



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

## **Lebensversicherung 1**

gemäß Prüfungsordnung 4  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 26. Mai 2023

**Musterlösung**

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Hanno Reich, Tanja Sanne, Dr. Olaf Schmitz, Dr. Marco Schnurr

**Aufgabe 1.** *[Verständnisfragen zu den Versicherungstechnischen Rückstellungen nach HGB] [20 Punkte]*

- (a) *[2 Punkte]* Bitte erläutern Sie das Realisationsprinzip nach HGB.
- (b) *[2 Punkte]* Wie ist gemäß unter der prospektiven Methode die Deckungsrückstellung zu ermitteln? Geben Sie die Berechnungsvorschrift an.
- (c) *[2 Punkte]* Warum ist die prospektive Methode bei fondsgebundenen Lebensversicherungsverträgen nicht anwendbar.
- (d) *[2 Punkte]* Wie hoch ist der bilanziell maximal ansetzbare Zillmersatz in der Lebensversicherung?
- (e) *[2 Punkte]* Das Bundesministerium der Finanzen hat im Dezember 2023 Änderungen der Deckungsrückstellungsverordnung angeordnet. Unter anderem wird der Rechnungszins für Lebensversicherungsverträge, die ab dem 1. Januar 2024 abgeschlossen werden, auf 0,5 % angehoben. Die Pfefferminzia Lebensversicherungs AG kann ihr Tarifwerk bis zum 1. Januar nicht mehr umstellen und bietet bis zum 1. April 2024 noch Versicherungen mit einem Rechnungszins von 0,25% an. Was ergibt sich daraus für die Deckungsrückstellung bei Vertragsabschluss? Worauf muss der Verantwortliche Aktuar der Pfefferminzia bei der Bilanzierung der Deckungsrückstellung zum 31.12.2024 für diesen Teilbestand achten?
- (f) *[2 Punkte]* Was sind die Besonderheiten des Altbestandes in der Lebensversicherung?
- (g) *[2 Punkte]* Mit welchem Wert sind Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko der Versicherungsnehmer in der Bilanz anzusetzen?
- (h) *[2 Punkte]* Was ist ein unbekannter Spätschaden? Bitte erläutern Sie dies kurz.
- (i) *[2 Punkte]* Welches ist die Rechtsgrundlage, auf deren Basis deutsche Lebensversicherungsunternehmen die Rückstellung für Beitragsrückerstattung bilanzieren dürfen?
- (j) *[2 Punkte]* Welches sind die wesentlichen Gewinnquellen in der deutschen Lebensversicherung?

Lösungsvorschlag:

- (a) Das Realisationsprinzip besagt, dass Gewinne erst dann bilanziert werden dürfen, wenn sie realisiert wurden.
- (b) Die prospektive Deckungsrückstellung ergibt sich wie folgt:  
  
für die Verpflichtungen aus dem Lebensversicherungsgeschäft bzw. Geschäft nach Art der LV in Höhe ihres versicherungsmathematisch errechneten Wertes  
  
einschließlich bereits zugeteilter Überschussanteile mit Ausnahme der verzinslich angesammelten Überschussanteile  
  
nach Abzug des versicherungsmathematisch ermittelten Barwerts der künftigen Beiträge
- (c) Die prospektive Methode ist nicht anwendbar, weil der Barwert der Leistungen und damit der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen von der Fondsentwicklung abhängt und damit nicht prospektiv ermittelt werden kann.
- (d) 25 ‰ der Beitragssumme
- (e) Aufgrund des geringeren Rechnungszinses in der Beitragskalkulation gegenüber dem für die Berechnung der Deckungsrückstellung ergibt sich rechnerisch eine negative Deckungsrückstellung, weil die Prämie mit einem geringeren Rechnungszins berechnet wurde als der Leistungsbarwert. Der Barwert der zukünftigen Prämien ist deswegen größer als der Barwert der zukünftigen Leistungen. Diese darf wegen des Realisationsprinzips nicht bilanziert werden. Das Realisationsprinzip schreibt vor, dass Gewinne erst realisiert werden dürfen, wenn sie am Abschlusstichtag realisiert sind. Für die Berechnung der Deckungsrückstellung zum 31.12.2024 ist deswegen der Zins der Beitragskalkulation anzusetzen.
- (f) Für den Altbestand gelten die genehmigten technischen Berechnungsgrundlagen fort. Änderungen müssen von der BaFin genehmigt werden.
- (g) Die Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko der Versicherungsnehmer sind mit dem Zeitwert zu bilanzieren.
- (h) Ein unbekannter Spätschaden ist ein Schaden, der in einem vergangenen Geschäftsjahr eingetreten ist, aber bis zum Zeitpunkt der Aufstellung der

Bilanz noch nicht gemeldet wurde. Er ist deswegen dem Lebensversicherer unbekannt.

- (i) Die Rückstellung für Beitragsrückerstattung wird aufgrund von § 341 e Abs. 2 Nr. 2 zu bilden.
- (j) Die wesentlichen Gewinnquellen sind Zinsergebnis, Risikoergebnis und Kostenergebnis.

**Aufgabe 2.** [Verständnisfragen zur Deckungsrückstellung nach HGB] [10 Punkte]

- (a) [6 Punkte] Die Pfefferminzia Lebensversicherung AG wurde im Jahr 2022 neu gegründet und hatte zum Jahresabschluss des Jahres 2022 folgende Werte ermittelt:

Positive Deckungsrückstellung: 0 €

Negative Deckungsrückstellung aufgrund von Zillmerung: 20.000.000 €

Der Bestand hat sich zum 31.12.2023 nicht verändert. Die zum 31.12.2023 ermittelten Zahlen sind:

Positive Deckungsrückstellung: 10.000.000 €

Negative Deckungsrückstellung aufgrund von Zillmerung: 5.000.000 €

Bitte geben Sie die Buchungssätze für den Jahresabschluss zum 31.12.2023 an.

- (b) [4 Punkte] Wie lauten die Buchungssätze, wenn die positive Deckungsrückstellung aufgrund von Mindestrückkaufswerten um 3.000.000 € erhöht werden muss?

Lösungsvorschlag:

- (a) 31.12.2022  
Forderungen an Versicherungsnehmer, noch nicht fällige Ansprüche an  
Sonstige versicherungstechnische Erträge 20.000.000 €

31.12.2023  
Veränderung der Deckungsrückstellung an Deckungsrückstellung  
10.000.000 €

Sonstiger versicherungstechnischer Aufwand an Forderungen an Versicherungsnehmer, noch nicht fällige Ansprüche 15.000.000 €

- (b) 31.12.2023  
Veränderung der Deckungsrückstellung an Deckungsrückstellung  
13.000.000 €

Sonstiger versicherungstechnischer Aufwand an Forderungen an Versicherungsnehmer, noch nicht fällige Ansprüche 12.000.000 €

**Aufgabe 3.** *[Verständnisfragen zu den Beitragsüberträgen nach HGB] [6 Punkte]*

Die Pfefferminzia Lebensversicherung AG hat im Jahresabschluss zum 31.12.2023 einen neuen Lebensversicherungsvertrag im Bestand, für den jährliche Beitragszahlung vereinbart wurde, Das Datum des Versicherungsbeginn ist der 1. April und der Jahresbeitrag 20.000 €.

Bitte geben Sie alle Buchungssätze einschließlich der Beitragssollstellung und der Zahlung des Beitrages zum 31.12.2023 an.

Lösungsvorschlag:

Forderungen an Versicherungsnehmer, fällige Ansprüche an gebuchte Bruttobeiträge 20.000 €

Bank an Forderungen an Versicherungsnehmer 20.000 €

Veränderung der Beitragsüberträge an Beitragsüberträge 5.000 €

**Aufgabe 4.** [Verständnisfragen zu IFRS 17] [6 Punkte]

- (a) [3 Punkte] Welche Komponenten umfasst die Liability for Remaining Coverage (LRC) im General Measurement Model?
- (b) [3 Punkte] Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit ein Lebensversicherungsunternehmen den Variable Fee Approach für eine Gruppe von Versicherungsverträgen anwenden darf?

Lösungsvorschlag:

- (a) Fulfillment Cash Flows  
Time Value of Money  
Risk Margin  
Contractual Service Margin
- (b) Der Variable Fee Approach ist für Versicherungen mit Direct Participation Features anwendbar.

Diese Verträge weisen gemäß IFRS 17.101 folgende Merkmale auf:

- Es ist vertraglich festgelegt, dass die Versicherungsnehmer an einem klar definierten Pool von Assets beteiligt werden
- Der Versicherer erwartet einen wesentlichen Anteil der Fair-Value-Änderungen des Underlying Items an die Versicherungsnehmer auszusahlen.
- Der Versicherer erwartet, dass ein wesentlicher Teil der Veränderungen der Zahlungen an Versicherungsnehmer durch Änderungen des Zeitwertes der Underlying Items verursacht wird.

### **Aufgabe 5. [Überschussbeteiligung] [18 Punkte]**

Sie arbeiten in der Aktuariellen Produktentwicklung der Gutversichert Lebensversicherung AG. Für Ihr neu entwickeltes Rentenversicherungsprodukt muss der Verantwortliche Aktuar dem Vorstand einen Deklarationsvorschlag für die Überschussbeteiligung vorlegen, den Sie für ihn ausarbeiten sollen.

- (a) [6 Punkte] Worauf müssen sie bei der Erstellung achten, damit der Vorschlag den aufsichtsrechtlichen Anforderungen genügt?  
Geben Sie stichpunktartig die wesentlichen Kriterien an und erläutern sie diese kurz.
- (b) [6 Punkte] Nennen Sie die entsprechenden Rechtsquellen.
- (c) [6 Punkte] Die laufende Gesamtverzinsung der übrigen Verträge der Gutversichert Lebensversicherung AG beträgt 2,2%. Gehen Sie davon aus, dass diese im Sinne der obigen Kriterien angemessen ist.

Das neue Rentenversicherungsprodukt sieht ein Wahlrecht des Kunden bzgl. des verwendeten Garantiezinses vor: Entweder er entscheidet sich für den aktuell gültigen Höchstrechnungszins gemäß DeckRV oder für den Ansatz von 0%.

Geben Sie für beide Produktvarianten den Zinsüberschussanteilsatz (ZÜA) an und begründen Sie diesen kurz.

*Hinweis:* Einen möglichen Aufschlag können Sie dem Grunde nach angeben; die Nennung der konkreten Höhe ist für diesen nicht erforderlich.

Lösungsvorschlag:

- (a) Eine angemessene Deklaration berücksichtigt die Kriterien der
- Gleichbehandlung: Der Gleichbehandlungsgrundsatz bezieht sich auch auf Leistungen aus der Überschussbeteiligung. Gleichartige Verträge sind daher auch gleichwertig an den Überschüssen zu beteiligen (insbesondere gilt dies für gleichartige Verträge im Neugeschäft und im Bestand).
  - Finanzierbarkeit:
    - Die Überschussbeteiligung darf nicht so hoch sein, dass die dauernde Erfüllbarkeit der Verträge gefährdet wird.



- Das aufsichtsrechtliche Quersubventionierungsverbot gilt auch für Leistungen aus der Überschussbeteiligung. (Eine Vorfinanzierung, z.B. aufgrund von gleichbleibender Risikoüberschussbeteiligung bei in der Zeit variierender Überschussentstehung, ist jedoch zulässig.)
- Verursachungsorientierung: Die einzelnen Verträge werden näherungsweise so am Überschuss beteiligt, wie sie zu dessen Entstehung beitragen.
- „Zeitnahe“ Beteiligung am Überschuss: Das Aufsichtsrecht definiert als notwendige Bedingung eine Obergrenze für die freie RfB, also für die noch nicht zur Verteilung an die Verträge zugeordneten Mittel innerhalb der RfB. Diese Regelung soll sicherstellen, dass eine gewisse Balance zwischen der dauernden Erfüllbarkeit der Verträge und der Weitergabe von Überschüssen an diejenigen Verträge, die zu deren Entstehung beigetragen haben, eingehalten wird.

(b) Gleichbehandlung:

- § 138 (2) VAG: „Bei gleichen Voraussetzungen dürfen Prämien und Leistungen nur nach gleichen Grundsätzen bemessen werden.“

Finanzierbarkeit:

- § 141 (5) Nr. 4 VAG: Der Verantwortliche Aktuar hat „für die Versicherungsverträge mit Anspruch auf Überschussbeteiligung dem Vorstand Vorschläge für eine angemessene Beteiligung am Überschuss vorzulegen; dabei hat er die dauernde Erfüllbarkeit der sich aus den Versicherungsverträgen ergebenden Verpflichtungen des Unternehmens zu berücksichtigen“.
- § 138 (1) VAG: „Die Prämien in der Lebensversicherung müssen ... so hoch sein, dass das Lebensversicherungsunternehmen *allen seinen Verpflichtungen* nachkommen ... Hierbei kann der Finanzlage des Versicherungsunternehmens Rechnung getragen werden, ohne dass planmäßig und auf Dauer Mittel eingesetzt werden dürfen, die nicht aus Prämienzahlungen stammen.“

Verursachungsorientierung:

- § 153 (2) VVG: „Der Versicherer hat die Beteiligung an dem Überschuss nach einem verursachungsorientierten Verfahren durchzuführen; andere vergleichbare angemessene Verteilungsgrundsätze können vereinbart werden.“
- § 153 (3) VVG: „Der Versicherer hat die Bewertungsreserven jährlich neu zu ermitteln und nach einem verursachungsorientierten Verfahren rechnerisch zuzuordnen. ...“

Zeitnahe Beteiligung:

§ 140 (2) VAG: „Ein die Belange der Versicherten gefährdender Missstand liegt vor, wenn bei überschussberechtigten Versicherungen ...

2. keine angemessene Verwendung der Mittel in der Rückstellung für Beitragsrückerstattung erfolgt. Das ist insbesondere dann anzunehmen, wenn ...

2. ... der ungebundene Teil der Rückstellung für Beitragsrückerstattung den gemäß § 145 Absatz 3 durch Rechtsverordnung festgelegten Höchstbetrag überschreitet.“

- (c) Die laufende Gesamtverzinsung ist definiert als Garantiezins ( $i$ ) zzgl. Zinsüberschussanteilsatz ( $ZÜA$ ). Eine einheitliche (laufende) Gesamtverzinsung bewirkt, dass alle Verträge gleichmäßig an den erwirtschafteten Kapitalerträgen des einheitlichen Sicherungsvermögens beteiligt werden (Gleichbehandlung, Verursachungsorientierung; die weiteren Angemessenheitskriterien der Überschussbeteiligung werden hier aufgrund der Angemessenheit der laufenden Gesamtverzinsung als gegeben vorausgesetzt).

Im Fall von  $i=0,25\%$  muss damit gelten:  $ZÜA = 2,2\% - 0,25\% = 1,95\%$

Im Fall von  $i=0\%$  gilt  $ZÜA = 2,2\% + \text{Spread} = 2,2\% - 0\%$  zzgl. Spread.

Der Spread ist dabei ein Ausgleich für das verringertes Garantieniveau und damit für das Risiko des Kunden, in schlechten Szenarien weniger Leistungen zu erhalten als bei Wahl von  $i= 0,25\%$ .

**Aufgabe 6.** [*Beteiligung an den Bewertungsreserven*] [15 Punkte]

Sie arbeiten in der Aktuariellen Bilanzabteilung der Gutversichert Lebensversicherung AG. In Ihrer Einheit sind Sie dafür zuständig, monatlich die Höhe der verteilungsfähigen Bewertungsreserven zu ermitteln.

- (a) [5 Punkte] Welche Werte müssen Sie jeweils für die Ermittlung der verteilungsfähigen Bewertungsreserven heranziehen? Bitte geben sie die benötigten Größen möglichst präzise an (insbesondere bezüglich des den jeweiligen Werten zugrundeliegenden Bestands), damit Ihre Kolleginnen und Kollegen Ihnen die Werte passgenau liefern können.
- (b) [5 Punkte] Seit dem Jahresende sind die Zinsen erheblich gestiegen. Wie wirkt dieser Zinsanstieg auf die unter Aufgabenteil (a) angegebenen Werte?

*Hinweis:* Ignorieren Sie dabei (indirekte) Auswirkungen des Zinsanstiegs auf andere Assetklassen.

- (c) [5 Punkte] Zum 31.7.2022 wiesen die Kapitalanlagen der Gutversichert Lebensversicherung AG insgesamt stille Lasten auf. Wie wirkt sich dies auf die Beteiligung der Versicherten an den Bewertungsreserven aus? Gehen Sie davon aus, dass eine Mindestbeteiligung an den Bewertungsreserven in Höhe von 50% der gesamten endfälligen Überschussbeteiligung deklariert ist.

Lösungsvorschlag:

- (a) Man benötigt folgende Angaben:
- Buchwerte aller Kapitalanlagen insgesamt zum Stichtag
  - Marktwerte aller Kapitalanlagen insgesamt zum Stichtag
  - Buchwerte der festverzinslichen Wertpapiere und Zinsabsicherungsgeschäfte zum Stichtag
  - Marktwerte der festverzinslichen Wertpapiere und Zinsabsicherungsgeschäfte zum Stichtag
  - Sicherungsbedarf des gesamten Bestandes zum Stichtag

(b) Gemäß Hinweis ändern sich die Buch- und Marktwerte aller Kapitalanlagen nur durch die Änderung der Buch- und Marktwerte der festverzinslichen Wertpapiere und Zinsabsicherungsgeschäfte:

- Die Marktwerte der festverzinslichen Wertpapiere und solcher Absicherungsgeschäfte, die die Zinseinnahmen gegen sinkende Zinsen absichern, sinken deutlich.
- Die Buchwerte dieser Papiere sinken i.d.R. ebenfalls, jedoch aufgrund der vorsichtigen Bewertung unter HGB (sofern unter HGB vor dem Zinsanstieg Bewertungsreserven bestanden) und Bilanzierungswahlrechten (Zuordnung von Papieren zum Anlagevermögen gemäß § 341b HGB) weniger stark. (Der Buchwert der festverzinslichen Wertpapiere sinkt nur dann, wenn Abschreibungen in der HGB-Rechnungslegung notwendig sind, ansonsten sind die Buchwerte der festverzinslichen Wertpapiere konstant. Abschreibungen nur aufgrund des Zinsanstiegs können vermieden werden, wenn die Halteabsicht und Haltfähigkeit dieser Wertpapiere bis zur Endfälligkeit gegeben ist. Eine Abschreibung kann erforderlich sein, wenn zusätzlich eine Bonitätsverschlechterung des Emittenten gegeben ist oder wenn diese Wertpapiere dem Umlaufvermögen zugeordnet werden müssen.)

Durch den Zinsanstieg steigt insbesondere der zur Berechnung des Sicherungsbedarfs herangezogene Marktzins („Bezugszins“). Dadurch verringert sich die „stille Last“, also der Sicherungsbedarf, auf der Passivseite der Bilanz. (Wenn der Bezugszins oberhalb des Referenzzinses für die Berechnung der ZZR liegt, verschwindet der Sicherungsbedarf sogar vollständig.)

(c) Die Bewertungsreserven sind gemäß Aufgabenstellung negativ – die Kapitalanlagen der Gutversichert Lebensversicherung AG weisen insgesamt stille Lasten auf. An diesen sind die einzelnen Verträge nicht zu beteiligen; eine Verringerung von garantierten Leistungen und/oder Leistungen aus der Beteiligung am handelsrechtlich festgestellten Überschuss erfolgt nicht.

Dennoch erhalten Verträge, bei denen dem Grunde nach eine Beteiligung an den Bewertungsreserven ausgelöst wird (d.h. bei Beendigung des Vertrags, bei Beendigung der Ansparphase bei Rentenversicherungen oder gemäß vereinbarter früherer Zuteilung), eine Beteiligung an den Bewertungsreserven in Höhe der deklarierten Mindestbeteiligung. Diese beträgt laut Aufgabenstellung 50% der gesamten endfälligen Überschussbeteiligung. Darüber hinausgehende Beträge („Spitzenbeteiligung“) fallen nicht an.

### **Aufgabe 7. [ALM] [15 Punkte]**

Sie arbeiten im Aktuariellen Controlling der Gutversichert Lebensversicherung AG. Ihr Kollege aus der Aktuariellen Produktentwicklung möchte wissen, mit welchen Kapitalerträgen er künftig rechnen kann. Er hat gelesen, dass die Zinsen am Kapitalmarkt stark gestiegen sind und erhofft sich zeitnah steigende Kapitalerträge, aus denen er erhöhte Leistungen aus der Überschussbeteiligung finanzieren möchte.

- (a) [6 Punkte] Die Gutversichert Lebensversicherung AG hat in der Vergangenheit im ALM den Fokus stark auf die Absicherung einer Mindestverzinsung bei (weiter) fallenden Zinsen gelegt.

Mit welchen Absicherungsmaßnahmen gegen Niedrigzinsen konnte sich die Gutversichert Lebensversicherung AG dabei eine Partizipation an steigenden Zinsen erhalten? Bitte beschreiben Sie zwei Möglichkeiten kurz. Welche Vor- und Nachteile haben diese Maßnahmen?

- (b) [4 Punkte] Glücklicherweise hat die Chef-Volkswirtin der Gutversichert Lebensversicherung AG bereits zum Jahresbeginn darauf hingewiesen, dass (weiter) steigende Zinsen möglich sind und empfohlen, Bewertungsreserven zur Finanzierung eines weiteren ZZR-Aufbaus oder zur Finanzierung von Abschreibungen auf Kapitalanlagen zu sichern. Nennen und beschreiben Sie eine Maßnahme, mit der Ihr Kapitalanleger dieser Empfehlung folgen konnte. Worauf musste er achten?

- (c) [5 Punkte] Wie wirken sich die gestiegenen Zinsen auf die Kennzahlen *mittlerer tariflicher Rechnungszins* und *mittlerer bilanzieller Rechnungszins* in 10 bis 15 Jahren aus, wenn Sie künftiges Neugeschäft ignorieren und davon ausgehen, dass die Zusammensetzung des Bestands hinsichtlich der hier relevanten Gewichtunggröße unverändert bleibt? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis:* Gehen Sie bei Ihren Überlegungen davon aus, dass das gestiegene Zinsniveau mittelfristig weiterhin besteht (z.B. konstant auf dem Niveau per 30.9.2022) und dass der Bezugszins oberhalb des heutigen Referenzzinses für die ZZR liegt.

## Lösungsvorschlag:

- (a) Hinweis: Es reichen zwei der drei folgenden Antwortmöglichkeiten.

### Swaptions

- Eine Receiver Swaption gewährt das Recht, zum Verfallstag ohne weitere Zahlungen in einen Receiver Swap einzutreten, dessen Zinssatz auf der Festsatzseite dem vorher vereinbarten Strikesatz der Swaption entspricht. Wenn man die Option nicht ausübt, kann man stattdessen zum aktuellen Marktzins anlegen, und die Option verfällt wertlos.
- Vorteil: Da man die Wiederanlage zum Swapsatz „immer“ erreichen kann und das zusätzliche Halten einer Receiver Swaption den Swapsatz ggf. auf den Strike anhebt, können Receiver Swaptions die Wiederanlage mindestens zum Strike sichern. Gleichzeitig kann man an steigenden Zinsen partizipieren.
- Nachteil: Aufgrund der Bewertungsvorschriften unter HGB ergeben sich Wertzuwächse bzw. -verluste auf der Aktiv- und der Passivseite auch bei ökonomisch „perfektem Hedge“ in unterschiedlichen Höhen und damit während der Laufzeit der Swaptions Wertschwankungen in der HGB-Bilanz.

### Swaption Bonds

- Einfach strukturiertes Produkt aus Trägerbond und Swaption, welches als einfach strukturierte Produkte höchster Bonität gestaltet werden kann und damit aufsichtsrechtlich i.a. zulässig ist. Der Bondkupon liegt dabei stets über dem gewünschten Mindestzins. Er erhöht sich für den gesamten Rest der Laufzeit, falls zu einem gegebenen Stichtag der aktuelle langjährige Swapsatz unter einem vorab fest vereinbarten Vergleichswert („Strike“) liegt, proportional zur Differenz zwischen Swapsatz und Strike.
- Vorteil: ermöglicht die Bildung von Bewertungseinheiten unter HGB; die durch alleinstehende Swaptions verursachte Ergebnisvolatilität wird vermieden. Eine Partizipation an steigenden Zinsen bleibt möglich.
- Nachteil: Es entstehen Opportunitätskosten (Absicherungskosten werden als Mindererträge über die Laufzeit verteilt). Zudem können

bei Fälligkeit im Geld Bewertungsreserven entstehen, an denen die Versicherungsnehmer zu beteiligen sein können (sodass nicht die volle Absicherungswirkung erzielt wird).

### Book Yield Notes

- Einfach strukturiertes Produkt aus Trägerbond und Asian CMS Floor, welches als einfach strukturierte Produkte höchster Bonität gestaltet werden kann und damit aufsichtsrechtlich i.a. zulässig ist. Der Bondkupon liegt dabei stets über dem gewünschten Mindestzins. Er erhöht sich für den gesamten Rest der Laufzeit, falls zu einem gegebenen Stichtag das fünf- bis zehnjährige Mittel der Swapsätze (Referenzsatz) unter einem vorab fest vereinbarten Vergleichswert („Strike“) liegt, proportional zur Differenz zwischen Referenzsatz und Strike.
- Vorteil: ermöglicht die Bildung von Bewertungseinheiten unter HGB; die durch alleinstehende Swaptions verursachte Ergebnisvolatilität wird vermieden. Eine Partizipation an steigenden Zinsen bleibt möglich.
- Nachteil: Es entstehen Opportunitätskosten (Absicherungskosten werden als Mindererträge über die Laufzeit verteilt). Zudem können bei Fälligkeit im Geld Bewertungsreserven entstehen, an denen die Versicherungsnehmer zu beteiligen sein können (sodass nicht die volle Absicherungswirkung erzielt wird).

- (b) Vorverkäufe können der Sicherung von Bewertungsreserven (BWR) dienen: Hat z.B. ein Kupon-Bond heute (hohe) BWR, so würden steigende Zinsen diese schmelzen lassen. Benötigt ein VU zu einem Zeitpunkt in der Zukunft den Ertrag aus der Auflösung der BWR („Ertrag aus Abgang von Kapitalanlagen“), so kann es sich mit einem Vorverkauf den Ertrag sichern.

Bei einem Vorverkauf handelt es sich um die vertragliche Vereinbarung zwischen Käufer und Verkäufer, eine bestimmte Vermögensanlage zu einem bereits heute festgeschriebenen Preis an einem konkreten, in der Zukunft liegenden Termin zu veräußern.

Der Kapitalanleger sollte darauf achten, inwiefern die vom Vorverkauf betroffenen Werte als Bestandteil des Sicherungsvermögens benötigt werden, denn:

Werden bezüglich Sicherungsvermögenswerten Vorverkäufe getätigt, so erfüllen diese Werte nicht mehr den Anlagegrundsatz der Sicherheit (Fungibilität), da das VU nicht mehr in der rechtlichen Position wäre, frei über diese Werte verfügen zu können. Aufgrund der mangelnden Fungibilität wären die Werte ggf. nicht mehr sicherungsvermögensfähig und daher aus dem Sicherungsvermögen zu entfernen.

- (c) Der mittlere tarifliche Rechnungszins ermittelt sich als mit der Deckungsrückstellung gewichtetes Mittel der tariflichen Rechnungszinsen, also der „für einen Vertrag maßgeblicher Rechnungszins“ gemäß § 5 Abs. 4 DeckRV. Das ist der Zins, der zur Reservierung verwendet würde, wenn es die Zinsverstärkung / ZZR nicht gäbe.

Unter den Voraussetzungen, dass kein Neugeschäft und keine Bestandsabgänge zu verzeichnen sind, ändert sich am mittleren tariflichen Rechnungszins nichts, da die tariflichen Rechnungszinsen, sowie die Zusammensetzung des Bestands konstant bleiben.

Der mittlere bilanzielle Rechnungszins ermittelt sich als mit der Deckungsrückstellung gewichtetes Mittel der Rechnungszinsen. Bilanzieller Rechnungszins ist im Sinne des § 5 Abs. 4 DeckRV:

- das Minimum aus dem „für einen Vertrag maßgeblicher Rechnungszins“ und dem Referenzzins der ZZR (bzw. im Altbestand dem gewählten Zins der Zinsverstärkung) in den nächsten 15 Jahren
- der „für den Vertrag maßgeblicher Rechnungszins“ danach.

Der mittlere bilanzielle Rechnungszins wird unter den vorliegenden Annahmen steigen, da der bilanzielle Rechnungszins für solche Verträge, deren tariflicher Rechnungszins über dem heutigen Referenzzins für die ZZR liegt, mit dem Anstieg des Referenzzinses steigen wird. Letzterer steigt unter den gegebenen Annahmen innerhalb von 15 Jahren auf den Basiszins, der laut Aufgabenstellung oberhalb des Referenzzinses liegt.



**Aufgabe 8.** [Zinszusatzreserve, MindZV und aktuarielle Steuerung] [28 Punkte]

- (a) [14 Punkte] Der Bestand der Pfefferminzia Lebensversicherung AG umfasst einen deregulierten Neubestand und einen regulierten Altbestand.

Die Planannahmen der Pfefferminzia AG sind in Geldeinheiten GE wie folgt:

Gehen Sie dazu von folgenden Plan-Annahmen der Pfefferminzia AG aus:

- Die Netto-Kapitalerträge betragen  $KE_{ges} = 500$  GE, wovon die anzurechnenden Kapitalerträge insgesamt 85 % betragen. Die anzurechnenden Kapitalerträge werden zu 40 % auf den Altbestand und 60 % auf den Neubestand geschlüsselt.
- Der rechnungsmäßige Zins beträgt  $RZ_{Alt} = 150$  GE im Altbestand und  $RZ_{Neu} = 270$  GE im Neubestand (inklusive ZZR).
- Die Risikoergebnisse betragen  $RE_{Alt} = 100$  GE und  $RE_{Neu} = 50$  GE.
- Die übrigen Ergebnisse betragen im Altbestand  $\ddot{u}_{E_{Alt}} = 50$  GE und im Neubestand  $\ddot{u}_{E_{Neu}} = -90$  GE.

Berechnen Sie den Rohüberschuss, die Mindestzuführung zur RfB sowie den maximalen Jahresüberschuss.

- (b) [14 Punkte] In Folge eines schnellen Zinsanstiegs sind in den festverzinslichen Kapitalanlagen der Pfefferminzia erhebliche stille Lasten entstanden. Der Kapitalanlagevorstand geht davon aus, dass sich die Netto-Kapitalerträge aufgrund von Abschreibungen um 100 Geldeinheiten auf  $KE_{ges} = 400$  GE verringern.

- (i) [6 Punkte] Ermitteln Sie die Auswirkungen auf Rohüberschuss, Mindestzuführung zur RfB und den maximalen Jahresüberschuss.
- (ii) [8 Punkte] In (i) fällt der maximale Jahresüberschuss trotz positivem Rohüberschuss negativ aus.

Nennen Sie vor dem Hintergrund der in der Aufgabe bekannten oder errechneten Werte zwei potentielle Ursachen, die zu dieser Situation geführt haben und nennen Sie jeweils eine Gegensteuerungsmaßnahme.

Lösungsvorschlag:

Der Einfachheit halber wird im Folgenden auf die Darstellung der Einheit GE verzichtet.

(a) Der Rohüberschuss ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R\ddot{U} &= KE_{Ges} - (RZ_{Alt} + RZ_{Neu}) + RE_{Alt} + RE_{Neu} + \ddot{u}E_{Alt} + \ddot{u}E_{Neu} \\ &= 500 - 420 + 150 - 40 \\ &= 190. \end{aligned}$$

Die Mindestzuführung für den Gesamtbestand beträgt

$$MindZuf_{Ges} = MindZuf_{Alt} + MindZuf_{Neu}$$

mit  $MindZuf_{Alt} = \max(0; MindZuf_{KA;Alt} + MindZuf_{RE;Alt} + MindZuf_{\ddot{u}E;Alt})$  und analog  $MindZuf_{Neu}$ .

Es ist

$$MindZuf_{\ddot{u}E;Alt} = \max(0; 0,5 * 50) = 25$$

$$MindZuf_{\ddot{u}E;Neu} = \max(0; 0,5 * (-90)) = 0$$

$$MindZuf_{RE;Alt} = \max(0; 0,9 * 100) = 90$$

$$MindZuf_{\ddot{u}E;Neu} = \max(0; 0,9 * 50) = 45$$

sowie

$$\begin{aligned} MindZuf_{KA;Alt} &= \max(\min(0; aKE_{Alt} - RZ_{Alt}); 0,9 * aKE_{Alt} - RZ_{Alt}) \\ &= \max(\min(0; 0,4 * 0,85 * KE_{Ges} - 150); 0,9 * 0,4 * 0,85 * KE_{Ges} - 150) \\ &= \max(\min(0; 20); 3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MindZuf_{KA;Neu} &= \max(\min(0; aKE_{Neu} - RZ_{Neu}); 0,9 * aKE_{Neu} - RZ_{Neu}) \\ &= \max(\min(0; 0,6 * 0,85 * KE_{Ges} - 270); 0,9 * 0,6 * 0,85 * KE_{Ges} - 270) \\ &= \max(\min(0; -15); -40,5) \\ &= -15 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$MindZuf_{Alt} = \max(0; 3 + 90 + 25) = 118$$

$$MindZuf_{Neu} = \max(0; -15 + 45 + 0) = 30$$



und somit  $MindZuf_{Ges} = 148$ .

Der maximale Jahresüberschuss beträgt damit

$$J\ddot{U}_{max} = R\ddot{U} - MindZuf_{Ges} = 42.$$

(b)

(i) Der Rohüberschuss verringert sich um 100 Geldeinheiten auf  $R\ddot{U} = 90$ .

Bezüglich der Mindestzuführung ändern sich  $MindZuf_{KA;Alt}$  und  $MindZuf_{KA;Neu}$  zu

$$\begin{aligned} MindZuf_{KA;Alt} &= \max(\min(0; 0,4 * 0,85 * 400 - 150); 0,9 * 0,4 * 0,85 * 400 - 150) \\ &= \max(\min(0; -14); -27,6) \\ &= -14 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} MindZuf_{KA;Neu} &= \max(\min(0; 0,6 * 0,85 * 400 - 270); 0,9 * 0,6 * 0,85 * 400 - 270) \\ &= \max(\min(0; -66); -86,4) \\ &= -66. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} MindZuf_{Ges} &= \max(0; -14 + 90 + 25) + \max(0; -66 + 45 + 0) \\ &= 101 + 0 = 101 \end{aligned}$$

und

$$J\ddot{U}_{max} = R\ddot{U} - MindZuf_{Ges} = -11.$$

(ii) Offensichtlich wird die Situation insbesondere in den Ergebnisquellen des Neubestands verursacht:

- Die Nettokapitalerträge fallen (insbesondere nach den Abschreibungen von 100 Geldeinheiten) im Verhältnis zu den rechnungsmäßigen Zinsen relativ gering aus. Zum Ausgleich könnte durch eine Realisierung von Bewertungsreserven auf den nicht-festverzinslichen Titeln die Situation verbessert werden (sofern hier noch Bewertungsreserven vorhanden sind).

- Das übrige Ergebnis im Neubestand fällt stark negativ aus. Ursachen könnten Abschlusskostenverluste in Folge hoher überrechnungsmäßiger Abschlusskosten und starken Neugeschäfts sein. Gegensteuerungsmaßnahmen könnten einerseits in einer Begrenzung der Kosten liegen (Kosteneinsparung von Fixkosten im Unternehmen oder Begrenzung von Provisionen), andererseits könnte auch der Abschluss eines Rückversicherungsvertrags zur Finanzierung der Abschlusskosten geeignet sein.
- Auffällig ist zudem, dass das Risikoergebnis im Neubestand verhältnismäßig gering ausfällt. Hier wäre zu prüfen, ob es sich um einmalige Effekte handelt (z.B. aufgrund einer Pandemie) und wie volatil der tatsächliche Wert sein kann. Da ein möglichst hohes Risikoergebnis auch zum Ausgleich negativer Werte von  $MindZuf_{KA;Neu}$  benötigt wird, wäre es ratsam, die Entwicklung des Risikoergebnisses im Jahresverlauf eng zu überwachen, um das Zusammenwirken mit den anderen Ergebnisquellen / den Ergebnissen zur RfB-Mindestzuführung im Blick zu behalten. Auch hierdurch kann die Auswahl und Intensität der Steuerungsmaßnahmen im Hinblick auf Kapitalanlageergebnis, Kostenentwicklung und Rückversicherung beeinflusst werden.

**Aufgabe 9.** [Zinszusatzreserve, MindZV und aktuarielle Steuerung] [17 Punkte]

- (a) [11 Punkte] Der ZZR-Referenzzins für 2022 beträgt (wie auch schon für das Jahr 2021)  $RefZ_{2022} = 1,57\%$ . Als Jahresmittelwerte der 10y-Null-Kupon-Sätze sind folgende Werte bekannt:

2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	$\Sigma_{2013}^{2022}$
1,96%	1,42%	0,87%	0,51%	0,85%	0,96%	0,23%	-0,19%	0,09%	2,02%	8,72%

Gehen Sie von einem konstanten Zinssatz  $s$  in allen Folgejahren aus. Bestimmen Sie alle  $s$ , für die der ZZR-Referenzzins für 2025 erstmals wieder ansteigt (und für 2023 und 2024 somit noch auf dem Niveau von 2022 bleibt und nicht ansteigt).

Hinweis:  $s$  hat gemäß der Veröffentlichungen der Bundesbank 3 Nachkommastellen.

- (b) [6 Punkte] Berechnen Sie  $RefZ_{2025}$  konkret für den Fall  $s = 3,991\%$ .

Hinweis: Verwenden Sie für diesen Fall als Ergebnis von a), dass  $RefZ_{2024} = 1,57\%$ .

Lösungsvorschlag:

- (a) Damit der Referenzzins für 2025 gegenüber dem Vorjahreswert von 1,57 % ansteigt, muss das 9-Monats-Mittel der 10y-Null-Kupon-Anleihen im Jahr 2025 größer als 1,57 % sein, d.h. es muss  $s > 1,57\%$  gelten.

Zudem muss das 10-Jahres-Mittel im Jahr 2025 (erstmalig) größer als 1,57 % sein. Das 10-Jahres-Mittel im Jahr 2025 beträgt

$$\begin{aligned}
 MW_{10\text{Jahre};2025} &= \frac{8,72\% - 1,96\% - 1,42\% - 0,87\% + 3 * x}{10} \\
 &= \frac{4,47\% + 3 * x}{10},
 \end{aligned}$$

wobei  $x$  das auf 2 Nachkommastellen aufgerundete Jahresmittel bzw. 9-Monats-Mittel ist, d.h.  $x = \text{Aufrunden}(s; 2)$ .

Somit gilt

$$MW_{10\text{Jahre};2025} > 1,57\%$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4,47 \% + 3 * x &> 15,70 \% \\ \Leftrightarrow 3 * x &> 11,23 \% \\ \Leftrightarrow x &> 11,23/3 \% \end{aligned}$$

Dies ist (da  $x$  2 Nachkommastellen hat) für alle  $x \geq 3,75 \%$  der Fall.

Somit liegt für alle  $s \geq 3,741 \%$  das 10-Jahres-Mittel  $MW_{10\text{Jahre};2025}$  in 2025 ebenso wie das 9-Monats-Mittel über dem Referenzzins des Vorjahres.

Damit im Fall  $s \geq 3,741 \%$  der Referenzzins im Jahr 2024 noch nicht ansteigt, muss

$$\begin{aligned} MW_{10\text{Jahre};2024} &= \frac{8,72 \% - 1,96 \% - 1,42 \% + 2 * x}{10} \leq 1,57 \% \\ \Leftrightarrow x &\leq 5,18 \% \end{aligned}$$

gelten, was (auch auf drei Nachkommastellen) für alle  $s \leq 5,180 \%$  der Fall ist.

Der Referenzzins steigt somit für alle  $s$  mit  $3,741 \leq s \leq 5,18 \%$  erstmals im Jahr 2025 wieder an.

(b) Es ist hier  $MW_{9\text{Monate};2025} = x = \text{Aufrunden}(s; 2) = 4,00 \%$  und damit

$$MW_{10\text{Jahre};2025} = \frac{4,47 \% + 3 * 4 \%}{10} = 1,647 \%$$

Damit ist

$$\Delta_1 = \text{Aufrunden}(MW_{10\text{Jahre};2025} - 1,57 \% ; 2) = 0,08 \%$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \text{Aufrunden}(0,09 * (MW_{9\text{Monate};2025} - 1,57 \%); 2) \\ &= \text{Aufrunden}(0,09 * (4,00 \% - 1,57 \%); 2) \\ &= \text{Aufrunden}(0,2187 \% ; 2) \\ &= 0,22 \% \end{aligned}$$

Beide Differenzen haben damit das gleiche Vorzeichen, und es ist

$$\begin{aligned} \text{RefZ}_{2025} &= 1,57 \% + \text{sign}(\Delta_1) * \min(|\Delta_1|; |\Delta_2|) \\ &= 1,57 \% + 0,08 \% \\ &= 1,65 \% \end{aligned}$$

**Aufgabe 10.** [Rechnungsgrundlagen der Lebensversicherung] [10 Punkte]

- (k) [3 Punkte] Benennen Sie die drei klassischen Rechnungsgrundlagen der Lebensversicherung.
- (l) [3 Punkte] Bei welcher dieser drei klassischen Rechnungsgrundlagen müssen Sie die Inflation berücksichtigen, insbesondere wenn Sie die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung herleiten. Begründen Sie. Und warum ist der Verbraucherpreisindex für Deutschland möglicherweise nicht die richtige Wahl als Inflationsannahme?
- (m) [4 Punkte] Was ist im Lebensversicherungskontext mit dem Recht auf Vergessenwerden gemeint? Welche Herausforderungen bringt ein Recht auf Vergessenwerden für die Lebensversicherung mit sich? Welche Rechnungsgrundlage ist betroffen?

Lösungsvorschlag:

- (a) Die drei klassischen Rechnungsgrundlagen der Lebensversicherung umfassen Annahmen an Rechnungszins, Biometrie und Kosten.
- (b) Bei der Rechnungsgrundlage Kosten, genauer bei den Verwaltungskosten, muss zumindest bei der Ableitung von Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung eine realistische Inflationserwartung berücksichtigt werden.

Hintergrund ist, dass die zukünftigen Verwaltungsaufwendungen insbesondere aufgrund der Lohnentwicklung in der Versicherungsbranche je nach Zeithorizont mehr oder weniger deutlich steigen werden.

Die Entwicklung des Verbraucherpreisindex<sup>1</sup> für Deutschland weicht in den letzten Jahren stark von der Lohnentwicklung ab. Darum ist dieser vermutlich als Inflationsannahme nicht geeignet.

- (c) Mit dem Recht auf Vergessenwerden ist gemeint, dass bei Abschluss von Versicherungen keine Anzeigepflicht für bestimmte Vorerkrankungen besteht. Entsprechend können erhöhte Risiken in der Kalkulation nicht immer angemessen berücksichtigt werden.

Ursprünglich ging es um Todesfallabsicherungen von Immobilienfinanzierungen, bei denen in der Risikoprüfung Krebsvorerkrankungen zehn bzw. fünf Jahre nach Behandlungsende bei voll- bzw. minderjährigen Personen nicht abgefragt werden dürfen. Eine Ausweitung auf weitere Deckungen und Vorerkrankungen ist zu erwarten.



---

Erhöhte Risiken aufgrund eines Rechts auf Vergessenwerden haben Einfluss auf die biometrischen Rechnungsgrundlagen, z.B. Sterbewahrscheinlichkeiten. Wegen fehlender Erfahrungswerte werden auch die Sicherheitspuffer großzügiger ausfallen müssen mit entsprechenden Auswirkungen auf den Preis.



**Aufgabe 11. [Lebenserwartung] [15 Punkte]**

Jährlich veröffentlicht das Statistische Bundesamt eine (Perioden-)Sterbetafel für Deutschland und publiziert die Lebenserwartung für neugeborene Jungen und Mädchen. Die folgende Tabelle enthält die Entwicklung der Lebenserwartung bei Geburt in Jahren.

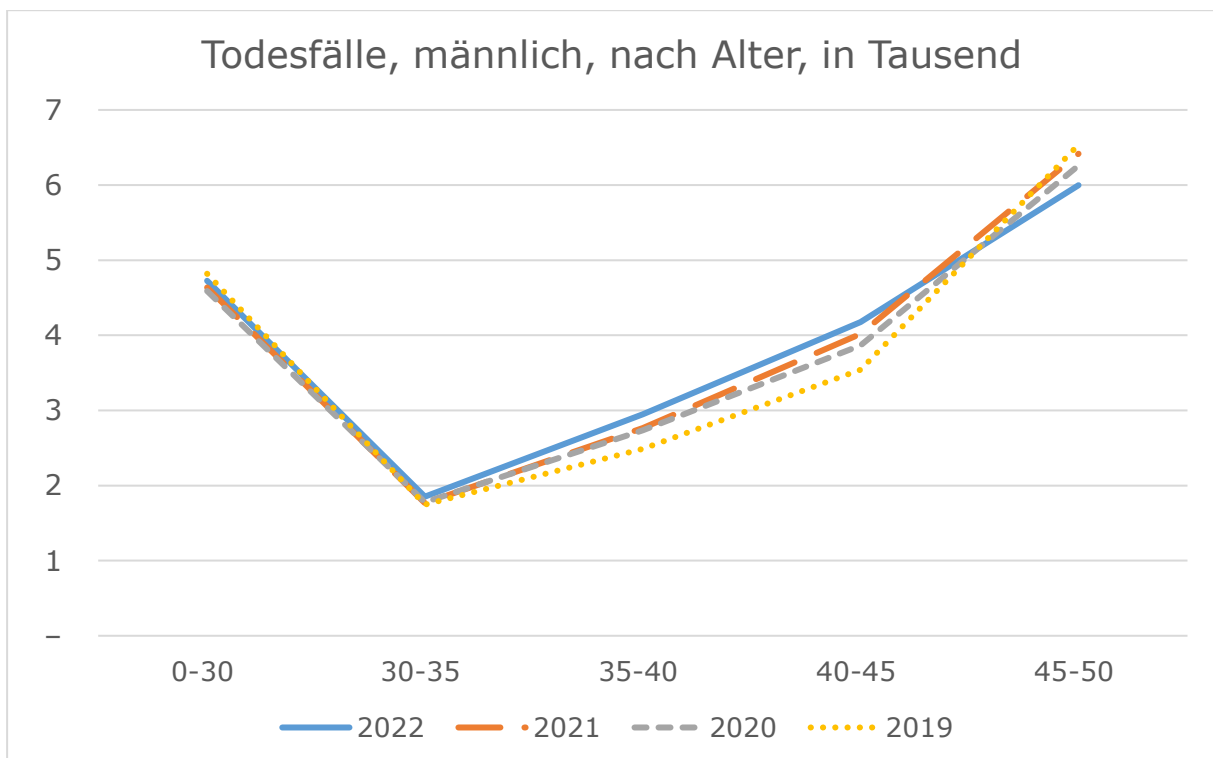
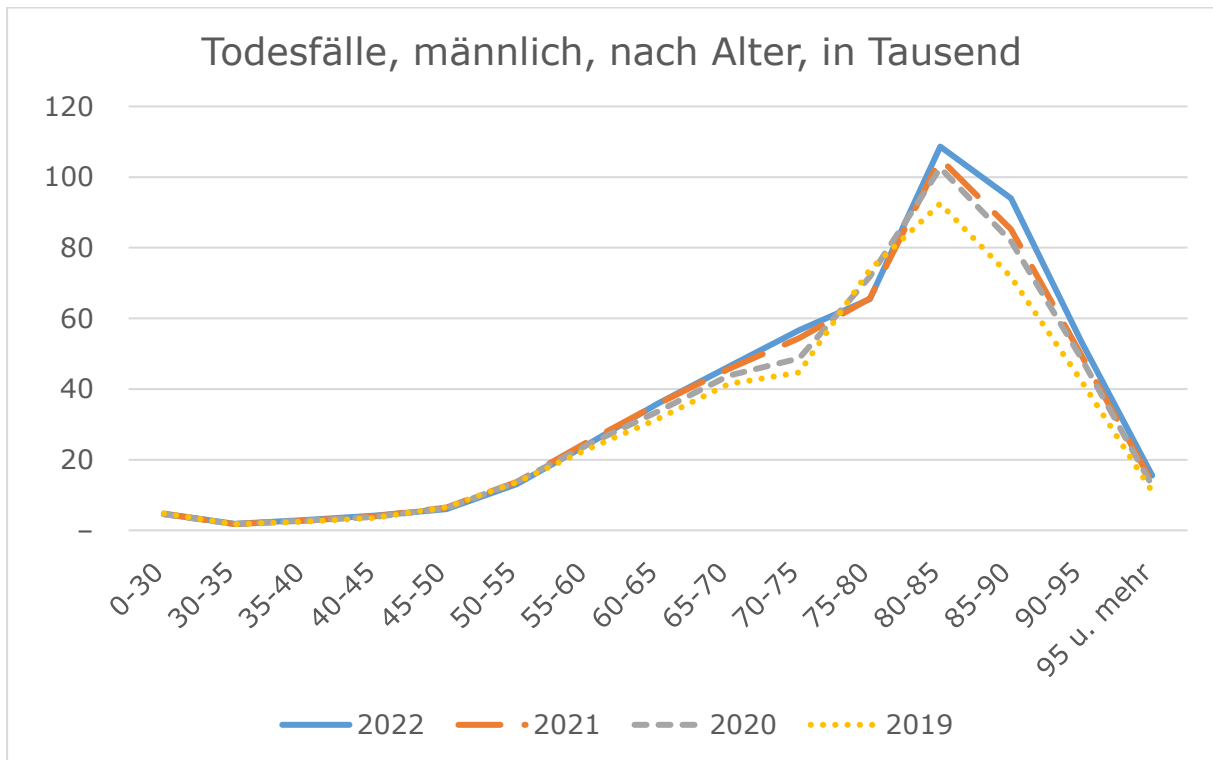
Sterbetafel, Lebenserwartung in Jahren	2015/2017	2016/2018	2017/2019	2018/2020	2019/2021
Männlich	78,36	78,48	78,63	78,64	78,54
Weiblich	83,18	83,27	83,36	83,40	83,38

Am 26. Juli 2022 hat sich das Statistische Bundesamt in einer Pressemitteilung wie folgt zur Entwicklung der Lebenserwartung geäußert:

„Die durchschnittliche Lebenserwartung betrug im Jahr 2021 für neugeborene Mädchen 83,2 Jahre und für neugeborene Jungen 78,2 Jahre. Wie das Statistische Bundesamt (Destatis) weiter mitteilt, hat sich die Lebenserwartung von Neugeborenen im Vergleich zum letzten Vorpandemiejahr 2019 deutlich verringert: Bei Jungen um 0,6 Jahre, bei Mädchen um 0,4 Jahre. Hauptgrund für diese Entwicklung sind die außergewöhnlich hohen Sterbefallzahlen während der Coronawellen.“

- (a) [3 Punkte] Widerspricht die Aussage der Pressemitteilung den Informationen in der Tabelle? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Die folgenden beiden Grafiken zeigen die Anzahl der Todesfälle, männlich, nach Altersbändern, in Tausend für verschiedene Kalenderjahre.



- (b) [3 Punkte] Wird das Statistische Bundesamt von einer steigenden oder fallenden Lebenserwartung für Männer berichten, wenn es Mitte 2023 die Sterbetafel 2020/2022 veröffentlicht? Welchen Wert für die Lebenserwartung der Männer erwarten Sie? Argumentieren Sie unter Berücksichtigung der Tabelle, der Pressemitteilung und der beiden Grafiken.

Die Lebenserwartung bei Geburt lässt sich mit Hilfe der Formel

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} k \cdot {}_k p_0 q_k + \frac{1}{2}$$

bestimmen, wobei  ${}_k p_0$  die Überlebenswahrscheinlichkeit von Geburt bis Alter  $k$  beschreibt und  $q_k$  die Sterbewahrscheinlichkeit einer  $k$ -jährigen Person.

Spätestens seit der Berichterstattung über die Coronapandemie ist es Allgemeinwissen, dass die Lebenserwartung bei Geburt sinkt, wenn die Sterblichkeit steigt.

- (c) [9 Punkte] Weisen Sie dies theoretisch nach. *Hinweis:* Zeigen Sie dazu zuerst, dass sich die Formel zur Lebenserwartung bei Geburt schreiben lässt als

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} {}_k p_0 + \frac{1}{2}$$

und differenzieren Sie diese anschließend nach der Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x$  (für ein Alter  $0 \leq x < \omega$ ).

Lösungsvorschlag:

- (a) Nein, die Informationen sind nicht widersprüchlich. Die jährlich veröffentlichten (Perioden-)Sterbetafeln basieren jeweils auf Daten eines Dreijahreszeitraums. Die Sterbetafel 2019/2021 fußt z.B. auf Auswertungen der Jahre 2019, 2020 und 2021. Die Aussagen des Statistischen Bundesamts in der Pressemitteilung basieren auf Berechnungen für einzelne Kalenderjahre. Darum ist auch die in der Pressemitteilung zu findende Lebenserwartung für das Jahr 2021 niedriger als die mit der Sterbetafel 2019/2021 berechnete. Letztere wird positiv beeinflusst von den Sterblichkeitserfahrungen des Vorpandemiejahrs 2019.
- (b) Die Sterbetafel 2020/2022 wird auf den Daten des Dreijahreszeitraums 2020 bis 2022 basieren. Im Vergleich zur Sterbetafel 2019/2021 werden die Beobachtungen des Jahres 2019 durch die Beobachtungen des Jahres 2022 ersetzt. Nach den beiden Grafiken liegt die Sterblichkeitserfahrung



im Jahr 2022 für viele Altersbänder auf oder über dem Niveau der Pandemiejahre 2020 und 2021 und mehr oder weniger deutlich über dem Niveau des Vorpandemiejahres 2019. Eine deutlichere Ausnahme bildet das Altersband 75 bis 80 Jahre, für das die Sterblichkeit während der Pandemie zurückgegangen ist.

Im Ergebnis wird das Statistische Bundesamt bei der Veröffentlichung der Sterbetafel 2020/2022 vermutlich von einer fallenden Lebenserwartung für Männer berichten. Wegen des ähnlichen oder leicht höheren Niveaus der Anzahl der Todesfälle im Jahr 2022 im Vergleich zu den Pandemiejahren 2020 und 2021 wird die Lebenserwartung der Männer auf oder leicht unterhalb des in der Pressemitteilung publizierten Werts von 78,2 Jahren liegen.

(c) Mit  ${}_k p_0 q_k = {}_k p_0 - {}_{k+1} p_0$  folgt

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} k [{}_k p_0 - {}_{k+1} p_0] + \frac{1}{2},$$

was sich schreiben lässt als

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} k {}_k p_0 - [(k+1) - 1] {}_{k+1} p_0 + \frac{1}{2}$$

oder auch als

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} k {}_k p_0 - \sum_{k=1}^{\omega} k {}_k p_0 + {}_1 p_0 + \sum_{k=1}^{\omega} k {}_k p_0 - {}_1 p_0 + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\omega} k {}_k p_0 + \frac{1}{2}.$$

Dies weist die Äquivalenz der beiden Formeln für die Lebenserwartung bei Geburt nach.

Die letzte Formel für die Lebenserwartung bei Geburt lässt sich weiter schreiben als

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^{\omega} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q_l) + \frac{1}{2}$$

bzw.

$$LE(\text{Geburt}) = \sum_{k=1}^x \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q_l) + \sum_{k=x+1}^{\omega} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q_l) + \frac{1}{2}.$$



Differenzieren nach  $q_x$  liefert

$$\frac{\partial LE(Geburt)}{\partial q_x} = - \sum_{k=x+1}^{\omega} \prod_{l=0}^{x-1} (1 - q_l) \prod_{l=x+1}^{k-1} (1 - q_l).$$

Die Ableitung ist offensichtlich negativ, da jeder einzelne Summand ein Produkt von Wahrscheinlichkeiten und damit positiv ist. Im Ergebnis zeigt dies, dass die Lebenserwartung bei Geburt fällt, wenn die Sterblichkeit steigt.

**Aufgabe 12.** [Berufsunfähigkeitsversicherung] [20 Punkte]

Sie arbeiten in der Produktenwicklung eines Lebensversicherers und sollen die Berufsunfähigkeitsversicherung überarbeiten.

- (a) [5 Punkte] Die Deutsche Aktuarvereinigung e.V. hat das Tafelsystem DAV 2021 I zur Reservierung von Berufsunfähigkeitsversicherungen entwickelt. Beschreiben Sie dessen Bestandteile, genauer die verschiedenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten knapp. Wovon hängen diese ab?

Um sich vom Markt zu differenzieren, überlegen Sie die Leistung der Berufsunfähigkeitsversicherung auszuweiten. Bisher zahlt Ihr Tarif nur das gesetzlich verlangte Minimum an Rentenleistungen nach einer Reaktivierung.

- (b) [1 Punkt] Wie viele Monate muss eine versicherte Person nach § 174 Abs. 2 VVG nach einer Reaktivierung mindestens eine Rentenleistung erhalten?

Nun überlegen Sie für ein ganzes weiteres Jahr nach Reaktivierung die Rentenleistung zu bezahlen. Dazu analysieren Sie die Veränderung des Invalidenrentenbarwerts durch eine solche Leistungsausweitung.

Im Folgenden bezeichne  $x$  das Alter, in dem die versicherte Person die Berufsunfähigkeitsversicherung abgeschlossen hat,  $n$  die Versicherungs- und Leistungsdauer und  $x + j$  das Alter, in dem die versicherte Person invalide wird.  $R$  bezeichne die Höhe der jährlichen Invalidenrente und  $v$  den Diskontfaktor.

- (c) [5 Punkte] Leiten Sie zunächst den bisherigen Invalidenrentenbarwert  $\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^i$  ohne jede Leistung nach Reaktivierung und zwar auch ohne die gesetzlich vorgesehene Leistung nach §174 Abs. 2 VVG her. Erläutern Sie.
- (d) [6 Punkte] Leiten Sie nun den modifizierten Invalidenrentenbarwert  $\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^{i,mod}$  her mit einer weiteren Jahresrente nach Reaktivierung. Erläutern Sie die Veränderung des Barwerts im Vergleich zu Aufgabenteil (c).

Je nach Reaktivierungsniveau wird der Invalidenrentenbarwert also um mehrere Prozentpunkte steigen mit einem entsprechenden Effekt auf den Preis im wettbewerbsintensiven Markt der Berufsunfähigkeitsdeckungen. Darum machen Sie sich noch einmal grundsätzlich Gedanken wie attraktiv Ihre Idee ist.

- (e) [3 Punkte] Welches Teilkollektiv profitiert von einer längeren Rentenzahlungsdauer nach Reaktivierung? Nennen Sie eine andere Möglichkeit der Leistungsausweitung von der mehr versicherte Personen profitieren? Warum?

Lösungsvorschlag:

- (a) Die Berufsunfähigkeitstabellen DAV 2021 I bestehen aus nach Geschlecht und Alter  $x$  differenzierten
- Inzidenzen  $i_x$  für Berufsunfähigkeit, bezeichnet als DAV 2021 I,
  - Aktivensterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^a$ , bezeichnet als DAV 2021 TA, abgeleitet mittels altersunabhängiger Faktoren aus der Todesfalltafel DAV 2008 T,
  - zweifach abgestuften Reaktivierungswahrscheinlichkeiten  $r_{(z)x}^i$  zur Berücksichtigung der spezifischen Reaktivierungsraten in den ersten neun Jahren nach Eintritt der Invalidität, mit Alter bei Invalidisierung  $z$ , bezeichnet als DAV 2021 RI,
  - zweifach abgestuften Invalidensterbewahrscheinlichkeiten  $q_{(z)x}^i$  zur Berücksichtigung der beobachteten Übersterblichkeit in den ersten fünf Jahren nach Eintritt der Invalidität, mit Alter bei Invalidisierung  $z$ , bezeichnet als DAV 2021 TI.
- (b) Nach § 174 Abs. 2 VVG wird der Versicherer „frühestens mit dem Ablauf des dritten Monats nach Zugang der Erklärung [...], zur entfallenen Leistungspflicht] beim Versicherungsnehmer leistungsfrei.“
- (c) Der gefragte Invalidenrentenbarwert ist gegeben durch

$$\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^i = \sum_{k=j}^{n-1} v^{k-j} \prod_{l=j}^{k-1} (1 - q_{(x+j)x+l}^i)(1 - r_{(x+j)x+l}^i)R.$$

Die jährliche Invalidenrente der Höhe  $R$  wird bezahlt, wenn der Invalide bis zum Alter  $x + k$ ,  $k = j, \dots, n - 1$  überlebt hat und nicht reaktiviert worden ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch das Produkt beschrieben. Bei der üblichen vorschüssigen Zahlung der Invalidenrente ist diese mit  $v^{k-j}$  abzudiskontieren. Die Summe berücksichtigt die Leistungsdauer.

- (d) Mit Alter  $x + k$  erhält der vormals Invalide eine weitere Rentenleistung der Höhe  $R$ , wenn er bis dahin überlebt hat und im Vorjahr reaktiviert worden ist, d.h. mit Wahrscheinlichkeit

$$\prod_{l=j}^{k-2} (1 - q_{(x+j)x+l}^i)(1 - r_{(x+j)x+l}^i) (1 - q_{(x+j)x+k-1}^i) r_{(x+j)x+k-1}^i.$$



Der Invalidenrentenbarwert  $\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^i$  aus Aufgabenteil (c) ist also wie folgt zu modifizieren:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^{i,mod} &= \sum_{k=j}^{n-1} v^{k-j} \prod_{l=j}^{k-1} (1 - q_{(x+j)x+l}^i)(1 - r_{(x+j)x+l}^i)R \\ &+ \sum_{k=j}^{n-1} v^{k-j} \prod_{l=j}^{k-1} (1 - q_{(x+j)x+l}^i)(1 - r_{(x+j)x+l}^i) \frac{r_{(x+j)x+k-1}^i}{(1 - r_{(x+j)x+k-1}^i)} R.\end{aligned}$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$\ddot{a}_{(x+j)x+j:\overline{n-j}|}^{i,mod} = \sum_{k=j}^{n-1} \frac{v^{k-j}}{(1 - r_{(x+j)x+k-1}^i)} \prod_{l=j}^{k-1} (1 - q_{(x+j)x+l}^i)(1 - r_{(x+j)x+l}^i)R.$$

Die Summanden des Invalidenrentenbarwerts steigen also um einen Faktor  $> 1$ , wobei der Faktor mit der Reaktivierungswahrscheinlichkeit steigt. Je höher die Reaktivierung, desto stärker steigt der Invalidenrentenbarwert, wenn eine weitere Jahresrente nach Reaktivierung bezahlt wird.

- (e) Werden die Rentenleistungen nach Reaktivierung länger bezahlt als bisher bzw. gesetzlich vorgesehen, so profitiert das Teilkollektiv der Invaliden von dieser Leistungsausweitung.

Alle versicherten Personen, nicht nur die Invaliden, profitieren z.B. von einer versicherten Leistung bei Arbeitsunfähigkeit, z.B. bei Vorliegen einer Arbeitsunfähigkeit von 6 Monaten. Dies erhöht die Wahrscheinlichkeit eines Leistungsfalls und eben nicht nur die Leistung bei vorliegender Invalidität.