DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 29. Oktober 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 13 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Modellierung [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Interne Unternehmensmodelle von Schadenversicherern) [17 Punkte]

Basisinformationen:

- Der Schadenversicherer „Haus & Hof“ betreibt die beiden Sparten Kraftfahrt-Kasko (KK) und Wohngebäude (VGV). Das Unternehmen verfügt seit 2016 über ein genehmigtes internes Modell unter Solvency II.
- Im Rahmen eines von den Aktuaren geleiteten Workshops sollen die Vorstände und weitere Führungskräfte des Unternehmens zum internen Modell geschult werden. Die Aktuare wollen den Termin insbesondere dazu nutzen, den Teilnehmern die Bedeutung und den Nutzen interner Unternehmensmodelle näherzubringen.

Aufgaben:

(a) *[10 Punkte]* Nennen und beschreiben Sie die wesentlichen Komponenten eines typischen internen Unternehmensmodells eines Schadenversicherers.

(b) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei wesentliche Unterschiede zwischen einem typischen internen Unternehmensmodell eines Schadenversicherers und der Solvency II-Standardformel.

(c) *[4 Punkte]* Nennen und erläutern Sie zwei mögliche Einsatzbereiche und Fragestellungen, zu denen das interne Modell von „Haus & Hof“ herangezogen werden kann. Gehen Sie hierbei insbesondere auf den Bestand des Unternehmens sowie das daraus resultierende Risikoprofil ein.

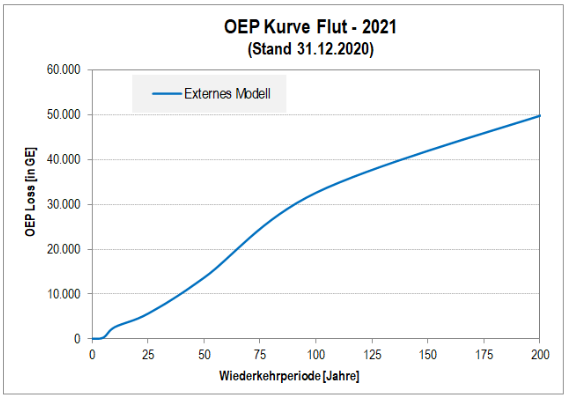
Aufgabe 2 (Modellierung von Katastrophenschäden) [38 Punkte]

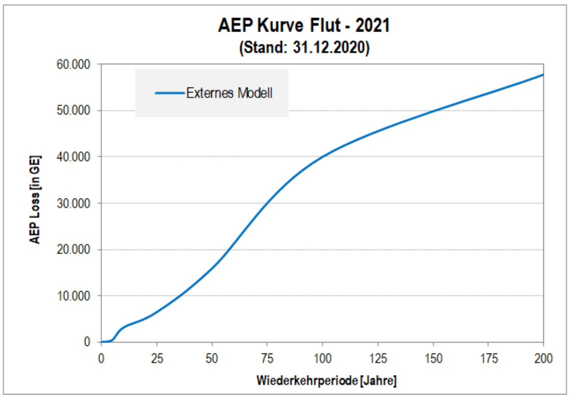
(2.1) Modellierungsansätze für Katastrophenschäden [27 Punkte]

Basisinformationen:

- „Haus & Hof" vertreibt in der Sparte VGV ausschließlich Sturm- und Elementardeckungen für private Wohngebäude. Aufgrund seines speziellen Geschäftsmodells, das mit der Solvency II-Standardformel nur unzureichend abgebildet werden kann, betreibt das Unternehmen ein aufsichtsrechtlich genehmigtes internes Modell.

- Zur Modellierung der Gefahr „Flut" verwendet „Haus & Hof" ein *externes exposure-basiertes Modell eines kommerziellen Anbieters*. Aus dem Modelllauf per 31.12.2020 resultierten folgende Schadenkurven für das Jahr 2021 (Angabe in GE = Geldeinheiten):





- Rückblickend zum 31.12.2021 war das Schadenjahr 2021 durch eine Serie mittelgroßer und kleiner Starkregen- und Überschwemmungsereignisse in Kombination mit einer schweren Sturzflut namens „Frieda" geprägt. Speziell „Frieda" hatte deutschlandweit zu verheerenden Schäden geführt und wird von Naturgefahrenexperten und Rückversichererern gleichermaßen als „außergewöhnliches" Ereignis mit einer marktweiten Wiederkehrperiode zwischen 50 und 75 Jahren eingestuft. Der auf die Gefahr Flut entfallende Gesamtschaden von „Haus & Hof" belief sich für das komplette Jahr 2021 auf 40.000 GE, von denen allein das Einzelereignis „Frieda" einen Schadenaufwand von 25.000 GE verursachte.

Aufgaben:

(a) *[3+2+2 Punkte]* Der Vorstand von „Haus & Hof" möchte gerne verstehen, wie *exposure-basierte Modelle* grundsätzlich funktionieren und welche alternativen Modellierungsansätze für das Katastrophenrisiko aus Naturgefahren prinzipiell in Frage kämen. Erläutern Sie daher zunächst (i) den *typischen Aufbau eines exposure-basierten Modells* und geben Sie im Folgenden jeweils zwei mögliche *Vor- und Nachteile* bei der Verwendung (ii) *externer exposure-basierte Modelle* und (iii) bei einer *mathematisch-statistischen Modellierung* an.

(b) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der vorliegenden OEP- und AEP-Kurven näherungsweise die theoretischen Wiederkehrperioden für das Schadenjahr 2021 und das Einzelereignis „Frieda“, wie sie sich unter dem externen Modell zum 31.12.2020 ergeben würden. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(c) *[4 Punkte]* Gehen Sie davon aus, dass das externe Modell dem typischen Aufbau eines exposure-basierten Modells folgt. Lassen sich aus den Basisinformationen und der Analyse in Aufgabenteil (b) Aussagen über die Angemessenheit des verwendeten externen Modells zur Quantifizierung des Flutrisikos ableiten? Sind derartige Aussagen auch zu einzelnen Modulen des externen Modells möglich?

(d) *[12 Punkte]* Die Aktuare haben eine mathematisch-statistische Modellierung durchgeführt und die Schadeninformationen aus 2021 in die Kalibrierung einbezogen: es wird ein kollektives Modell mit einer Poissonverteilung $Poi(\lambda)$ für die jährliche Anzahl an Flutereignissen und einer Paretoverteilung $Pareto(t, \alpha)$ für die Höhe der Ereignisschäden unterstellt.

Die geschätzten Modellparameter lauten:

- Ereignisschadenuntergrenze $t = 1.000$ GE
- Jährliche Frequenz an Ereigniseintritten: $\hat{\lambda} = 0{,}5$
- Geschätzte Parameter der $Pareto(t, \alpha)$: $\hat{\alpha} = 1{,}0$.

Ermitteln Sie die analytische Darstellung der *OEP-Kurve* unter der mathematisch-statistischen Modellierung und skizzieren Sie diese bis Wiederkehrperiode 1.000 in einem Diagramm. Welche Wiederkehrperiode ergäbe sich für das Ereignis „Frieda“ bei einer mathematisch-statistischen Modellierung?

Hinweise: Die Verteilungsfunktion der Paretoverteilung $Pareto(t, \alpha)$ mit Formparameter $\alpha > 0$ und „Threshold“ t (= Ereignisschadenuntergrenze) lautet:

$$F(x|t, \alpha) = 1 - \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}, \; x > t$$

In einem kollektiven Modell mit $Poisson(\lambda)$-verteilter Schadenanzahl N und unabhängig und identisch nach X verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ besitzt die Verteilungsfunktion des Maximums $M_N := \max\{X_1, \dots, X_N\}$ die Gestalt:

$$F_{M_N}(x) = \exp\{-\lambda \cdot (1 - F_X(x))\}.$$

(2.2) Resimulation aus einer Event Loss Table [11 Punkte]

Zur Modellierung der Naturgefahr *Sturm* greift der Versicherer „Haus & Hof“ auf ein externes exposure-basiertes Modell zurück. Als Output des externen Modells liegt den Aktuaren die folgende *Event Loss Table* (ELT) vor:

EVENT ID	RATE	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE
4711	0,05	100	12	8	1.000
4712	0,20	50	7	3	500
4713	0,10	20	5	5	800

(a) *[5 Punkte]* Die Einträge der vorliegenden Event Loss Table lassen sich als Parameter eines statistischen Modells auffassen. Beschreiben Sie den Modellrahmen und benennen Sie die wesentlichen Annahmen.

(b) *[6 Punkte]* Welche relevanten Kenngrößen der Verteilung des aggregierten Jahresschadens lassen sich unter dem in Aufgabenteil (a) spezifizierten Modellrahmen bereits analytisch aus der ELT bestimmen? Nennen und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (Modellierung - Reserverisiko) [15 Punkte]

Basisinformationen:

- Im internen Unternehmensmodell von „Haus & Hof“ wird neben dem Katastrophenrisiko auch das Reserverisiko abgebildet.
- Das Abwicklungsdreieck der kumulierten Zahlungen für angefallene, aber noch nicht abgewickelte Schadenfälle in der Sparte VGV umfasst die Anfalljahre 2019 - 2021 und besitzt zum Stichtag 31.12.2021 die Gestalt:

Anfalljahr / Abwj	1	2	3
2019	5	10	15
2020	15	20	
2021	10		

- Von den Reservierungsaktuaren wurden zum Stichtag 31.12.2021 folgende Best-Estimates $\hat{R}_i^{(2021)}$ für die Schadenrückstellungen der Anfalljahre $i \in \{2019, 2020, 2021\}$ ermittelt:

Anfalljahr i	$\hat{R}_i^{(2021)}$
2019	0
2020	5
2021	20

- Die Quantifizierung des ultimativen Reserverisikos wird mithilfe des internen Simulationsmodells auf Basis von 1.000 Simulationen vorgenommen, wobei sich der Begriff Risiko in diesem Kontext durchgehend auf den Eintritt eines aus Unternehmenssicht negativen Ereignisses bezieht.
- Diskontierung wird sowohl bei der Ermittlung der Best Estimates wie auch bei der Risikomessung vernachlässigt.

Aus dem internen Modell liegen in den 4 schlechtesten Simulationspfaden die folgenden *ultimativen Schadenaufwände* U_i für die Anfalljahre 2019 - 2021 vor:

Simulation M	${}^{(M)}U_i$ per Anfalljahr i		
	2019	2020	2021
125	15	43	56
344	15	38	60
712	15	39	50
883	15	44	65

(a) *[2 Punkte]* Was versteht man allgemein unter dem *„ultimativen Reserverisiko“*?

(b) *[6 Punkte]* Schätzen Sie aus den vorliegenden Simulationsergebnissen das ultimative Reserverisiko als *Expected Shortfall* zum Niveau 99,7%!

(c) *[7 Punkte]* Zur Plausibilisierung der Modellierungsergebnisse führen die Aktuare ein Benchmarking gegen Marktdaten durch. Die marktspezifische Standardabweichung für das ultimative Reserverisiko der Sparte VGV beträgt 25% (relativ zum Best Estimate). Nutzen Sie eine Lognormalverteilungsannahme, um das ultimative Reserverisiko der Sparte als *Value-at-Risk* zum Niveau 99,7% zu bestimmen, wie er sich für „Haus & Hof“ unter Verwendung der marktspezifischen Volatilität ergeben würde, und vergleichen Sie diesen Wert mit den Simulationsergebnissen aus dem internen Modell.

Hinweise:

- *Eine Zufallsgröße X heißt lognormalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ. Die Verteilungsfunktion F_X von X lautet*

$$F_X(z) = \Phi\left(\frac{\ln(z) - \mu}{\sigma}\right), \ z > 0.$$

Hierbei repräsentiert die Funktion Φ die Gauß'sche Phi-Funktion.
Ferner existieren sämtliche Momente von X und besitzen die Darstellung:

$$\mathbb{E}[X^n] = \exp\left(n \cdot \mu + \frac{n^2 \cdot \sigma^2}{2}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

- *Für die Inverse Φ^{-1} der Gauß'schen Phi-Funktion gilt: $\Phi^{-1}(0{,}997) = 2{,}748$.*

Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Reserveprozess und Reservebericht) [27 Punkte]

(a) *[14 Punkte]* Benennen Sie die Stationen des Reserveprozesses und ihre Einordnung im Prozessablauf. Geben Sie zu jeder Station kurz und stichpunktartig die wesentlichen Bestandteile an.

(b) *[13 Punkte]* Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (H), welche sich auf den Reserveprozess zur Bestimmung der Rückstellungen für bilanzielle Zwecke beziehen. Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Stellen Sie jede falsche Aussage in naheliegender Weise richtig.

(A) Der zugehörige Reservebericht ist nur unter HGB eine explizite gesetzliche Anforderung, nicht aber unter Solvency II.

(B) Die Prozessbeschreibung des Reserveprozesses legt fest, welche Methoden bei der Reserveberechnung zum Einsatz kommen und unter welchen Umständen Ausnahmen zulässig sind.

(C) Um eine unabhängige Einschätzung zu gewährleisten, sollte die Versicherungsmathematische Funktion den Reservebericht zum Reserveprozess erst nach ihrem finalen Bericht an den Vorstand zum Thema Rückstellungen erhalten.

(D) Ein formaler Beschluss über die Höhe der Rückstellungen (z.B. Vorstandsentscheidung) ist als fester Bestandteil des Reserveprozesses zu etablieren, da die abschließende Entscheidung in der Verantwortung des Managements liegt.

(E) Zur Vermeidung von Interessenskonflikten darf keine Person/Funktion im Reservekomitee vertreten sein, in deren Leistungsbeurteilung die Profitabilität des zu bewertenden Geschäfts einfließt.

(F) Zur Vermeidung unnötiger Komplexität ist der Inhalt des Reserveberichts zum Reserveprozess auf ein Rechnungslegungssystem (HGB, Solvency II oder IFRS) zu beschränken.

(G) Der Reserveaktuar ist im Rahmen des Reservebewertungsprozesses nicht für die Qualitätssicherung der Daten verantwortlich, da diese Aufgabe Teil der Prozesse der Rechnungslegung ist.

(H) Um eine von der Berechnung unabhängige Validierung (welche insbesondere durch Solvency II stark gefordert wird) zu gewährleisten, ist auf eine personelle Trennung bei der Durchführung der Aufgaben zu achten.

Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [23 Punkte]

(a) *[12 Punkte]* Geben Sie die fünf wesentlichen Elemente des Building Block Approach unter IFRS17 an und beschreiben Sie kurz ihre Rolle im Bewertungsmodell. Erklären Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe Imparitätsprinzip und Realisationsprinzip.

(b) *[3 Punkte]* Erläutern Sie allgemein, welche Verträge bei der Berechnung der Prämienrückstellungen unter Solvency II zu berücksichtigen sind.

(c) *[4 Punkte]* Geben Sie bei den folgenden vier Beispielen jeweils an, ob die Versicherungsverträge für die Prämienrückstellungen unter Solvency II zu berücksichtigen sind (Bilanzstichtag 31.12.2021, keine Begründung erforderlich).

(A) Ein Vertrag, der am 16.12.2021 abgeschlossen wurde mit Beginn des Versicherungsschutzes am 01.01.2022.

(B) Ein nicht gekündigter Vertrag, zu dem die Kündigungsfrist am 31.12.2021 verstrichen war und welcher sich damit automatisch zum 01.01.2022 um ein weiteres Jahr verlängert hat.

(C) Ein Vertrag, der am 16.01.2022 abgeschlossen wurde, allerdings auf den 01.01.2022 (Beginn des Versicherungsschutzes) rückdatiert wurde.

(D) Ein Vertrag, der am 16.12.2021 abgeschlossen wurde mit Beginn des Versicherungsschutzes am 01.02.2022 und welcher erst am 19.01.2022 im Bestandssystem angelegt wurde.

(d) *[4 Punkte]* Ein Erstversicherungsunternehmen schließt mit einem Rückversicherer am 11.12.2021 einen Quotenvertrag auf Zeichnungsjahresbasis mit Vertragslaufzeit 01.01.2022 bis 31.12.2022 ab. Stellen Sie sowohl aus Sicht des Erstversicherers als auch aus Sicht des Rückversicherers dar, ob und falls ja, wie dieser Vertrag zum Bilanzstichtag 31.12.2021 bei der Berechnung der Prämienrückstellungen unter Solvency II zu berücksichtigen ist.

Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [24 Punkte]

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass der vorgegebene Versicherungszweig aus dem Bereich der Schaden- und Unfallversicherung die Voraussetzungen zur Bildung einer Schwankungsrückstellung unter HGB erfüllt und nicht aus dem Bereich der Hagel-, der Kredit- und Kautions-, sowie der Vertrauensschadenversicherung stammt. Nehmen Sie außerdem vereinfachend an, dass kein Sicherheitszuschlag existiert, so dass die Regelungen zur Verminderung von Sollbetrag und Überschaden nicht greifen.

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie die drei Bedingungen (Name der Klausel und ihr Inhalt) an, welche in Abschnitt I Nr. 1 aus der Anlage zu § 29 RechVersV als Voraussetzung zur Bildung einer Schwankungsrückstellung aufgeführt sind.

Für die Schadenquoten q_i der Geschäftsjahre $i = 1, \ldots, 15$ des Beobachtungszeitraums sind die folgenden Werte gegeben:

$$q_1 = 70{,}4\% \qquad \sum_{i=1}^{15} q_i = 1206{,}0\% \qquad \sum_{i=1}^{15} q_i^2 = 9{,}769$$

Im Bilanzjahr $i = 16$ betragen die verdienten Beiträge $P_{16} = 100$ (Mio. EUR). Die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war $SR_{15} = 5{,}5$.

(b) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$ des Beobachtungszeitraums und die zugehörige Standardabweichung $\bar{\sigma}$.

Hinweis: Falls Ihnen die Berechnung der Standardabweichung nicht gelingt, so rechnen Sie mit dem (falschen) Ersatzergebnis $\bar{\sigma} = 8{,}0\%$ weiter.

(c) *[12 Punkte]* Stellen Sie die Abhängigkeit der Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS} (y-Achse) von der Schadenquote q_{16} des Geschäftsjahres (x-Achse) im Bereich $q_{16} = 0\%$ bis $q_{16} = 100\%$ graphisch dar. Hinweis: Alle wichtigen Punkte des Graphen sind zu berechnen und alle wesentlichen Elemente der graphischen Darstellung müssen beschriftet werden.

Betrachten Sie die beiden Szenarien (A) und (B):

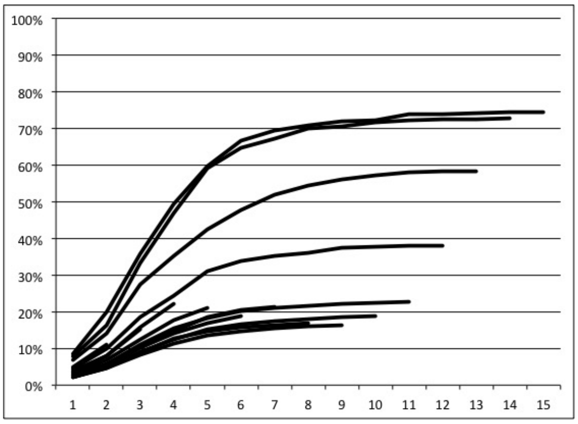
(A) Die Schadenquoten im Beobachtungszeitraum schwanken zufällig um die mittlere Schadenquote. Die Schadenquote im Bilanzjahr 16 beträgt $q_{16} = 70{,}4\%$.

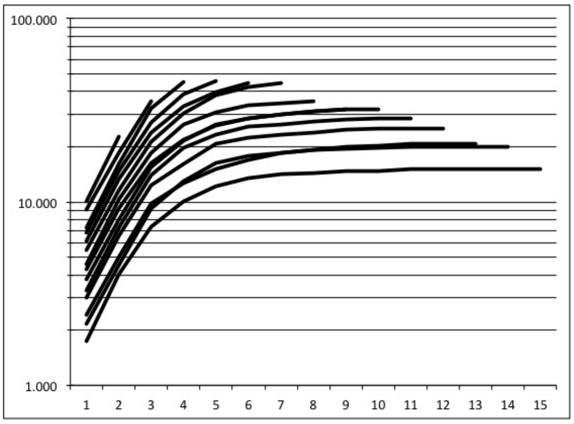
(B) Die Schadenquoten im Beobachtungszeitraum steigen monoton an von $q_1 = 70{,}4\%$ bis zu $q_{15} = 92{,}1\%$. Im Bilanzjahr 16 beträgt der Wert $q_{16} = 93{,}4\%$.

(d) *[6 Punkte]* Der Vorstand Ihres Unternehmens möchte wissen, mit welcher Schadenquote nach Schwankung er im Geschäftsjahr 17 im Normalfall rechnen muss. Beantworten Sie die Frage für jedes der beiden Szenarien auf Basis der vorhandenen Informationen. Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Gehen Sie von einem unveränderten Prämienvolumen $P_{17} = P_{16}$ aus.

Aufgabe 7 (Modellauswahl und graphische Analysen) [15 Punkte]

Die folgenden Abbildungen zeigen links die kumulative Schadenquotengrafik zu einem gegebenen Abwicklungsdreieck von Zahlungsdaten und rechts die logarithmisch skalierten Schadenbeträge.





(a) *[6 Punkte]* Beschreiben Sie allgemein die Anwendung des Parallelenkriteriums sowie dessen theoretische Hintergründe. Wenden Sie das Kriterium auf das dargestellte Abwicklungsdreieck an und begründen Sie Ihre Modellauswahl.

(b) *[3 Punkte]* Welches der drei folgenden Abwicklungsmuster A, B oder C gehört zum dargestellten Abwicklungsdreieck? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abwicklungsjahr															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	16%	35%	65%	89%	107%	106%	106%	104%	103%	102%	101%	100%	100%	100%	100%
B	12%	26%	48%	66%	79%	87%	92%	95%	97%	98%	99%	100%	100%	100%	100%
C	12%	15%	23%	32%	49%	68%	85%	96%	98%	99%	99%	99%	100%	100%	100%

(c) *[3 Punkte]* In den folgenden Reihen A, B, und C sind die Wurzeln von Varianzparametern (also s_k bzw. σ_k) dargestellt. Welche der drei Reihen gehört zum dargestellten Abwicklungsdreieck? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Der Begriff Varianzparameter bezieht sich auf das in Teilaufgabe (a) gewählte Modell.

Abwicklungsjahr															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A		5,4	8,3	6,6	3,8	3,1	2,6	2,1	1,7	1,2	1,0	0,8	0,5	0,3	0,2
B		92,6	141,7	111,6	64,5	53,0	43,5	35,8	29,4	20,8	16,3	13,4	8,5	5,1	3,4
C		768,3	892,6	926,6	535,8	440,1	361,4	296,9	243,8	172,6	135,0	110,9	70,6	42,3	28,2

(d) *[3 Punkte]* Beurteilen Sie das dargestellte Portfolio bzgl. seiner Neigung zu Großschäden und bzgl. etwaiger Volumenänderung über die Anfalljahre hinweg.

Aufgabe 8 (Incremental-Loss-Ratio Modell) [21 Punkte]

Für ein Geschäftssegment bezeichne v_i ein Volumenmaß (Risikoprämie) für das Anfalljahr i, $S_{i,k}$ den Zuwachs des Anfalljahres i im Abwicklungsjahr k und $C_{i,k} = S_{i,1} + \cdots + S_{i,k}$ den entsprechenden kumulativen Stand mit $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, u$. Für das Segment sollen die Annahmen des Incremental-Loss-Ratio Modells (ILR) gelten.

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie die Modellannahmen des ILR-Modells an. Verwenden Sie die üblichen Bezeichnungen m_k und s_k^2 für die Zuwachsquoten und Varianzparameter.

Da es sich um Geschäft im Staat XY handelt, sind die Werte der Zuwächse und der Prämien in der Landeswährung XY-Dollar (XYD) angegeben. Sie möchten für Ihre Reservebewertung das Abwicklungsdreieck (inklusive Volumenmaß) in Euro (EUR) betrachten und müssen daher die Werte umrechnen. Dazu betrachten Sie die Wechselkurse λ_j mit $j = 1, \ldots, n$ zum Ende des jeweiligen Bilanzjahres j, das heißt, zum Stichtagskurs am Ende des Kalenderjahres j war $1\text{EUR} = \lambda_j\text{XYD}$.

(b) *[5 Punkte]* Ihnen stehen drei Alternativen für die Wechselkursumrechnung in die EUR-Werte $\tilde{v}_i$, $\tilde{S}_{i,k}$ und $\tilde{C}_{i,k}$ für Prämien, Zuwächse und Stände zur Verfügung:

(A) $\quad \tilde{v}_i = \lambda_i \cdot v_i, \quad \tilde{C}_{i,k} = \lambda_{i+k-1} \cdot C_{i,k} \quad \text{und} \quad \tilde{S}_{i,k} = \tilde{C}_{i,k} - \tilde{C}_{i,k-1}$

(B) $\quad \tilde{v}_i = \lambda_i \cdot v_i, \quad \tilde{S}_{i,k} = \lambda_{i+k-1} \cdot S_{i,k} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{i,k} = \tilde{S}_{i,1} + \cdots + \tilde{S}_{i,k}$

(C) $\quad \tilde{v}_i = \lambda_n \cdot v_i, \quad \tilde{S}_{i,k} = \lambda_n \cdot S_{i,k} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{i,k} = \tilde{S}_{i,1} + \cdots + \tilde{S}_{i,k}$

Erklären Sie, warum Sie die Alternativen (A) und (B) ablehnen und sich für Alternative (C) entscheiden.

(c) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass auch für die mit Alternative (C) berechneten Zuwächse $\tilde{S}_{i,k}$ die Voraussetzungen des ILR-Modells mit Volumenmaß $\tilde{v}_i$ erfüllt sind. Geben Sie die entsprechenden Parameter $\tilde{m}_k$ und $\tilde{s}_k^2$ explizit an.

Betrachten Sie ein weiteres Geschäftssegment w_i (Volumenmaß), $T_{i,k}$ (Zuwachs) und $D_{i,k}$ (kumulativer Stand) mit $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, u$, für das ebenfalls die Annahmen des Incremental-Loss-Ratio Modells (ILR) gelten und zwar mit denselben Zuwachsquoten m_k und Varianzparametern s_k^2 wie für das Segment $S_{i,k}$ und v_i. Zudem seien alle Zuwächse beider Segmente $S_{i,k}$, $T_{i,k}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, u$ stochastisch unabhängig.

(d) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Summe $S_{i,k} + T_{i,k}$ die Voraussetzungen des ILR-Modells mit Volumenmaß $v_i + w_i$ erfüllt. Geben Sie die entsprechenden Zuwachsquoten und Varianzparameter explizit an. (Hinweis: Währungen spielen in dieser Teilaufgabe (d) und in der nächsten Teilaufgabe (e) keine Rolle.)

(e) *[6 Punkte]* Sei nun $u \leq n$. Mit $\widehat{R}_i^C$ bzw. $\widehat{R}_i^D$ seien die Reserveschätzer des ILR-Verfahrens für

$$R_i^C = C_{i,u} - C_{i,n-i+1} \qquad \text{und} \qquad R_i^D = D_{i,u} - D_{i,n-i+1}$$

bezeichnet ($i \geq n-u+1$). Wie üblich sei $\widehat{R}_i^{C+D}$ der entsprechende Reserveschätzer für die Summe $C_{i,k}+D_{i,k}$ der beiden Abwicklungsdreiecke. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{R}_i^{C+D}\right) \leq \operatorname{Var}\left(\widehat{R}_i^C + \widehat{R}_i^D\right)$$

gilt und erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage im Rahmen von Reservebewertungen.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Ungleichung

$$\frac{(v_i + w_i)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j + w_j} \leq \frac{v_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j} + \frac{w_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} w_j}.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Interne Unternehmensmodelle von Schadenversicherern) [17 Punkte]

(a) *[10 Punkte]* Zu den Komponenten eines internen Unternehmensmodells eines Schadenversicherers zählen:

- *Versicherungstechnisches Modell*: Modellierung der versicherungstechnischen Risiken und passivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.
  - *Brutto-Modell*: Relevante Brutto-Informationen für die simulierten Neugeschäftsjahre (das erste zukünftige Neugeschäftsjahr im Falle eines einjährigen Modells):
    - Neuschäden Brutto vor Rückversicherung (unterteilt nach Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden)
    - GuV- und Bilanzdaten (Prämien, Kosten, Bestandsentwicklung)
  - *Reserverisiko*: Abwicklung der Schadenreserven für vergangene Anfalljahre (bereits angefallene Schäden bzw. Altschäden) und Messung des ultimativen Reserverisikos.
  - *Abwicklungsmodell*: Erzeugung der Schaden-Cashflows für Altschäden und Neuschäden, Ausgangspunkt für Überleitung von ultimativem Risikohorizont in die Kalenderjahressicht / einjährige Risikosicht.
  - *Rückversicherungsmodell*: Abbildung der wichtigsten RV-Verträge und Berechnung der Nettogrößen (Schäden, Kosten, Prämien) auf Basis der simulierten Bruttogrößen aus dem Brutto-Modell.
- *Nicht-versicherungstechnisches Modell (auch: Aktiv-Modell)*: Modellierung der Kapitalanlagerisiken und aktivseitigen Cash-Flows eines Kompositversichereres.
  - *Kapitalmarkt-Modell*: Generiert Kapitalmarktszenarien, im Allgemeinen erzeugt durch einen ökonomischen Szenariogenerator (ESG)
  - *Investment-Modell*: Entwicklung der Buch- und Marktwerte des Kapitalanlagebestandes auf Basis der Kapitalmarktpfade aus dem Kapitalmarkt-Modell.
- *Management-Modell*: Zusammenführen der aktiv- und passivseitigen Cash Flows unter Berücksichtigung von Liquiditätserfordernissen und vordefinierten Managementregeln für Aktiv- und Passivseite sowie deren Interaktion.

- *Auswertungs-Modell*: Generierung der Ausgaben und Kenngrößen wie z.B. Ruinwahrscheinlichkeiten, Risikokapital, GuV- und Bilanzposten pro Simulationspfad.

(b) *[3 Punkte]* Als zentrale Unterschiede zwischen der Solvency II-Standardformel und *internen Unternehmensmodellen* lassen sich bei Schadenversicherern nennen (pro Nennung ein Punkt):

- Interne Unternehmensmodelle zeichnen sich durch eine *unternehmensindividuelle Festlegung der Methodik und Modellkalibrierung* aus, die Standardformel basiert hingegen auf vorgegebenen Formeln, Parametern und Risikofaktoren, die von der Aufsichtsbehörde EIOPA festgelegt werden und den europäischen Durchschnittsversicherer repräsentieren sollen.

- Interne Unternehmensmodelle sind im Allgemeinen *simulationsbasiert*, es liegen komplette Wahrscheinlichkeitsverteilungen für alle Risiken vor. Demgegenüber basiert die Standardformel auf einem rein analytischen Formelwerk.

- Die Modellierung der Schäden für das Neugeschäftsjahr und der Schadenabwicklung für Altschäden erfolgt zunächst *Brutto vor Rückversicherung*, anschließend wird das zugehörige Netto bestimmt. Die *Nettoüberleitung* der Bruttoschäden aus dem Neugeschäftsjahr wird hierbei durch (weitestgehend) einzelvertragliche Abbildung des Rückversicherungsprogramms vorgenommen. In der Standardformel erfolgt die Nettoüberleitung pauschal (vgl. Prämienrisiko) bzw. szenariobasiert (vgl. Katastrophenrisiko aus Naturgefahren), und damit speziell bei nicht-proportionaler, gefahrenübergreifender Rückversicherung nur näherungsweise.

- Die *Segmentierung der modellierten Sparten* bei den versicherungstechnischen Risiken Nicht-Leben, insbesondere beim Prämien- und Reserverisiko, ist im Allgemeinen feiner als die Einteilung nach Geschäftsbereichen gemäß Solvency II. Auch wird bei der Modellierung der Nicht-Katastrophenschäden aus dem Neugeschäftsjahr in der Regel nach *Schadentypen* (Basis- und Großschäden) differenziert.

- Die *Aggregation* der Einzelverteilungen im internen Unternehmensmodell erfolgt mittels Copulas, nicht analytisch mittels Wurzelformel.

(c) *[4 Punkte]* Die möglichen Einsatz- bzw. Analysebereiche des internen Modells für „Haus & Hof“ umfassen (Nennung jeweils ein Punkt, Erläuterung ein weiterer Punkt):

- Aufgrund der ausgeprägten Naturgefahrenexponierung der Sparten VGV und KK und der über den gemeinsamen Auftritt von Elementarereignissen bestehenden Abhängigkeiten zwischen beiden Sparten kann das interne Modell von “Haus & Hof“ einen wichtigen Beitrag zur *Analyse des unternehmensweiten Elementarexposures* und der *Angemessenheit des Rückversicherungsschutzes im Naturgefahrenbereich* leisten.

- Mithilfe des internen Modells ließe sich im Rahmen von Szenarioanalysen zudem analysieren, inwieweit die Forcierung des Vertriebs in bestimmten Regionen, die Aufnahme neuer Geschäftsfelder oder der Zukauf weniger naturgefahrenexponierter Bestände Maßnahmen sein könnten, um die *(geografische und spartenübergreifende) Diversifikation auf der Passivseite* zu erhöhen.

- Da die Schadenkostenquoten bei VGV und KK marktweit in der Regel recht hoch sind: Analyse der *Profitabilität im Neugeschäftsjahr* sowie Bestimmung von Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten

- *Risikozuschläge in der Tarifierung* aufgrund der Exponierung ggü. Kumulschäden (VGV, KK) bzw. Großschäden (VGV): *Ermittlung von Kapitalkosten* anhand der Risikokapitalien aus dem internen Modell

- Analysen zum *Liquiditätsbedarf* speziell in Simulationspfaden mit Auftritt von Naturereignissen

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Modellierung - Versicherungstechnisches Risiko in der Schadenversicherung) [38 Punkte]

(2.1) Modellierungsansatz für Katastrophenschäden [27 Punkte]

(a) *[3+2+2 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Bei (externen) exposure-basierten Modellen handelt es sich in der Regel um komplexe Simulations- und Berechnungstools mit verschiedenen Komponenten (Ereigniserzeugung, Portefeuille, Schadenanfälligkeit, Finanzmodul, Outputmodul). Die Ereignisschäden bzw. Jahresschäden sind das Resultat eines mehrstufigen Berechnungsprozesses. Modelliert werden lokale Ausprägungen der schadenbestimmenden Parameter der jeweiligen Naturgefahr, welche unter Berücksichtigung der geographischen Verteilung des Bestandes mithilfe risikospezifischer Vulnerabilitätskurven in einen „Ground-Up-Schaden“ am versicherten Objekt übersetzt werden. Abschließend erfolgt die Anwendung der Limit- und Selbstbehaltsstrukturen, um den versicherten Bruttoschaden zu erhalten (optional auch Nettoschaden bei Anwendung der RV-Struktur). Der Output des Modells liegt im Allgemeinen in komprimierter Form vor und besteht aus YLTs, ELTs, OEP- und/oder AEP-Kurven.

(ii) *[2 Punkte] Mögliche Vorteile (+) und Nachteile (-) bei Verwendung externer exposure-basierter Modelle*:

(+) In die Modellierung fließt multidisziplinäres Know-How ein.

(+) Granulare Modellierung auf Basis der zugrundeliegenden Schadentreiber unter Berücksichtigung von Lage, Spezifika und Deckungen der Risiken, dadurch insbesondere auch zum Pricing und Management des Bestandes geeignet (Bsp: Kumulkontrolle, Analysen zur Auswirkung verschiedener Selbstbehaltsstrukturen,...).

(+) Zur Modellierung der Hauptgefahren stehen prinzipiell mehrere exposure-basierte Modelle etablierter Drittanbieter zur Verfügung.

(+) Modellierungsansatz erlaubt detaillierte Abbildung der Abhängigkeiten zwischen Sparten und Gesellschaften.

(-) Hohe Anforderungen an Verfügbarkeit, Qualität und Granularität der Bestandsdaten (Lage und Spezifika der versicherten Risiken, Deckungen).

(-) Kosten (Lizenz, Hardware, personelle Ressourcen)

(-) Grundsätzlich erfordert der Einsatz exposure-basierter Modelle Know-How und ein tiefes Verständnis von Funktionsweise, Methodik und zugrundeliegenden Annahmen, sei es auf Seiten der Modellierer oder derjenigen, die lediglich den Output dieser Modelle im internen Modell verarbeiten.

(-) Auswahlprozess notwendig, falls für eine Naturgefahr mehrere externe exposure-basierte Modelle verschiedener Anbieter verfügbar sind. Andererseits sind solche Modelle jedoch nicht für alle Gefahren (betrifft insbesondere die „Nebengefahren“) verfügbar.

(iii) *[2 Punkte] Mögliche Vorteile (+) und Nachteile (-) bei Verwendung eines mathematisch-statistischen Modells*:

Kurzbeschreibung des Ansatzes (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich): Modellierung auf Basis der (unternehmenseigenen) Schadenhistorie erfolgt eine Anpassung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an Ereignisschäden (in der Regel unter Annahme eines kollektiven Modells) bzw. die Jahresschadenlast nach entsprechender as-if-Transformation der Schäden, um monetäre Inflation, Veränderungen im Exposure und/oder sonstige Schadentrends seit dem originären Ereigniseintritt zu berücksichtigen. Schadenverursacher ist das Versichertenkollektiv, es wird keine weitere Differenzierung nach Einzelrisiken und entsprechender Spezifika wie geographischer Lage, etc... vorgenommen.

(+) Modellierung erfordert in erster Linie statistisches Know-How.

(+) Höhere Transparenz, größere Freiheitsgrade bei der Modellierung und Kalibrierung. Unternehmen kann zeitnah auf neue Schadenereignisse reagieren und diese in der Kalibrierung der Schadenverteilungen berücksichtigen (was bei externen Anbietern in der Regel erst mit der Veröffentlichung einer neuen Modellversion passiert).

(+) Keine Abhängigkeit von externen Anbietern

(-) Eingeschränkte Verfügbarkeit und Repräsentativität der Originalschäden, insbesondere schwierig im Hinblick auf

- Gefahren mit äußerst niedrigen Eintrittswahrscheinlichkeiten, wie z.B. Erdbeben in Deutschland
- Änderungen im Schadenbild und neuen Deckungen, wie z.B. Photovoltaikanlagen, im Beobachtungszeitraum

(-) Schwierigkeit bei der as-if Transformation der Originalschäden (insbesondere bei Veränderungen in der Bestandsverteilung und der grundsätzlichen Exponierung, bspw. durch verbesserte Flutschutzmaßnahmen)

(-) Mitunter nur vereinfachte Modellierung der Abhängigkeiten zwischen Sparten und Gesellschaften.

(b) *[4 Punkte]* Zur Definition von AEP- und OEP-Kurve (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich): Bezeichne N die zufällige Anzahl an Katastrophenschäden in einem Jahr und $X_1, \ldots, X_N$ die zugehörigen Ereignisschadenhöhen. Wird mit F_S die Verteilungsfunktion der Summenvariable $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ bezeichnet, so ist die AEP-Kurve (AEP = Aggregate Loss Exceeding Probability) definiert gemäß:

$$AEP(T) := F_S^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

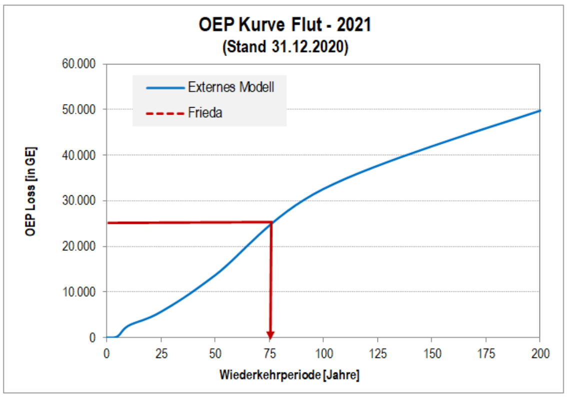
Die AEP-Kurve beschreibt die Verteilung des Jahresgesamtschadens, der durch die betrachtete Naturkatastrophe verursacht wird, und gibt an, wie hoch der maximal zu beobachtende Jahresgesamtschaden über einen Zeitraum von $T > 0$ Jahren erwartungsgemäß sein wird. Hierbei wird T als *Wiederkehrperiode* oder auch *Jährlichkeit* bezeichnet.

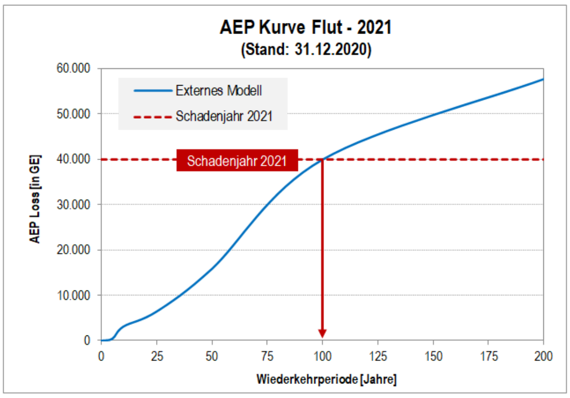
Die OEP-Kurve (OEP = *Occurrence Exceeding Probability*) bezieht sich hingegen auf die Verteilung des maximalen Ereignisschadens $M_N := \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ und ist definiert gemäß:

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

Die theoretische Wiederkehrperiode des Schadenjahres 2021 lässt sich somit näherungsweise grafisch aus der AEP-Kurve bestimmen, bspw. durch Bestimmung des Schnittpunkts der AEP-Kurve mit der Linie, die die Schadenhöhe 40.000 GE kennzeichnet. Daraus ergibt sich eine Wiederkehrperiode von ca. 100 Jahren.

Die theoretische Wiederkehrperiode des Einzelereignisses „Frieda“ lässt sich analog aus der OEP-Kurve ablesen. Daraus ergibt sich eine Wiederkehrperiode von ca. 75 Jahren.





(c) *[4 Punkte]* Es lassen sich folgende Überlegungen anstellen (Nennung und Erläuterung jeweils ein Punkt):

- Unter dem externen Modell sind der Eintritt eines Ereignisses in der Größenordnung von „Frieda" bzw. eines kumulierten Schadenjahres, wie es in 2021 beobachtet worden ist, aufgrund der Wiederkehrperioden von 75 bzw. 100 tatsächlich als außergewöhnliche Ereignisse zu werten.

- Die Wiederkehrperiode von „Frieda" gemäß externem Modell befindet sich am oberen Intervallende der marktweiten Einschätzung und erscheint damit marktkonform, wenn auch tendenziell optimistisch - allerdings sind bei der Interpretation die geographische Bestandsverteilung des Unternehmens ggü. dem Markt sowie der alleinige Fokus auf die Sparten Wohngebäude und Kasko ggü. dem Sparten-Mix des Marktportfolios zu beachten.

- Ein idealtypisches geophysikalisches Modell besteht aus Gefährdungsmodul, Exposuremodul, Vulnerabilitätsmodul und Finanzmodul. Da das Zusammenspiel aller vier Komponenten den modellierten Schadenaufwand im externen Modell bestimmt, lassen sich aus einer Analyse der Wiederkehrperioden des Schadenaufwands keine direkten Rückschlüsse auf die Angemessenheit einzelner Komponenten ziehen.

- Das Unternehmen sollte das Ereignis zum Anlass nehmen, die Einzelkomponenten des Modells dahingehend zu überprüfen, ob die Charakteristika des Ereignisses (Intensität, Schadengrade) bzw. Schadenjahres im Modell angemessen erfasst sind. Dies erfordert allerdings Detailinformationen. Einschätzungen aus Forschung und Markt sowie Vergleiche gegen andere potentielle Modellanbieter können, sofern verfügbar, dabei helfen.

- Allgemein bedeutet eine hohe Wiederkehrperiode nicht automatisch, dass das Unternehmen das Modell zwingend verwerfen sollte, da auch für außergewöhnliche Ereignisse bzw. Schadenjahre eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass diese innerhalb kürzerer Beobachtungszeiträume auftreten. Verzichtet das Unternehmen allerdings auf eine solche Tiefenanalyse und hält es uneingeschränkt am aktuellen Modell fest, besteht das Risiko, dass das Unternehmen einen zu niedrigen Risikokapitalbedarf (falls das Modell die Eintrittswahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses unterschätzt) oder einen zu hohen Risikokapitalbedarf (falls das Modell die Eintrittswahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses überschätzt) berechnet und u.U. zu wenig oder zu viel Kapital vorhält.

- Auffällig ist der deutliche Unterschied zwischen den Wiederkehrperioden des Einzelereignisses „Frieda" (75) und des Schadenjahres 2021 (100), der auf eine mögliche Unterschätzung der Frequenz hindeutet, speziell im Bereich der kleinen und mittelgroßen Ereignisschäden hin.

(d) *[12 Punkte]* Offensichtlich sind die Voraussetzungen (kollektives Modell mit Poisson(λ)-verteilter Schadenanzahl N und unabhängig und identisch nach X verteilten Einzelereignissen) im vorliegenden Fall erfüllt, so dass gemäß Hinweis aus der Aufgabenstellung die Verteilungsfunktion des Maximums $M_N = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ die Gestalt

$$F_{M_N}(z) = \exp\{-\lambda \cdot (1 - F_X(z))\}.$$

besitzt. Somit gilt für die Darstellung der verallgemeinerten Inversen $F_{M_N}^{-1}$ von F_{M_N} in Abhängigkeit der verallgemeinerten Inversen F_X^{-1} von F_X:

$$F_{M_N}^{-1}(q) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln q}{\lambda}\right).$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich nur für $1 + \lambda^{-1} \ln q > 0$ oder äquivalent $q > \exp\{-\lambda\}$ definiert. Interpretation: der Ausdruck $\exp\{-\lambda\}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit gemäß Poisson-Modell, dass die Schadenanzahlvariable den Wert Null annimmt und somit kein Ereignisschaden oberhalb der Grenze $\tau =$ 1.000 GE beobachtet wird. Somit ist $F_{M_N}^{-1}(q) = 0$ für $q \le \exp\{-0{,}5\} \approx 0{,}61$, was einer Wiederkehrperiode von ca. 2,5 Jahren entspricht.
Für $q > \exp\{-0{,}5\}$ ist die Inverse $F_{M_N}^{-1}$ wohldefiniert: da die Einzelereignisse gemäß Voraussetzung einer $Pareto(t, \alpha)$-Verteilung genügen, besitzt die Inverse von F_X die folgende Gestalt:

$$F_X^{-1}(u \mid t, \alpha) = t \cdot (1 - u)^{-1/\alpha}, \; 0 < u < 1.$$

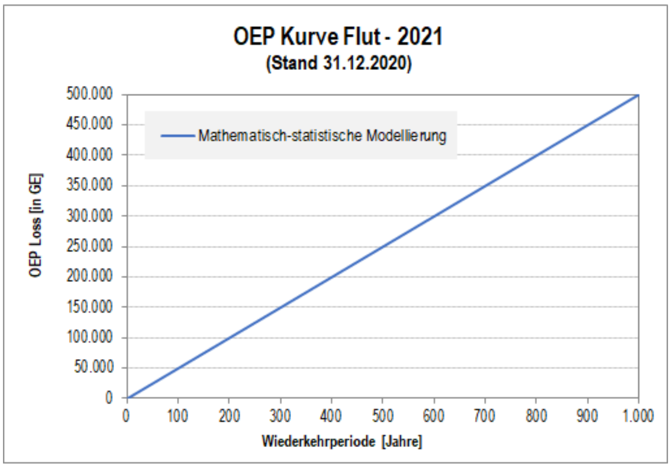
Die Darstellung der OEP-Kurve ergibt sich bspw. durch Auswertung von

$$F_{M_N}^{-1}(q_i) = t \cdot \left(-\frac{\ln q_i}{\lambda}\right)^{-1/\alpha} = -\lambda \cdot t \cdot \ln^{-1} q_i.$$

an mehreren Stützstellen $q_i = 1 - 1/t_i$ (Exemplarisch: $t_1 = 50$, $t_2 = 200$ und $t_3 = 1.000$) und anschliessender Interpolation zwischen den Stützstellen:

Wiederkehrperiode t_i	q_i	$OEP(t_i)$
50	0,980	24.749
200	0,995	99.750
1.000	0,999	499.750

Alternativ lässt sich eine Betrachtung der Funktion $OEP(T) = -\lambda \cdot t \cdot \ln^{-1}(1-1/T)$ vornehmen, bei Approximation der Logarithmusfunktion ergibt sich näherungsweise $OEP(T) \approx \lambda \cdot t \cdot T = 0{,}5 \cdot 1.000 \cdot T = 500 \cdot T$.



Die Wiederkehrperiode des Ereignisses „Frieda“ unter der mathematisch-statistischen Modellierung beläuft sich auf ca. 50 Jahre (mehrere Herleitungen zulässig: Auswertung der Verteilungsfunktion der Maximumsvariable an der Stelle $x_0 = 25.000$ GE, grafische Näherung anhand von Diagramm). Somit misst das aktuarielle Modell dem Eintritt eines Ereignisses in der Größenordnung von „Frieda“ eine höhere Wahrscheinlichkeit als das externe exposure-basierte Modell bei.

(2.2) Resimulation aus einer Event Loss Table [11 Punkte]

(a) *[5 Punkte]* Bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der in der ELT enthaltenen Sturmszenarien, so liegen dem stochastischen Modell folgende Annahmen zugrunde:

- Die Einzelszenarien i, $1 \leq i \leq n$ sind stochastisch unabhängig.
- Jedes Einzelszenario $1 \leq i \leq n$ wird als kollektives Modell aufgefasst:
  - Der Jahresgesamtschaden S_i aus Ereignisschäden des Szenarios i ist gegeben durch:
  $$S_i = \sum_{j=i}^{N_i} X_{ij}.$$
  - Die Ereignisanzahl N_i wird durch eine Poisson (λ_i)-Verteilung beschrieben mit $\lambda_i := \mathbb{E}[N_i]$ (=RATE).
  - Die individuellen Ereignishöhen X_{ij}, $j \in \mathbb{N}$ innerhalb eines Szenarios i sind unabhängig und identisch verteilt mit
    * Erwartungswert $\mu_i := \mathbb{E}[X_{ij}]$ (= PERSPVALUE)
    * Standardabweichung $\sigma_i := \sigma[X_{ij}]$ (= STDDEVI + STDDEVC)
  - Die individuellen Ereignishöhen X_{ij} sind unabhängig von der Ereignisanzahl N_i.
- Die Schadengrade $z_{ij} := X_{ij}/max_i$ pro Einzelszenario (max_i bezeichnen die vom Ereignis betroffenen versicherten Werte = EXPVALUE) genügen jeweils einer Beta(α_i, β_i)-Verteilung.

(b) *[6 Punkte]* Analytisch lassen sich die Gesamtfrequenz, der erwartete Jahresgesamtschaden und die Varianz des Jahresgesamtschadens berechnen. Die Gesamtfrequenz λ ergibt sich durch Summation der Einzelfrequenzen λ_i und ermittelt sich zu $\lambda = 0{,}35$. Nach den Formeln von Wald ergibt sich für jedes einzelne Schadenszenario $1 \leq i \leq n$:

- Erwarteter Jahresgesamtschaden S_i per Einzelszenario: $\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mu_i$
- Varianz des Jahresgesamtschadens per Einzelszenario: $\mathbb{V}[S_i] = \lambda_i \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$

EVENT ID	$\mathbb{E}[S_i]$	$\mathbb{V}[S_i]$
4711	5,0	520
4712	10,0	520
4713	2,0	50

Der Jahresgesamtschaden aller Szenarien ist gegeben durch:

$$S_{Sturm} = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Erwartungswert und Varianz des Jahresschadens S aller Szenarien ergeben sich jeweils über Summation der Einzelerwartungswerte bzw. Einzelvarianzen (letzteres aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Szenarien).

Damit ergibt sich zusammengenommen:

- Erwarteter Jahresgesamtschaden: $\mathbb{E}[S_{Sturm}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i]$
- Varianz des Jahresgesamtschadens: $\mathbb{V}[S_{Sturm}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[S_i]$

Insgesamt ist $\mathbb{E}[S_{Sturm}] = 17$ und $\mathbb{V}[S_{Sturm}] = 1.090$ bzw. $\sigma[S_{Sturm}] \approx 33$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Modellierung - Reserverisiko) [15 Punkte]

(a) *[2 Punkte]* Das *ultimative Reserverisiko* lässt sich gemäß Skript definieren als Risiko einer Abweichung des endgültigen Schadenaufwands für bereits angefallene Schäden vom geschätzten Erwartungswert (d.h. das Risiko, dass die Best-Estimate Schadenrückstellungen nicht ausreichen, um sämtliche Verpflichtungen aus angefallenen Schäden zu erfüllen).

(b) *[6 Punkte]* Der Ultimateschätzer $\hat{U}_i^{(2021)}$ eines Anfalljahres ermittelt sich als Summe von Best-Estimate Reserve $\hat{R}_i^{(2021)}$ und dem jeweiligen Diagonalstand des Schadenzahlungsdreiecks:

Anfalljahr i	$\hat{U}_i^{(2021)}$
2019	15
2020	25
2021	30

Die für das ultimative Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist die Differenz Δ_i zwischen dem tatsächlichen Ultimate U_i und dem zum Stichtag 31.12.2021 geschätzten Ultimate $\hat{U}_i^{(2021)}$. Zur Berechnung der Verteilung dieser Verlustgröße werden die Differenzen Δ_i pro Einzelsimulation und Anfalljahr ermittelt und anschließend zum Gesamtverlust Δ durch Addition der Δ_i über alle Anfalljahre aggregiert:

Simulation M	${}^{(M)}\Delta_i := {}^{(M)}U_i - \hat{U}_i^{(2021)}$ per Anfalljahr i			
	2019	2020	2021	${}^{(M)}\Delta := \sum_i {}^{(M)}\Delta_i$
125	0	18	26	44
344	0	13	30	43
589	0	14	20	34
883	0	19	35	54

Allgemein ist der Schätzer für den Expected Shortfall zum Niveau α der Mittelwert der $\lfloor (1-\alpha)\cdot n \rfloor$-größten Verluste einer Stichprobe vom Umfang n, wobei $\lfloor\,\rfloor$ den ganzzahligen Anteil angibt. Somit lässt sich der Expected Shortfall der

Zufallsgröße Δ zum Niveau 99,7% mithilfe des Mittelwertes der 3 größten Simulationswerte schätzen, d.h. es ist

$$\widehat{\mathrm{ES}}_{99,7\%}(\Delta) = \frac{1}{3} \cdot (54 + 44 + 43) = 47.$$

(c) *[7 Punkte]* Für die Logarithmische Normalverteilung der Bedarfsreserve $R^{(2021)}$ mit den beiden Parametern μ und σ^2 gilt:

- Erwartungswert: $\mathbb{E}[R^{(2021)}] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$
- Varianz: $\mathbb{V}[R^{(2021)}] = \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right) \cdot \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\}$

Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma^2 = \ln\left(\mathbb{V}[R^{(2021)}]/\mathbb{E}[R^{(2021)}]^2 + 1\right) = \ln\left(\mathrm{Vco}[R^{(2021)}]^2 + 1\right),$$
$$\mu = \ln \mathbb{E}[R^{(2021)}] - \sigma^2/2.$$

Im vorliegenden Fall ist gemäß Aufgabenstellung:

$$\mathbb{E}[R^{(2021)}] = \hat{R}^{(2021)} = \sum_{i=2019}^{2021} \hat{R}_i^{(2021)} = 0 + 5 + 20 = 25,$$
$$\mathrm{Vco}[R^{(2021)}] = 25\%.$$

und somit:

$$\sigma^2 = 0{,}0606,\ \mu = 3{,}1886$$

Zur Ermittlung des ultimativen Reserverisikos als Value-at-Risk zum Niveau 99,7% betrachte:

$$\mathrm{VaR}_{99,7\%}\left(R^{(2021)} - \hat{R}^{(2021)}\right) = \mathrm{VaR}_{99,7\%}\left(R^{(2021)}\right) - \hat{R}^{(2021)}$$

und damit insgesamt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{99,7\%}\left(R^{(2021)}\right) &= F^{-1}_{\mathrm{Lognormal}(\mu,\sigma^2)}(0{,}997) \\
&= \exp\left\{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0{,}997)\right\} \\
&= \exp\left\{3{,}1886 + \sqrt{0{,}0606} \cdot 2{,}7478\right\} \\
&= 47{,}7.
\end{aligned}$$

Unter der Verwendung von Marktparametern und einer Lognormalverteilung würde das ultimative Risiko der Sparte $47{,}7 - 25 = 22{,}7$ betragen, was deutlich unterhalb des drittgrößten Simulationswerts 43 (entspricht dem $\mathrm{VaR}_{99,7\%}$ aus den Simulationen des internen Unternehmensmodells) liegt. Dies lässt darauf schließen, dass die Risikoverteilung im internen Modell einen wesentlichen schweren Verlauf als die Lognormalverteilung aufweist oder eine deutlich höhere Schwankung als beim Marktportfolio vorliegt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reserveprozess und Reservebericht)

[27 Punkte]

(a) *[14 Punkte]* Die Stationen im Reserveprozess und ihre Bestandteile sind:

(1) Daten - Datenarchitektur und -generierungsprozesse, Qualitätssicherungsprozesse, Validierungsprozesse

(2) Reserveberechnung - Analyse und Berechnung, Backtesting und Actual vs. Expected Analyse, Sensitivitätsanalysen, Kommunikation, Wissensaustausch und Diskussion, Erstellung Reservereport

(3) Unabhängige Validierung - Review des Prozesses, Angemessenheit der Daten, Angemessenheit der Methoden, Modelle und Annahmen, Backtesting, Überprüfung der Angemessenheit der Ergebnisse

(4) Offizielle Festlegung - Abstimmung der Ergebnisse mit betroffenen Stellen im Unternehmen, Vorstandsbeschluss

(5) Weiterverwendung - Veröffentlichung (Vorstände, Wirtschaftsprüfer, Organe, Geschäftseinheiten), Verwendung bei Tarifierung, Bilanzierung, Steuerung, Asset-Liability Management, etc.

(D) Prozessdokumentation - Prozessbeschreibung und Dokumentation internes Kontrollsystem, Reservebericht und Dokumentationen bzw. Protokolle für die einzelnen durchgeführten Prozessschritte

Dabei ist die Einordnung im Ablauf durch die Nummerierung (1) bis (5) gegeben. Die Prozessdokumentation lässt sich nicht in den Ablauf einordnen, sondern gehört zum gesamten Prozess.

(b) *[13 Punkte]* Einige der Aussagen lassen sich auf mehrere Arten sinnvoll und naheliegend richtig stellen. In der Lösung ist jeweils eine Möglichkeit angegeben.

(A) Die Aussage ist falsch. Der Reservebericht ist keine explizite gesetzliche Anforderung unter HGB und auch nicht unter Solvency II.

(B) Die Aussage ist wahr.

(C) Die Aussage ist falsch. Der Reservebericht kann der Versicherungsmathematischen Funktion als wertvolle Informationsquelle bei der Erfüllung ihrer Pflichten dienen. Daher ist es zweckmäßig, wenn der Reservebericht die Solvency-II-Anforderungen abdeckt und der Versicherungsmathematischen Funktion baldmöglichst zur Verfügung gestellt wird.

(D) Die Aussage ist wahr.

(E) Die Aussage ist falsch. Aufgrund ihrer Kenntnisse sind beispielsweise Vertreter aus den Spartenabteilungen wichtige Mitglieder im Reservekomitee. Interessenskonflikte sind durch klare Verantwortlichkeiten und geregelte Entscheidungswege zu vermeiden.

(F) Die Aussage ist falsch. Der Reservebericht dient in der Regel verschiedenen Zielgruppen als Informationsquelle und sollte sich daher nicht auf ein Rechnungslegungssystem beschränken. Beispielhaft ist Solvency II für die Versicherungsmathematische Funktion, IFRS für den Vorstand oder HGB für die Steuerabteilung relevant. Bei Unterschieden zwischen den Rechnungslegungssystemen ist dabei auf eine klare Darstellung zu achten.

(G) Die Aussage ist falsch. Im Rahmen des Reservebewertungsprozesses erfolgen Prozessschritte, die nicht Teil der Prozesse der Rechnungslegung sind. Hier obliegt die Qualitätssicherung der Daten dem Reserveaktuar.

(H) Die Aussage ist wahr.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [23 Punkte]

(a) *[12 Punkte]* Die wesentlichen Elemente des Building Block Approach unter IFRS17 sind:

- Die erwarteten Zahlungsströme. Diese bilden die Basis der Bewertung.
- Die Diskontierung. Diese bildet den ökonomischen Zeitwert der Zahlungsströme mit einem laufzeit-, währungs- und liquiditätskongruenten Zins ab.
- Die Risikomarge (Risk Adjustment). Sie dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht.
- Die Servicemarge (Contractual Service Margin, CSM). Sie dient zur Neutralisierung von Gewinnen bei Vertragsabschluss (siehe Realisationsprinzip).
- Die Drohverlustrückstellung (Loss Component, LC). Sie sorgt dafür, dass (absehbare) Verluste, die bis zum Bilanzstichtag „entstanden“ sind, berücksichtigt werden (siehe Imparitätsprinzip).

Das Imparitätsprinzip besagt, dass - im Unterschied zu Gewinnen - alle absehbaren Verluste aus Verträgen, die zum Stichtag des Abschlusses zu berücksichtigen sind, abgebildet werden müssen, auch wenn die zugrundeliegenden Schadenereignisse noch in der Zukunft liegen, also noch nicht realisiert sind.

Das Realisationsprinzip hingegen besagt, dass Gewinne aus diesen Verträgen im Jahresabschluss nur dann berücksichtigt werden dürfen, wenn sie am Abschlussstichtag auch bereits realisiert sind.

(b) *[3 Punkte]* Bei der Berechnung der Prämienrückstellung unter Solvency II sind sämtliche Zahlungsströme für alle am bzw. vor dem Bilanzstichtag abgeschlossenen Versicherungsverträge zu berücksichtigen, die auch nach dem Bilanzstichtag noch ganz oder teilweise Versicherungsschutz gewähren oder auch beginnen. Entscheidend ist, ob der Tag, an dem das Versicherungsunternehmen Vertragspartner geworden ist bzw. der Tag, an dem der Versicherungsschutz beginnt, sofern dieser früher liegt, auf bzw. vor den Bilanzstichtag fällt.

(c) *[4 Punkte]* Die Verträge aus (A), (B) und (D) sind zu berücksichtigen, der Vertrag aus (C) nicht.

(d) *[4 Punkte]* Sowohl beim Erstversicherer als auch beim Rückversicherer ist der Quotenvertrag bei der Berechnung der Prämienrückstellungen zu berücksichtigen, da er vor dem Bilanzstichtag abgeschlossen wurde und nach dem Bilanzstichtag Versicherungsschutz gewährt.

Beim Erstversicherer sind die einforderbaren Beträge aus Rückversicherung allerdings im Rahmen der Grenzen der Versicherungsverträge zu berechnen, auf die sich die Rückversicherung bezieht. Konkret bedeutet dies, dass der Quotenvertrag nur für diejenigen Policen anzusetzen ist, die aufgrund der obigen Regeln bei der Bestimmung der Prämienrückstellungen berücksichtigt werden. In der Regel sind dies im wesentlichen diejenigen Policen, deren Laufzeit zum 01.01.2022 beginnt.

Beim Rückversicherer hingegen geht der gesamte Quotenvertrag in die Berechnung ein, auch wenn die zugrundeliegenden Policen noch nicht abgeschlossen sind. Die Zahlungsströme etc. für diese Policen müssen geschätzt werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [24 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Die drei Bedingungen sind:

- Bagatellklausel: Der Versicherungszweig weist im Durchschnitt der letzten drei Jahre (inkl. Bilanzjahr) mehr als 125.000 EUR verdiente Beiträge aus.
- Erheblichkeitsklausel: Die Standardabweichung der Schadenquote im Beobachtungszeitraum (in der Regel 15 Jahre, in der Hagel-, der Kredit- und Kautions-, sowie der Vertrauensschadenversicherung 30 Jahre) beträgt mindestens 5%-Punkte.
- Finanzierungsbedarfsklausel: Im Beobachtungszeitraum überschreitet die kombinierte Schaden- und Kostenquote mindestens einmal 100%.

(b) *[3 Punkte]* Es gilt

$$\bar{q} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} q_i = \frac{1206{,}0\%}{15} = 80{,}4\%$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i - \bar{q}\right)^2 \\
&= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i^2 - 2q_i\bar{q} + \bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 2\bar{q}\sum_{i=1}^{15} q_i + 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(9{,}769 - 15\cdot(80{,}4\%)^2\right) \\
&\approx (7{,}2\%)^2,
\end{aligned}$$

womit sich $\bar{\sigma} \approx 7{,}2\%$ ergibt.

(c) *[12 Punkte]* Aufgrund der Vorgaben zu Versicherungszweig und Sicherheitszuschlag berechnet sich der Sollbetrag zu

$$SB_{16} = 4{,}5\cdot\bar{\sigma}\cdot P_{16} \approx 32{,}4.$$

Die erfolgsunabhängige Zuführung beträgt

$$3{,}5\%\cdot SB_{16} \approx 1{,}1.$$

Bei einer Geschäftsjahresschadenquote von $q_{16} = \bar{q}$ ergibt sich damit eine Schadenquote nach Schwankung von

$$q_{16}^{nS} = \bar{q} + \frac{3{,}5\% \cdot SB_{16}}{P_{16}} \approx 80{,}4\% + 1{,}1\% = 81{,}5\%.$$

Bei einer höheren bzw. niedrigeren Schadenquote q_{16} im Geschäftsjahr läge ein Über- bzw. ein Unterschaden vor, der durch eine Entnahme bzw. eine Zuführung zur Schwankungsrückstellung ausgeglichen würde, solange die Schwankungsrückstellung nicht leer ($SR_{16} = 0$) bzw. voll ($SR_{16} = SB_{16}$) wäre. Damit ergibt sich

$$q_{16}^{\max} = \bar{q} + \frac{SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16}}{P_{16}} \approx 87{,}0\%$$

und

$$q_{16}^{\min} = \bar{q} - \frac{SB_{16} - (SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16})}{P_{16}} \approx 54{,}6\%.$$

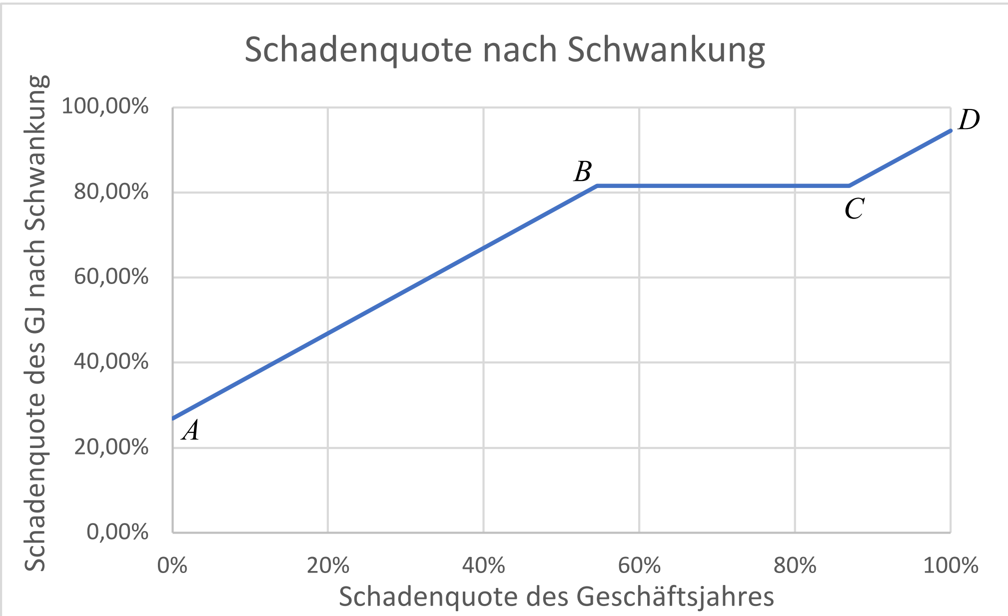
Außerhalb dieser Grenzen überträgt sich jede Änderung von q_{16} direkt auf q_{16}^{nS}. Für $q_{16} = 0\%$ ergibt sich daher

$$q_{16}^{nS} = 81{,}5\% - 54{,}6\% = 26{,}9\%$$

und für $q_{16} = 100\%$ folgt

$$q_{16}^{nS} = 81{,}5\% + (100{,}0\% - 87{,}0\%) = 94{,}5\%.$$

Damit ergibt sich folgende graphische Darstellung:



Dabei sind die eingezeichneten Punkte durch $A = (0; 26{,}9\%)$, $B = (q_{16}^{\min}; 81{,}5\%)$, $C = (q_{16}^{\max}; 81{,}5\%)$ und $D = (100{,}0\%; 94{,}5\%)$ gegeben.

(d) *[6 Punkte]* Szenario (A): Nachdem im Bilanzjahr 16 ein deutlicher Unterschaden vorliegt beträgt die Schwankungsrückstellung

$$SR_{16} = 5{,}5 + 1{,}1 + 10{,}0 = 16{,}6.$$

Da verdiente Beiträge und Standardabweichung sich nicht ändern ($q_{16} = q_1$), bleibt der Sollbetrag gleich. Im Normalfall (etwas mehr als plus/minus zwei Standardabweichungen um die durchschnittliche Schadenquote, welche sich wegen $q_{16} = q_1$ ebenfalls nicht ändert) wird daher die Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS} bei 81,5% liegen.

Szenario (B): Da mit $q_{16} = 93{,}4\%$ im Geschäftsjahr 16 ein deutlicher Überschaden vorliegt, ist $SR_{16} = 0$, die Schwankung also leer. Nach den vorliegenden Informationen über den steigenden Trend wird im Geschäftsjahr 17 eine Schadenquote q_{17} grob in der Gegend von 95% vorliegen. Da der entsprechende Überschaden nicht durch Auflösung von Schwankungsrückstellung ausgeglichen werden kann, wird

$$q_{17}^{nS} = q_{17} \approx 95\%$$

sein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Modellauswahl und graphische Analysen) [15 Punkte]

(a) *[6 Punkte]* Für das Parallelenkriterium sind zwei Fälle zu betrachten:

Im ILR-Fall gilt für ein festes Abwicklungsjahr k: $\frac{C_{ik}}{v_i} - \frac{C_{i,k-1}}{v_i} = \frac{S_{ik}}{v_i} \approx m_k$, das heißt, die Steigungen der Anfalljahre in der (kumulativen) Schadenquotengrafik (linke Abbildung) sollten annähernd (bis auf zufällige Schwankungen) parallel sein.

Im CL-Fall gilt für ein festes Abwicklungsjahr k: $\ln \frac{C_{ik}}{v_i} - \ln \frac{C_{i,k-1}}{v_i} = \ln \frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \approx \ln(f_k)$, das heißt, die Steigungen der Anfalljahre in der (kumulativen) Schadenquotengrafik mit logarithmisch skalierter y-Achse (nicht abgebildet) oder auch in der entsprechenden Schadenbetragsgrafik mit logarithmisch skalierter y-Achse (rechte Abbildung) sollten annähernd (bis auf zufällige Schwankungen) parallel sein.

Falls eine der beiden Grafiken die Parallelität besser zeigt, als die andere, so kann dieses Kriterium zur Auswahl benutzt werden.

Im vorliegenden Fall ist die Parallelität bis auf zufällige Schwankungen in der rechten Grafik klar vorhanden, nicht aber in der linken Grafik. Höhere Schadenquoten bedingen höhere Zuwachsquoten, was dem ILR-Modell widerspricht. Daher fällt die Wahl auf das CL-Modell.

(b) *[3 Punkte]* Das Abwicklungsmuster B gehört zum dargestellten Abwicklungsdreieck. Das Abwicklungsmuster A ist nach dem Abwicklungsjahr 5 rückläufig und scheidet aus, da in den Abbildungen keine Rückgänge zu verzeichnen sind. Das Abwicklungsmuster C zeigt die stärksten Anstiege in den Abwicklungsjahren 5 bis 7, was nicht zu den gegebenen Abbildungen passt.

(c) *[3 Punkte]* Die Varianzparameter in Reihe A gehören zum dargestellten Abwicklungsdreieck. Allgemein gilt (mit den Bezeichnungen wie im Skript)

$$\sqrt{\mathrm{Var}(F_{i,k}|\mathcal{A}_{i,k-1})} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{C_{i,k-1}}}.$$

Betrachten wir das Abwicklungsjahr $k = 2$, so liegen die Werte für $\sqrt{C_{i,1}}$ im Bereich von grob 50 bis 100. Mit dem Wert $\sigma_2 = 92{,}6$ aus Reihe B müssten die Abwicklungsfaktoren in einer Größenordnung von wenigstens -1 bis $+1$ um ihren Mittelwert variieren, der bei $\frac{26\%}{12\%} \approx 2{,}2$ liegt. Diese Schwankungsbreite liegt aber in einer anderen Größenordnung, als die beobachteten viel kleineren Werte. Die Reihe C scheidet damit ebenfalls aus und es bleibt Reihe A.

(d) *[3 Punkte]* Aus der glatten Abwicklung und den gleichmäßig verteilten Anfangswerten der Schadenbeträge ist ersichtlich, dass das Portfolio keine Neigung zu Großschäden aufweist.

Das Prämienvolumen ist zwar nur grob abschätzbar, hat sich aber von den ersten Anfalljahren bis zu den jüngsten Anfalljahren ca. verzehnfacht. Aufgrund des vorliegenden starken Prämienzyklusses (die Schadenquoten sind in den Anfalljahren 1 bis 7 gesunken und danach wieder angestiegen) ist jedoch nicht leicht ablesbar, wie kontinuierlich das Prämienwachstum dazwischen aussah.

Das Schadenvolumen ist sehr kontinuierlich gewachsen und hat sich von den ersten Anfalljahren bis zu den jüngsten Anfalljahren mehr als verfünffacht. Dies könnte in einer wachsenden Policenzahl oder in einer starken Schadeninflation begründet sein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8 (Incremental-Loss-Ratio Modell) [21 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Die Modellannahmen des ILR-Modells lauten:

(ILR1) Die Zuwächse $S_{i,k}$, $1 \le i \le n$, $1 \le k \le u$ sind unabhängig.

(ILR2) Es gibt Parameter $m_k \in \mathbb{R}$, so dass für $1 \le i \le n$ und $1 \le k \le u$

$$\mathrm{E}(S_{i,k}) = m_k \cdot v_i$$

gilt. Die Parameter m_k werden Zuwachsquoten genannt.

(ILR3) Es gibt Parameter $s_k > 0$, so dass für $1 \le i \le n$ und $1 \le k \le u$

$$\mathrm{Var}(S_{i,k}) = s_k^2 \cdot v_i$$

gilt. Die s_k^2 werden auch Varianzparameter genannt.

(b) *[5 Punkte]* Bei den Varianten (A) und (B) werden die Zusammenhänge zwischen den Anfall- und Abwicklungsjahren gestört, da verschiedene Kalenderjahre mit unterschiedlichen Faktoren skaliert werden. Konkrete Beispiele sind:

- Selbst wenn keine Abwicklung mehr stattfindet, also $S_{i,k} = 0$ gilt, so wird bei Variante (A) trotzdem $\tilde{S}_{i,k} \neq 0$ sein, sofern sich die Wechselkurse vom Jahr $i+k-2$ zum Jahr $i+k-1$ geändert haben, also $\lambda_{i+k-2} \neq \lambda_{i+k-1}$ ist.
- In Variante (B) könnte beispielsweise ein kontinuierlicher Verfall des Euro gegenüber der Fremdwährung dazu führen, dass ein abflachendes Abwicklungsmuster ($S_{i,k+1} < S_{i,k} < S_{i,k-1}$) in ein ansteigendes Verhalten ($\tilde{S}_{i,k+1} > \tilde{S}_{i,k} > \tilde{S}_{i,k-1}$) transferiert wird.
- Bei den Varianten (A) und (B) werden die Prämienvolumina mit anderen Wechselkursen umgerechnet als die Schadenstände bzw. -zuwächse. Zusätzlich zu den angesprochenen Verzerrungen ist damit auch die Aussagekraft der Schadenquoten beeinträchtigt.
- Bei Alternative (C) gibt es diese Probleme nicht. Alle Werte werden konsistent umskaliert, wie es auch bei einer Skalierung von Einern zu Tausendern der Fall wäre.

(c) *[4 Punkte]* Die Unabhängigkeitsbedingung folgt aus der entsprechenden Aussage für $S_{i,k}$, da nur mit konstanten Faktoren multipliziert wird.

Für die Erwartungswerte gilt nach ILR2

$$\mathrm{E}(\tilde{S}_{i,k}) = \lambda_n \cdot \mathrm{E}(S_{i,k}) = \lambda_n \cdot m_k \cdot v_i = \tilde{m}_k \cdot \tilde{v}_i$$

mit $\tilde{m}_k = m_k$ und für die Varianz folgt nach ILR3

$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_{i,k}) = \lambda_n^2 \cdot \mathrm{Var}(S_{i,k}) = \lambda_n^2 \cdot s_k^2 \cdot v_i = \tilde{s}_k^2 \cdot \tilde{v}_i$$

mit $\tilde{s}_k^2 = \lambda_n \cdot s_k^2$.

(d) *[3 Punkte]* Die Unabhängigkeitsbedingung folgt wieder direkt aus der entsprechenden Annahme für $S_{i,k}$ und $T_{i,k}$.

Für die Erwartungswerte gilt

$$\mathrm{E}(S_{i,k} + T_{i,k}) = \mathrm{E}(S_{i,k}) + \mathrm{E}(T_{i,k}) = m_k \cdot (v_i + w_i).$$

Für die Varianz folgt aufgrund der Unabhängigkeit

$$\mathrm{Var}(S_{i,k} + T_{i,k}) = \mathrm{Var}(S_{i,k}) + \mathrm{Var}(T_{i,k}) = s_k^2 \cdot (v_i + w_i).$$

Damit folgt die Behauptung mit Zuwachsquoten m_k und Varianzparametern s_k^2.

(e) *[6 Punkte]* Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme ist

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_i^C + \widehat{R}_i^D\right) = \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_i^C\right) + \mathrm{Var}\left(\widehat{R}_i^D\right).$$

Nach Skript oder mit kurzer Rechnung gilt

$$\mathrm{Var}(\widehat{R}_i^C) = \left(\mathrm{Var}(\widehat{m}_{n-i+2}^C) + \ldots + \mathrm{Var}(\widehat{m}_u^C)\right) \cdot v_i^2 = \sum_{k=n-i+2}^{u} \frac{v_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j} \cdot s_k^2$$

und

$$\mathrm{Var}(\widehat{R}_i^D) = \sum_{k=n-i+2}^{u} \frac{w_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} w_j} \cdot s_k^2$$

sowie

$$\mathrm{Var}(\widehat{R}_i^{C+D}) = \sum_{k=n-i+2}^{u} \frac{(v_i + w_i)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j + w_j} \cdot s_k^2.$$

Damit folgt die Behauptung sofort aus

$$\frac{(v_i + w_i)^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j + w_j} \leq \frac{v_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} v_j} + \frac{w_i^2}{\sum_{j=1}^{n-k+1} w_j}.$$

Die Ungleichung besagt, dass unter den angegebenen Voraussetzungen der Schätzfehler der Reserveschätzung durch die Addition der Abwicklungsdreiecke und Volumenmaße verringert werden kann. In die Praxis übertragen bedeutet dies, dass unabhängige Segmente mit gleicher bzw. „ähnlicher“ Abwicklung zusammengelegt werden sollten.