden schon recht kleine Teilbestände vergleichsweise hoch gewichtet: Ist n z.B. 1% der Mindestbestandsgröße, so ergibt sich bereits $Z = 0{,}1$.

Anwendungsbeispiel regionaler Schadenbedarfsindex: Regionale Einheit r mit Bestand n unterhalb der Mindestbestandsgröße, die zu einer größeren Region R gehört. Dann ergibt sich der Credibility-SB-Index zu

$$\mathrm{SB}_{r;Cred} = \sqrt{\frac{n}{n_0}}\,\mathrm{SB}_r + \left(1 - \sqrt{\frac{n}{n_0}}\right)\mathrm{SB}_R\,.$$

Zu (c): Es ergibt sich:

$$\hat{m} = 212;\; \hat{u} = 19.013;\; \hat{w} = 38.562.$$

Der Credibility-Faktor ergibt sich zu $c = \frac{J}{J+\hat{u}/\hat{w}} = 0{,}859$ (gerundet). Damit sind die Credibility-Schätzer:

Flottennr.	alpha	SB-beob.	Cred.-SB
1	0,859	63	84
2	0,859	119	132
3	0,859	455	420
Gesamt		212	212

Zu (d): Das bedeutet, dass die beobachtete Verschiedenheit (Varianz zwischen den Individuen) der Individualmittel kleiner ist als die zufällige Streuung, die aus den Individuen jeweils einzeln geschätzt und anschließend gemittelt wurde (mittlere Varianz der Individuen).

Da die $\hat{m}_i$ Schätzer für $\mu(T_i)$ sind, ist es in diesem Fall sinnvoll $w = \mathrm{Var}(T_i) = 0$ anzunehmen (d.h. homogenes Kollektiv) und keine Unterschiede der individuellen Erwartungswerte anzusetzen.

Dies führt auf $c = 0$ und der Credibility-Schätzer ist der Schätzer für m (sinnvoll, da die einzelnen Mittel eh nahezu gleich sind).

Zu (e): Im Bühlmann-Modell ist nicht vorgesehen, dass Individuen im Lauf der Jahre Volumenänderungen aufweisen (z.B. unterschiedliche Fahrzeuganzahlen bei Flotten). Hier schafft die Erweiterung zum Bühlmann/Straub-Modell Abhilfe.

Kritisch ist die Voraussetzung der identischen Verteilung der Verteilungsqualitäten: A priori d.h. ohne Kenntnis der Schadenerfahrung dürfen die Individuen nicht unterscheidbar sein. Dies ist z.B. bei Kfz-Flotten mit unterschiedlicher Zusammensetzung nach Fahrzeugarten nicht gegeben. Mögliche Lösung: Oft gibt es deutliche Unterschiede in der a priori Risikostruktur; diese werden durch den Bestandsmix-Parameter „herausnormiert". Man kann die transformierte Zielgröße als Schadenquote verstehen mit dazu passendem Gewicht „verd. Beitrag". Dies führt auf das strukturbereinigte Bühlmann-Straub-Modell; man kann auch einen rekursiven Algorithmus aus GLM und Credibility verwenden.

Zu Aufgabe 4:

Zu (a): Bei einem XL pro Risiko nimmt man an, dass die erwartete Anzahl von Schäden mit dem (revalorisierten) Prämienvolumen skaliert. Die Verteilung der Schadenhöhen wird als unabhängig von der Größe des Portefeuilles angenommen (bis auf Inflation). Daher werden die Schäden nur mit der Inflation indexiert. Die Summe der indexierten xs-Schäden wird dann durch die Summe der (revalorisierten) Prämienvolumina des Beobachtungszeitraumes geteilt. Bei einem Naturgefahren-Cat XL ist hingegen die Anzahl der Naturereignisse nicht von der Größe des Portefeuilles abhängig. Die Höhe des Schadens aus einem Ereignis skaliert näherungsweise mit der Größe des Portefeuilles. Daher werden die Schäden nicht nur inflationsbereinigt, sondern auch noch mit dem Portefeuillewachstum vom jeweiligen Anfalljahr ins Quotierungsjahr skaliert. Das Portefeuillewachstum wird hierbei durch den Faktor

(Prämie im Quotierungsjahr) / (revalorisierte Prämie im jeweiligen Anfalljahr)

gemessen. Die Summe der as if-xs-Schäden wird dann durch das Produkt

(Anzahl Jahre im Beobachtungszeitraum) * (Prämie im Quotierungsjahr)

geteilt.

Zu (b): Es bezeichne P_i die Prämie, I_i^P den Prämienindex und I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Die folgende Tabelle zeigt die revalorisierten Prämien

$$\bar{P}_i := P_i \cdot \frac{I_Q^P}{I_i^P}$$

und die as-if Bereinigungsfaktoren

$$f_i := \frac{P_Q}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_Q^S}{I_i^S}.$$

Jahr	revalorisierte Prämie	Bereinigungsfaktor
2017	270.000	2,07
2018	295.714	1,84
2019	343.636	1,54
2020	364.865	1,41
2021	397.768	1,25
2022	410.870	1,09
2023	410.400	1,01
2024	400.000	1,00

Bezeichnet a_i den i-ten Schaden und $J(i)$ dessen Anfalljahr, dann berechnet sich der zugehörige as-if Schaden $\bar{a}_i$ als

$$\bar{a}_i := f_{J(i)} \cdot a_i$$

und der as-if xs-Schaden $\bar{x}_i$ als

$$\bar{x}_i := \min(7.000; \max(0; \bar{a}_i - 3.000)).$$

Wir erhalten folgende as-if Schäden:

i	Jahr $J(i)$	Schaden a_i	f_i	as-if Schaden $\bar{a}_i$	as-if xs-Schaden $\bar{x}_i$
1	2017	1.500	2,07	3.111	111
2	2019	4.000	1,54	6.150	3.150
3	2021	7.000	1,25	8.721	5.721
4	2022	3.000	1,09	3.271	271

Da sich der Beobachtungszeitraum über 6 Jahre erstreckt erhalten wir folgenden as-if Cat Burning Cost:

$$\mathrm{BC}^{\mathrm{Cat}} := \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4}{6 \cdot P_Q} = \frac{9.253}{6 \cdot 400.000} = 0{,}39\%.$$

Zu Aufgabe 5:

Zu (a): Die grundlegende Annahme bei der Feuer-Exposurequotierung ist, dass die Schadengrade aller Einzelrisiken identisch verteilt sind. Der Schadengrad ist hierbei definiert als die Schadenhöhe dividiert durch die Versicherungssumme. Bei großgewerblichen und industriellen Risiken wird anstatt der Versicherungssumme auch oft der PML verwendet.

Zu (b): Probleme, die in der Praxis bei Feuer-Exposurequotierungen auftreten:

- Die Schätzung der Originalschadenquote ist oft schwierig:
  - Schadenquote der exponierenden Risiken evtl. verschieden zur Schadenquote des Gesamtportefeuilles
  - In der Regel wird die Feuer-Schadenquote benötigt. Dem Rückversicherer ist jedoch oft nur die Schadenquote inklusive Leitungswasser, Sturm, etc. bekannt
- Originalfranchisen verschieben das Verhältnis zwischen Groß- und Kleinschäden
- PML versus Versicherungssumme
- PMLs werden von jedem Erstversicherer individuell festgelegt

- Es können PML-Verschätzer auftreten (also Schäden, die größer als der PML sind)
- Unterschiedliche Profiltypen: Policen-Profil, Top Location-Profil, Location-Profil

Zu (c): Für jedes Band bezeichne bezeichne d die Priorität in % der Versicherungssumme und e den Plafond in % der Versicherungssumme. Dann sieht die Exposure-Rechnung wie folgt aus:

Band Nr.	Risikoprämie	d	e	$G(\min(d,1))$	$G(\min(e,1))$	Risikoprämie XL
1	5.600	133,3%	266,7%	100,0%	100,0%	0
2	3.500	66,7%	133,3%	73,7%	100,0%	921
3	1.400	40,0%	80,0%	48,5%	84,8%	508
Summe	10.500					1.428

Die Risikoprämie im XL berechnet sich hierbei als $[G(\min(e,1)) - G(\min(d,1))]$ multipliziert mit der Brutto-Risikoprämie.

Zu (d): Bezeichnet $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe eines Einzelrisikos und v dessen Versicherungssumme, so ist die Schadengradverteilung gegeben durch die Verteilungsfunktion $F_G\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto F(vx)$. Die zugehörige Exposurekurve ist dann gegeben durch

$$G\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \frac{\int_0^x (1-F_G(t))\,dt}{\int_0^1 (1-F_G(t))\,dt} = \frac{\int_0^x (1-F(vt))\,dt}{\int_0^1 (1-F(vt))\,dt}.$$

Umgekehrt lässt sich F_G wie folgt aus G berechnen :

$$F_G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$$

(G' rechtsseitige Ableitung von G). Folglich ist

$$F(x) = F_G(x/v) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(x/v)}{G'(0)} & \text{für } 0 \le x < v \\ 1 & \text{für } x \ge v. \end{cases}$$

Zu Aufgabe 6:

(a) $\widehat{P}_{\mathrm{WA}} = x\% \cdot \min\left(m, \frac{\widehat{S}}{C}\right) \cdot \widehat{P}_0$

(b) Es bezeichne X die Schadenhöhe des kollektiven Modells. Ist $\mathrm{P}(X > C + D) > 0$, so gilt

$$\mathrm{P}(\min(C, (X-D)^+) = C) > 0,$$

d.h. es treten mit positiver Wahrscheinlichkeit Totalschäden im Layer auf. Der Sprung der Verteilungsfunktion bei C ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im Layer einen Totalschaden und keine Teilschäden gibt. Der Sprung bei $2C$ ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Totalschäden und keine Teilschäden, etc.

(c) Aus den Verteilungsfunktionen kann man folgende Werte ablesen:

- $C = 1000$
- $m = 3$
- $\widehat{P}_0 = 800$
- $x\% = 25\%$
- Wahrscheinlichkeit, dass der XL schadenfrei bleibt: 20%

Zu Aufgabe 7:

Zu (a):

Varianzmodell (Variante 1): Wähle τ zu vorgegebenem erwartetem Selbstbehaltsergebnis $\mathrm{E}(\tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)$ so, dass $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau)$ minimal ist.

Varianzmodell (Variante 2): Wähle τ so, dass $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau)$ das angestrebte Niveau nicht überschreitet und das erwartete Selbstbehaltsergebnis $\mathrm{E}(\tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)$ maximal ist.

Nutzenmodell: Wähle τ so, dass der erwartete Nutzen $\mathrm{E}(u(\tilde{c} + \tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau))$ maximal ist.

zu (b):

Ein Vertrag τ heißt im Nutzenmodell Paretooptimal, wenn für alle Verträge θ gilt

$$\mathrm{E}(\tilde{u}(\tilde{c} + \tilde{N}_\theta - \tilde{S}_\theta)) > \mathrm{E}(\tilde{u}(\tilde{c} + \tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)) \Rightarrow \mathrm{E}(\hat{u}(\hat{c} + \hat{N}_\theta - \hat{S}_\theta)) < \mathrm{E}(\hat{u}(\hat{c} + \hat{N}_\tau - \hat{S}_\tau))$$

und

$$\mathrm{E}(\hat{u}(\hat{c} + \hat{N}_\theta - \hat{S}_\theta)) > \mathrm{E}(\hat{u}(\hat{c} + \hat{N}_\tau - \hat{S}_\tau)) \Rightarrow \mathrm{E}(\tilde{u}(\tilde{c} + \tilde{N}_\theta - \tilde{S}_\theta)) < \mathrm{E}(\tilde{u}(\tilde{c} + \tilde{N}_\tau - \tilde{S}_\tau)).$$

Zu Aufgabe 8:

Vertragsjahr 1:
Gewinn $= 100.000 \cdot (100\% - 85\% - 20\% - 5\%) = -10.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 1
Verlustvortrag ins VJ 2	10.000

Vertragsjahr 2:
Gewinn $= 100.000 \cdot (100\% - 90\% - 20\% - 5\%) = -15.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 1	aus VJ 2
Verlustvortrag ins VJ 3	10.000	15.000

Vertragsjahr 3:
Gewinn $= 110.000 \cdot (100\% - 60\% - 20\% - 5\%) = 16.500$
$\Rightarrow$ vollständige Tilgung des Verlustvortrags aus VJ 1, die verbleibenden 6.500 werden zur Tilgung des Verlustvortrags aus VJ 2 verwendet,
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 1	aus VJ 2	aus VJ 3
Verlustvortrag ins VJ 4	0	8.500	0

Vertragsjahr 4:
Gewinn $= 110.000 \cdot (100\% - 80\% - 20\% - 5\%) = -5.500$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil

	aus VJ 2	aus VJ 3	aus VJ 4
Verlustvortrag ins VJ 5	8.500	0	5.500

Vertragsjahr 5:
Gewinn $= 120.000 \cdot (100\% - 80\% - 20\% - 5\%) = -6.000$
$\Rightarrow$ kein Gewinnanteil,
der Verlust aus VJ 2 wird nicht weiter vorgetragen

	aus VJ 3	aus VJ 4	aus VJ 5
Verlustvortrag ins VJ 6	0	5.500	6.000

Vertragsjahr 6:
Gewinn $= 120.000 \cdot (100\% - 60\% - 20\% - 5\%) = 18.000$

⇒ 11.500 werden zur Tilgung des Verlustvortrages verwendet, auf die verbleibenden 6.500 wird ein Gewinnanteil von $30\% \cdot 6.500 = 1.950$ bezahlt

Zu Aufgabe 9:

Es ist vernünftig, mit einer erwarteten Schadenzahl von 0,9 zu modellieren. Da der Schadenexzedent ein AAD hat, ist jedoch nicht nur der Erwartungswert, sondern die Verteilung der Schadenzahl relevant. Gemäß der Poisson-Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Jahr mindestens 4 Schäden zu beobachten, etwa 1,3%. Daher ist es recht unwahrscheinlich, in 10 Jahren zweimal mindestens 4 Schäden zu beobachten. Die Poisson-Verteilung scheint daher zu selten Jahre mit vielen Schäden zu modellieren. Vermutlich ist daher die Modellierung mit der Poisson-Verteilung im vorliegenden Fall zu billig.

Anmerkung (nicht gefordert): Ist die Anzahl an xs-Schäden Poisson-verteilt mit $\lambda = 0{,}9$ (und sind die Jahre unabhängig), so ist die Anzahl an Jahren mit mindestens 4 Schäden in einem Beobachtungszeitraum von 10 Jahren binomialverteilt mit 10 Versuchen und einer Trefferwahrscheinlichkeit von 1,3%. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Jahre mit mindestens 4 Schäden liegt bei etwa 0,8%.