Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 24. Mai 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko. *[30 Punkte]*

Der zufällige Parameter Θ sei exponentialverteilt mit Parameter $\beta > 0$, d.h. habe die Dichte $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Gegeben den Wert θ von Θ, habe die Schadengröße X die Dichte

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x),$$

also die Verteilungsfunktion $F(x|\theta) = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0$.

(a) *[8 Punkte]* Sei $\alpha \in (0,1)$. Bestimmen Sie die Risikomaße $VaR_\alpha(X|\Theta = \theta)$ und $ES_\alpha(X|\Theta = \theta)$ der bedingten Verteilung von X, gegeben den Parameterwert θ.

Hinweis. $\int (\ln(z))^2\, dz = z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z$

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung $x_1 \in \mathbb{R}^+$ von X, sowie die Randdichte von X.

Hinweis. Die Gamma-Verteilung mit den Parametern $a, b > 0$ hat die Dichte

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta),$$

und es gilt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) *[14 Punkte]* Aus dem korrekten Ergebnis von Teil b) ergibt sich iterativ die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

Die Vorhersageverteilung hat den Erwartungswert $\mathbb{E}(X|x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

(i) *[2 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Value at Risk $VaR_\alpha^{(n)}$ der Vorhersageverteilung von $X \mid x_1, x_2, \ldots, x_n$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegeben ist durch

$$VaR_\alpha(X \mid x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2.$$

(ii) *[6 Punkte]* Quantifizieren Sie das Parameterrisiko, das bei der Schätzung des Value at Risk unter Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers auf Basis der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsteht.

(iii) *[6 Punkte]* Die Analyse des asymptotischen Verhaltens für $n \to \infty$ führt auf folgende Ergebnisse:

- Die Varianz der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen 0.
- Der Erwartungswert der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$.

Erklären Sie die asymptotischen Resultate. Überlegen Sie sich insbesondere dazu, welches Risikomaß welcher Größe der Grenzwert

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$$

darstellt.

Aufgabe 2. Risikomaße und Extremwerttheorie. *[23 Punkte]*

Die Schadengröße X habe die Verteilungsfunktion

$$F_{a,b}(x) = 1 - \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{-\frac{1}{a}}, \quad x \geq 0,$$

mit den Parametern $a \in (0,1)$ und $b > 0$.

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von X zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, wobei $a > 0$ und $b > 1$ gilt.

(b) *[6 Punkte]* Berechnen Sie das asymptotische Verhältnis von ES zu VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

und diskutieren einen möglichen Nutzen dieser Relation für die Bestimmung des Risikokapitals.

(c) *[12 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen hat bisher seine jährlichen Verluste X aus operationalen Risiken mit Hilfe der Lognormalverteilung mit den Parametern $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 4$ modelliert. Analysen des Risikomanagements haben ergeben, dass diese Verteilung im Bereich der Schadenhöhen normaler Jahre angemessen ist, aber Zweifel aufgeworfen, ob extreme Verluste, wie sie in selten eintretenden Krisenjahren auftreten, durch den Verlauf des Tails der Verteilungsfunktion hinreichend erfasst werden.

Ein Workshop mit den Risk Ownern gelangt zu der Einschätzung, dass ein Krisenjahr durch das Überschreiten des Schadens über die Schwelle $u = 35.52$ charakterisiert wird. Gemäß der bisher verwendeten Verteilung tritt ein solches Krisenjahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K) = 0.1$ ein. Die Experten halten diese Eintrittswahrscheinlichkeit für vernünftig und schätzen, dass der mittlere Verlust in einem Krisenjahr 100 beträgt. Der Risikomanager verfolgt zwei Ansätze, das Ergebnis des Workshops in die Verteilung von X mit einzubinden.

A) Modellierung mit der Verteilungsfunktion

$$G(x) := \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) & ; \quad 0 \leq x \leq 35.52, \\ 0.9 + 0.1 \cdot F_{a,b}(x - 35.52); & \quad x \geq 35.52, \end{cases}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

B) Modellierung mit der Verteilungsfunktion

$$H(x) = 0.9 \cdot \Phi\left(\frac{\ln(x) - 1}{2}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2 + x}\right)^{b_2}\right)$$

Sie können die folgenden Eigenschaften ohne Nachweis verwenden:

- Für die Verteilung mit der Verteilungsfunktion $F_{a,b}$ gilt:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = F_{a,b+au}(y)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{1-a}$
- Für die Pareto-Verteilung mit der Verteilungsfunktion $x \mapsto 1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}$ gilt:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a_2+u)^{b_2}}{(a_2+u+y)^{b_2}}$, $y \geq 0$
  - $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a_2+u}{b_2-1}$

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Motivation der beiden Ansätze A) und B).

(ii) *[8 Punkte]*

- *[4 Punkte]* Vergleichen und beurteilen Sie die beiden Ansätze A) und B).
- *[4 Punkte]* Entwerfen Sie einen Vorschlag zur Umsetzung beider Vorschläge. Gehen Sie dabei auch darauf ein, ob und, wenn ja, welche Informationen Sie von den Workshopteilnehmern für die Umsetzung benötigen.

Aufgabe 3. Zinsmodelle. *[22 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $P(0,S) > P(0,T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ für $0 < T < S$ gilt, wobei $P(0,T)$ bzw. $F(0,T,S)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zur Zeit 0 bzw. die Forward-Rate für die künftige Periode $[T,S]$ zum Zeitpunkt 0 bezeichnen. Entwickeln Sie eine Arbitrage-Strategie.

(b) *[8 Punkte]* Seien $F(t,T,S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T \geq t$ und Fälligkeit $S > T$ und $L(T,S)$ der einfache Kassazins zum Zeitpunkt T für die Periode $[T,S]$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem S-forward-Maß Q^S bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

(c) *[5 Punkte]* Erklären Sie die grundlegende Idee hinter der Black 76 Formel für ein Caplet. In welchem Modellrahmen kann diese Idee mathematisch sauber implementiert werden? Diskutieren Sie Stärken dieses Modellrahmens im Vergleich zur klassischen Black 76 Formel.

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas. *[30 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1, \dots, L_d$. Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit $\mathrm{EC}_1, \dots, \mathrm{EC}_d$ bezeichnet.

(a) *[9 Punkte]* Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.

(b) Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass L_2 log-normal verteilt ist mit Parametern μ_2, σ_2^2, d.h. $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden. Dabei entscheidet dass Risikomanagement, ein Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) zu wählen.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie für einen fixen Parameter ρ die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im Meta Gauss Modell an.

(ii) *[6 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Normalverteilung erzeugt. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisation $(L_1, L_2)'$ generiert, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.

(c) Ein wesentlicher Punkt bei der Verwendung des in (b) skizzierten Meta Gauss Modells ist die Bestimmung des Parameters ρ der Gauss copula.

(i) *[7 Punkte]* Welche Abhängigkeitsstruktur erhält man im Fall $\rho = 0$ und $\rho = 1$?. Sind L_1 und L_2 im Fall $\rho = 1$ perfekt korreliert? Geben Sie für den Fall $\rho = 1$ den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$ an. Begründen Sie Ihre Antworten.

(ii) *[5 Punkte]* Sie haben die folgenden 5 Beobachtungen von L_1 und L_2 zur Verfügung.

data point	1	2	3	4	5
L_1	0.13	0.16	0.81	0.17	0.66
L_2	0.81	0.42	0.94	0.92	0.78

Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für den Korrelationsparameter ρ von C_ρ^{Ga}.

Aufgabe 5. Counterparty Risk. *[20 Punkte]*

Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt t aus Sicht von B sei mit V_t bezeichnet; die Fälligkeit sei T. (Beispiele für einen derartigen Vertrag sind credit default swaps und Rückversicherungsverträge).

(a) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, was man in diesem Zusammenhang unter counterparty risk versteht und diskutieren Sie kurz zwei verschiedene Techniken zum Management dieser Risikokategorie.

(b) In der oben skizzierten Situation ist die Bewertungskorrektur für den Vertrag aus Sicht des protection buyers B durch

$$\mathrm{CVA} = \delta_S \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S < T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\big)$$

gegeben. Hier ist $r \geq 0$ der risikofreie Zinssatz, τ_S die Ausfallzeit und und δ_S der loss given default von S.

(i) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass δ_S deterministisch ist und dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen das CVA durch

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei f_S die Dichte der Ausfallzeit τ_S bezeichnet.

(ii) *[5 Punkte]* Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $E^Q(V_t^+)$ konstant gleich 100 und τ_S unter Q exponentialverteilt mit Parameter γ_S ist. Kann der Parameter γ_S aus am Markt beobachteten CDS spreads auf S kalibriert werden?

(iii) *[4 Punkte]* Bei der Herleitung der Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Diskutieren Sie am Beispiel eines Rückversicherungsvertrags, warum die bei der Herleitung von der Formel für $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ gemachte Unabhängigkeitsannahme in der Praxis problematisch sein kann.

Aufgabe 6. Portfolio Credit Risk. *[25 Punkte]*

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der Versicherungen gegen den Ausfall von Konsumentenkrediten anbietet. Das Versicherungsportfolio umfasst m Verträge gegen den Ausfall von m verschiedenen Krediten mit Ausfallsindikatoren $Y^1, \ldots, Y^m$. Falls der i-te Kredit ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e_i. Wir nehmen im folgenden an, dass e_i deterministisch ist. Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Kreditversicherungsgeschäft verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle der m Kredite zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,. \tag{1}$$

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen der Kredite erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (1) an.

(b) *[8 Punkte]* Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$,die Kovarianz $c_{ij} = \mathrm{cov}(Y^i, Y^j)$ und die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.

(c) *[6 Punkte]* Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Simulation einer Realisierung von $L = \sum_{i=1}^m e_i Y^i$. Dabei steht Ihnen ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der sowohl normalverteilte als auch Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen erzeugen kann.

(d) *[8 Punkte]* Nehmen Sie im folgenden an, dass das Modell homogen ist ($\mu_i \equiv \mu, e_i \equiv e$) und definieren Sie die Mischvariable $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$. Für großes m gilt

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{2}$$

Erläutern Sie die Herleitung dieser Formel und benutzen Sie (2), um approximativ $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$. zu berechnen. Wie wirkt sich für $\alpha > 0.5$ ein höheres σ auf $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ aus?

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. *[30 Punkte]* Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern a, b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Sei ferner λ der Marktpreis des Risikos. Dann folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q \quad \text{(RN)}$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$ mit deterministischen Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t)\right)$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t,T)$ und $B_\lambda(t,T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $a_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

(a) *[10 Punkte]* Zur Bedeckung einer Zahlungsverpflichtung der Höhe S, die zum Zeitpunkt 2 fällig wird, hat ein Unternehmen den Marktwert dieser Verpflichtung zum Zeitpunkt 0 in einen Zerobond mit Fälligkeit 1 investiert. Ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 den Marktwert der Zahlungsverpflichtung bedecken zu können.

(b) *[20 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen hat ein Kollektiv von N gleichaltrigen Personen, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe S mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 2 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, den Fälligkeitszeitpunkt zu erleben, beträgt p. Nehmen Sie an, dass Sterblichkeiten und Zinsraten unabhängig sind.

   (i) *[2 Punkte]* Geben Sie den stochastischen Barwert $PV(0)$ der versicherungstechnischen Verpflichtungen zum Zeitpunkt 0 in Abhängigkeit von der zufälligen Anzahl der Überlebenden und der zufälligen Entwicklung der Short-Rate an.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungswert von $PV(0)$ unter dem realen und dem risikoneutralen Maß. Welcher Erwartungswert ist der Marktwert M der Verpflichtungen?

(iii) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie die Varianz von $PV(0)$ unter dem realen Maß. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten $\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right)$ und geben dafür eine ökonomische Erklärung an.

Hinweis. Für quadratintegrierbare Zufallsgrößen X, Y gilt

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)).$$

(iv) *[5 Punkte]* Das Versicherungsunternehmen investiert den Marktwert M der Verbindlichkeiten in ein Bankkonto, das sich gemäß dem Vasicek-Modell entwickelt. Schlagen Sie eine Strategie zur Reduktion des Zinsrisikos vor und erörtern dabei qualitativ die Frage, ob sich das Zinsrisiko vollständig eliminieren lässt.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko.

(a) Die Verteilungsfunktion von X, gegeben den Parameterwert θ erhält man durch Integration der Dichte.

$$F(x|\theta) = \int_0^x \frac{\theta}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right) dy = \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$$

Auflösen der Gleichung $1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) = \alpha$ liefert den Value at Risk.

$$VaR_\alpha(X|\Theta = \theta) = \left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)^2$$

Gemäß der Definition des Expected Shortfall erhalten wir

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X|\Theta=\theta) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(1-z)}{\theta}\right)^2 dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha}\left(\frac{\ln(z)}{\theta}\right)^2 dz \\ &= \frac{1}{\theta^2(1-\alpha)}\left(z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z\right)\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left((\ln(1-\alpha))^2 - 2\ln(1-\alpha) + 2\right). \end{aligned}$$

(b) Die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_1, ergibt sich modulo konstanter Terme zu

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von Gamma$(2, \beta + \sqrt{x_1})$. Folglich gilt

$$\pi(\theta|x_1) = (\beta+\sqrt{x_1})^2\cdot\theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Die Randdichte $m(x)$ von X erhalten wir als Quotient von gemeinsamer Dichte und a posteriori Dichte:

$$m(x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\cdot(\beta+\sqrt{x})^{-2}.$$

(c) (i) Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(VaR_\alpha^{(n)}\,|\,x_,\ldots,x_n) &= 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}+\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\right)^{n+1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(ii) Nullsetzen der Ableitung der Dichte

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta^n}{2\prod_{i=1}^n \sqrt{x_i}}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)}{2\prod_{i=1}^n \sqrt{x_i}}\cdot\left(n\theta^{n-1}-\theta^n\cdot\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right) \end{aligned}$$

liefert den ML-Schätzer $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

Da die Vorhersageverteilung die Unsicherheit bezüglich des Parameters einbezieht, kann das Parameterrisiko durch die Differenz

$$\begin{aligned} & VaR_\alpha(X|x_1,\dots,x_n) - VaR_\alpha(X|\Theta=\hat{\theta}) \\ &= \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \\ &= \left(\beta+\frac{n}{\hat{\theta}}\right)^2\cdot\left((1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}}-1\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \end{aligned}$$

quantifiziert werden.

(iii) Der Grenzwert $VaR_\alpha^{(\infty)} := \left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ ist der Value at Risk der Beobachtungsverteilung zum Niveau α unter der Voraussetzung, dass θ der richtige Parameterwert ist. Dies überprüft man leicht durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Beobachtungsverteilung

$$F(x|\theta) = 1-\exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Mit jeder Beobachtung wächst die Information über den Parameter Θ an. Im Grenzübergang $n\to\infty$ besteht keine Parameterunsicherheit mehr. Die Varianz der a posteriori Verteilung verschwindet, so dass der Parameter gleich dem Grenzwert des Erwartungswertes der a posteriori Verteilung, d.h. $\Theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$ ist. Daher konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung $VaR_\alpha^{(n)}$ gegen den Value at Risk $VaR_\alpha^{(\infty)}$ der Beobachtungsverteilung, gegeben $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Wir führen noch den Nachweis der angegebenen Resultate, der *nicht Bestandteil der Aufgabenstellung* ist.

Die Randverteilungsfunktion F von X ergibt sich durch Integration der Dichte m aus b):

$$F(x) = 1-\left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right).$$

Wie die Randverteilungsdichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a priori Dichte entsteht, so entsteht die Vorhersagedichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung, indem wir in der Randverteilungsfunktion die Parameter der a priori Verteilung durch diejenigen der a posteriori Verteilung ersetzen:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta + \sqrt{x_1}}{\beta + \sqrt{x_1} + \sqrt{x}}\right)^2.$$

Iterativ ergibt sich die Vorhersageverteilung auf Basis von n Beobachtungen

$$F(x|x_1,\dots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{n+1}.$$

Mit dem Gesetz der großen Zahl beobachten wir die Konvergenz der Erwartungswerte der a posteriori Verteilung

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\dots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$$

und die Konvergenz der Varianzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\dots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich konvergieren die a posteriori Verteilungen von $\Theta|x_1,\dots,x_n$ gegen das Dirac-Maß im Punkt $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Für $n \to \infty$ konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(X|x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\alpha)\right)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Risikomaße und Extremwerttheorie.

(a) Auflösen der Gleichung $1 - \left(1 + \frac{\alpha x}{b}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \alpha$ nach x führt auf den Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \frac{b}{a}\left((1-\alpha)^{-a} - 1\right).$$

Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\frac{b}{a}\int_\alpha^1 \left((1-z)^{-a}-1\right)dz \\
&= -\frac{b}{a(1-a)(1-\alpha)}\left[(1-z)^{-a+1}\right]_\alpha^1 - \frac{b}{a} \\
&= \frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a} - \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

(b) Da $(1-\alpha)^{-a}$ für $\alpha \to 1$ gegen unendlich konvergiert, gilt

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a}}{\frac{b}{a}(1-\alpha)^{-a}} = \frac{1}{1-a}.$$

Für heavy-tailed Verteilungen kann der Value at Risk in Simulationen stabiler geschätzt werden als der Expected Shortfall, der empfindlich auf Ausreißer reagiert. Für hohe Niveaus kann somit dieses Resultat genutzt werden, um den Expected Shortfall mit Hilfe eines per Simulation bestimmten Wertes des Value at Risk zu schätzen.

(c) (i) Ansatz A) behält die bisher verwendete Lognormalverteilung bis zur Schwelle $u = 35.52$, d.h. bis zum 0.9-Quantil bei. Um das Auftreten extremer Schäden besser zu abzubilden, korrigiert Ansatz A) jedoch die Modellierung des Tails, d.h. hier des Bereichs der 10 Prozent größten Werte, indem die Überschreitung der Schwelle durch eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung beschrieben (GPD) wird.

Ansatz B) stellt eine Mischung der Verteilungsfunktionen für ein normales Jahr und für ein Krisenjahr dar:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X \le x \mid \bar{K}) + \mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X \le x \mid K) \\
&= 0.9\cdot\Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) + 0.1\cdot\left(1-\left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right),
\end{aligned}$$

wobei ein normales Jahr durch die bisherige Lognormal-Verteilung mit den Parametern 1 und 4 beschrieben wird, die sich in Normaljahren bewährt hat, während ein Krisenjahr durch eine neu zu kalibrierende Paretoverteilung auf Basis der Workshopergebnisse modelliert wird.

(ii) Ansatz A) geht davon aus, dass die in Krisenjahren beobachteten Unzulänglichkeiten auf eine unzulängliche Modellierung des Tails durch die Lognormalverteilung zurückzuführen ist. In der Extremwerttheorie liegt die

Lognormalverteilung im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung und wird in Ansatz A) im Tail durch eine GPD ersetzt, die zu dem Fréchet-Fall mit langsamer abfallenden Tailfunktionen gehört. Die in Normaljahren bewährte Lognormalverteilung wird bis zur Schwelle $u = 35.52$ unverändert beibehalten.

Ansatz B) greift hingegen den zeitlichen Aspekt auf, dass sich Normaljahre und Krisenjahre abwechseln und mischt die bisherige Lognormalverteilung mit einer GPD gemäß den Eintrittswahrscheinlichkeiten. Dadurch wird die Modellierung auch im Bereich der Schäden unterhalb der Schwelle $u = 35.52$ verändert. In der Modellierung des Tailverhaltens überwiegt durch die Mischungswahrscheinlichkeiten der Einfluss der bisher verwendeten Lognormalverteilung.

Für die Entscheidung zwischen beiden Ansätzen sollte der Schadenverlauf in Krisenjahren unter- und oberhalb der Schwelle genauer untersucht bzw. dazu weitere Experteninformationen eingeholt werden.

In beiden Ansätzen sind zwei Parameter zu bestimmen. Neben der Information über die mittlere Überschreibung $e(35.52) = 100 - 35.52 = 64.48$ wird eine weitere Bedingung benötigt. Die Teilnehmer könnten beispielsweise gefragt werden, für wie wahrscheinlich sie die Überschreitung der Schwelle $2 \cdot 35.52 = 71.04$ in einem Krisenjahr halten. Damit kann die Information $\mathbb{P}(X > 2 \cdot 35.52 \mid X > 35.52)$ in beiden Ansätzen genutzt werden.

Aufgabe 3. Zinsmodelle.

(a) Zur Zeit $t = 0$ verkaufe $\frac{P(0,T)}{P(0,S)}$ Zerobonds mit Fälligkeit S und kaufe 1 Zerobond mit Fälligkeit T, so dass keine Zahlung fällig wird. Schließe darüber hinaus einen Receiver Swap mit Strike $K = F(0, T, S)$ und Nominal 1 kostenlos ab. Zur Zeit T wird die Zahlung 1 des fälligen Zerobonds in $\frac{1}{P(T,S)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit S investiert. Zur Zeit S ist die resultierende Zahlung gegeben durch

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + (S-T)\cdot F(0,T,S) - (S-T)\cdot L(T,S)\\ > \quad & \frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + \left(\frac{P(0,T)}{P(0,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0.\end{aligned}$$

Dies bedeutet einen strikt positiven Gewinn ohne Verlustrisiko.

(b) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß Q^S. Unter Beachtung von $L(T,S) = F(T,T,S)$ erhalten wir damit

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = \mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

Zur Zeit $u \le T$ stellt die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ dar.

(c) Die grundlegende Idee der Black 76 Formel für Caplets besteht darin, die Forward-Rate $F(u,T,S)$, $0 \le u \le T$, mit einer stochastischen Differentialgleichung vom Black-Scholes Typ

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \le u \le T,$$

bezüglich einer Brownschen Bewegung W zu modellieren und die Black-Scholes Formel für Call-Optionen zu übertragen.

Dieser Ansatz wird mathematisch rigoros in der Theorie der LIBOR-Marktmodelle umgesetzt. Jene Modelle ermöglichen es, zeitabhängige und stochastische Volatilitäten abzubilden, und verbessern somit die Kalibrierung an Marktpreise von Zinsderivaten.

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas.

(a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht principles based, keine Berücksichtigung von Diversifikation.
- Correlation adjusted summations $\mathrm{EC} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \, \mathrm{EC}_i \, \mathrm{EC}_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteile: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.
- Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteile: Modellrisiko bei Wahl der copula und bei Kalibrierung der copula Parameter, schwer zu kommunizieren.

- Structural Models (factor based) Vorteile: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht sehr intuitiv. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.

(b) (i) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(\ell_1,\ell_2) = C_\rho^{\mathrm{Ga}}\Big(\phi((\ell_1-\mu_1)/\sigma_1), \phi((\log\ell_2-\mu_2)/\sigma_2)\Big)$.

(ii) Schritt 1: Konstruktion von korrelierten normalverteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $x_1 = z_1$, $x_2 = \rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2$.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1,u_2) \sim C_\rho^{Ga}$: Setze $(u_1,u_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2 ist durch $u \mapsto \exp(\sigma\phi^{-1}(u)+\mu)$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\ell_1,\ell_2) = \left(\mu_1+\sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\left(\mu_2+\sigma_2\phi^{-1}(u_2)\right)\right)$$

die gewünschten Realisierungen.

(c) (i) Für $\rho = 0$ erhält man Unabhängigkeit, für $\rho = 1$ Komonotonie. L_1 und L_2 sind nicht vom gleichen Typ und daher im Fall $\rho = 1$ nicht perfekt korreliert (aber ihre Korrelation ist maximal). Wegen der Komonotonie gilt für $\rho = 1$ dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1+L_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) = \mu_1+\sigma_1\phi^{-1}(u_1)+\exp(\sigma_2\phi^{-1}(\alpha)+\mu_2)\,.$$

(ii) Man erhält für Kendalls tau, dass $\hat\rho_\tau = 0.4$ und somit $\hat\rho = \sin(\frac{\pi}{2}\hat\rho_\tau) = 0.59$.

Aufgabe 5. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk ist das Risiko, dass einer der Vertragsparteien, beispielsweise S vor Fälligkeit des Vertrags ausfällt; falls der Vertrag im Ausfallszeitpunkt τ_S aus Sicht von B einen positiven Wert hat, so erleidet B einen Verlust. Mögliche Ansätze zum Management von counterparty risk: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

(b) (i) Es gilt

$$\mathrm{CVA} = \delta_S E^Q\left(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\right) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t)dt$$

Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ und somit die Behauptung.

(ii) Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100 \gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\
&= 100 \delta_S \gamma_S \Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t} \Big]_0^T \\
&= \frac{100 \delta_S \gamma_S}{r+\gamma_S} \Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T} \Big)
\end{aligned}
$$

(iii) Die Unabhängigkeitsannahme ist problematisch. Falls S ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophennereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

Aufgabe 6. Portfolio Credit Risk

(a) Abhängigkeit ensteht insbesondere dadurch, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit von unterschiedlichen Konsumentenkrediten stark durch die wirtschaftliche Entwicklung (insbesondere auch Arbeitslosigkeit) getrieben wird. Diese Phänomen wird durch die Zufallsvariable ψ modelliert, die alle Ausfallswahrscheinlichkeiten treibt.

(b) Es gilt $\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\, dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Für die Kovarianz gilt

$$
\mathrm{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}^i \bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\, dx - \bar{p}_i \bar{p}_j \,.
$$

Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall berechnet sich zu

$$
\sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x) \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (1 - \phi(\mu_j + \sigma x))\, \varphi(x)\, dx
$$

(c) Zur Erzeugung einer Realisierung von $Y^1, \ldots, Y^m$ generiert man zunächst $\psi \sim N(0,1)$ und dann m unabhängige Bernoulli- Zufallsvariablen $Y^1, \ldots, Y^m$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_i(\psi)$. Der zugehörige Verlust ergibt sich dann als $L = \sum_{i=1}^{m} e_i Y^i$.

(d) Gegeben $Q = q$ sind die Ausfallindikatoren Y_i unabhängig mit Mittelwert q; nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt also, dass gegeben $Q = q$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L^{(m)}}{m} = eq,$$

oder $L^{(m)} \approx meQ$. Hieraus ergibt sich die Formel. Die Formel zeigt direkt, dass der tail der Verteilung der Anzahl an Ausfällen proportional zum tail von Q ist, so dass der tail von Q der wesentliche Risikotreiber ist. Wir erhalten unter Verwendung von (2) dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx em\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) = \mathrm{VaR}_\alpha(Q)\phi(\mu + \sigma\phi^{-1}\alpha);$$

für $\alpha > 0.5$ ist $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ ist somit wachsend in σ.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) Der stochastische Barwert der Verpflichtung zur Zeit t ist gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot D(t, 2).$$

Zum Zeitpunkt 0 wird der Betrag

$$M = \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot \exp\left(-A_\lambda(0, 2) - B_\lambda(0, 2) \cdot r(0)\right)$$

in den Zerobond mit Fälligkeit 1 investiert.

Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verpflichtung zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(a(1)) + \sqrt{b(1)} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verpflichtung unter dem risikoneutralen Maß

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q\left(PV(1) \mid r_{0.05}(1)\right) \\ &= S \cdot \exp\left(-A_\lambda(1, 2) - B_\lambda(1, 2) \cdot r_{0.05}(1)\right). \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verpflichtung mit Wahrscheinlichkeit 0.95 zusammen mit der Auszahlung $\frac{M}{P(0,1)}$ des Zerobonds puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) = \left(MV_{0.95}(1) - \frac{M}{P(0, 1)}\right) \cdot P(0, 1) = MV_{0.95}(1) \cdot P(0, 1) - M$$

mit dem Zerobondpreis $P(0, 1) = \exp(-A_\lambda(0, 1) - B_\lambda(0, 1) \cdot r(0))$ zu stellen.

(b) (i) Der stochastische Barwert der versicherungstechnischen Verpflichtungen zur Zeit 0 ist gegeben durch

$$PV(0) = S \cdot L \cdot D(0,2),$$

wobei L die zufällige Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt 2 angibt.

(ii) Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} M &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,2) - B_\lambda(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

Der Erwartungswert unter dem realen Maß ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(PV(0)) &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

(iii) Durch Bedingen auf die Anzahl L der Überlebenden berechnen wir

$$\begin{aligned} Var(PV(0)) &= \mathbb{E}(Var(PV(0)|L)) + Var(\mathbb{E}(PV(0)|L)) \\ &= \mathbb{E}(S^2 \cdot L^2 \cdot Var(D(0,2))) + Var(S \cdot L \cdot \mathbb{E}(D(0,2))) \\ &= S^2 \cdot \mathbb{E}(L^2) \cdot Var(D(0,2)) + S^2 \cdot Var(L) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \left(\mathbb{E}(D(0,2)^2) - (\mathbb{E}(D(0,2)))^2\right) \\ &\quad + S^2 \cdot N \cdot p(1-p) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) \\ &\quad - S^2 \cdot N^2 p^2 \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} A(0,2) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(2 - B(0,2)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,2)^2 \\ B(0,2) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

berechnen wir

$$\mathbb{E}(D(0,2)) = \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right).$$

Wegen $D(0,2)^2 = \exp\left(-\int_0^2 2r(u)\,du\right)$ liefert eine analoge Rechnung mit den Koeffizienten a, $2b$ und 2σ

$$\mathbb{E}(D(0,2)^2) = \exp\left(-A_{a,2b,2\sigma}(0,2) - B_{a,2b,2\sigma}(0,2) \cdot 2r(0)\right).$$

Für die Varianz des Barwerts pro Vertrag erhalten wir im Grenzübergang $N \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} Var(PV(0))\\
&= S^2 \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{(N\cdot p(1-p) + N^2p^2)\cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) - N^2p^2\cdot(\mathbb{E}(D(0,2)))^2}{N^2}\\
&= S^2\cdot p^2 \cdot \mathbf{Var(D(0,2))}.
\end{aligned}$$

Der gemeinsame Risikofaktor Zins steht dem Pooling-Effekt entgegen.

(iv) Eine Möglichkeit besteht darin, einen Receiver-Swap mit dem Nominal $N\cdot S\cdot p$ und der Swap-Rate $S_{0,T}$ kostenlos abzuschließen. Wegen der stochastischen Entwicklung des Bankkontos und der stochastischen Entwicklung der Anzahl der Überlebenden wird dabei das Zinsrisiko jedoch nicht vollständig eliminiert.

Trotz der Unabhängigkeit von Biometrie und Sterblichkeit lässt sich das Zinsrisiko durch Zinsderivate nicht perfekt hedgen, da der Absicherungsbedarf vom Verlauf der Anzahl der Überlebenden abhängig ist.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.1
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

24 May 2022

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 11 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Please enter your answers only in the designated sheets.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk. *[30 points]*

Suppose that the random parameter Θ follows the exponential distribution with parameter $\beta > 0$, i.e. has the density $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Assume that, given the value θ of Θ, the loss variable X has the density

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

and thus, the cumulative distribution function $F(x|\theta) = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0$.

(a) *[8 points]* Let $\alpha \in (0,1)$. Determine the risk measures Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ and Expected Shortfall $\mathrm{ES}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ of the conditional distribution of X, given the value θ of the parameter.

Hint. $\int (\ln(z))^2\, dz = z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z$

(b) *[8 points]* Determine the posterior density of Θ, given the observation $x_1 \in \mathbb{R}^+$ of X as well as the marginal density of X.

Hint. The Gamma-distribution with parameters $a, b > 0$ has the density

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \theta^{a-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$$

and it holds that $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) *[14 points]* By iteration, the correct result from part b) gives rise to the following cumulative distribution function of X, given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

The expected value of this predictive distribution is given by $\mathbb{E}(X|x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

(i) *[2 points]* Verify that the Value at Risk $VaR_\alpha^{(n)}$ of the predictive distribution of $X \mid x_1, x_2, \ldots, x_n$ at the confidence level $\alpha \in (0,1)$, is given by

$$VaR_\alpha(X \mid x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2.$$

(ii) *[6 points]* Quantify the parameter risk that materializes when the Value at Risk is estimated by using the maximum-likelihood estimator based on the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(iii) *[6 points]* Analysing the asymptotic behaviour when $n \to \infty$ we observe the following results:

- The variance of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to 0.
- The expected value of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- It holds that $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$.

Explain these asymptotic results. To this end, reflect which risk measure of which variable takes the value of the limit

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2 .$$

Question 2. Risk Measures and Extreme Value Theory. *[23 points]*

Suppose that the claim size X has the cumulative distribution function

$$F_{a,b}(x) = 1 - \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{-\frac{1}{a}}, \quad x \geq 0,$$

with parameters $a \in (0,1)$ and $b > 0$.

(a) *[5 points]* Determine Value at Risk and Expected Shortfall of X at the confidence level $\alpha \in (0,1)$, where $a > 0$ and $b > 1$.

(b) *[6 points]* Compute the asymptotic ratio of Expected Shortfall and Value at Risk,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

and discuss how this ratio could be useful for determining risk capital.

(c) *[12 points]* An insurance company has been modeling its yearly losses X due to operational risks by means of the lognormal distribution with parameters $\mu = 1$ and $\sigma^2 = 4$ so far. Investigations of the risk management function have provided evidence that this distribution fits in well with normal years, but expressed the concern that extreme losses occurring in rare distressed years might not be captured adequately by the tail of this distribution.

A workshop with the risk owners leads to the conclusion that a distressed year is characterized by the losses X exceeding the threshold $u = 35.52$. According to the distribution used up to now, the probability of a year becoming distressed, i.e. $X > 35.52$, is $\mathbb{P}(K) = 0.1$. The experts agree that this probability is reasonable and estimate that the mean loss of a distressed year amounts to 100. The risk manager conceives two approaches to incorporate the results of the workshop into the distribution of X.

A) Model the claim size by means of the cumulative distribution function

$$G(x) := \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) & ; \quad 0 \leq x \leq 35.52, \\ 0.9 + 0.1 \cdot F_{a,b}(x - 35.52); & x \geq 35.52, \end{cases}$$

where Φ denotes the cumulative distribution function of the standard normal distribution.

B) Model the claim size by means of the cumulative distribution function

$$H(x) = 0.9 \cdot \Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2 + x}\right)^{b_2}\right).$$

You may use the following properties without proof:

- If X has the cumulative distribution function $F_{a,b}$, then:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = F_{a,b+au}(y)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{1-a}$
- For the Pareto-distribution with the cumulative distribution function $x \mapsto 1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}$, it holds that:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a_2+u)^{b_2}}{(a_2+u+y)^{b_2}}$, $y \geq 0$
  - $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a_2+u}{b_2-1}$

(i) *[4 points]* Explain the motivation of the two approaches A) and B).

(ii) *[8 points]*

- *[4 points]* Compare and assess the two approaches A) and B).
- *[4 points]* Develop a proposal how to implement the two approaches A) and B). Discuss whether, for implementation, you need further information from the participants of the workshop, and if so, what are the relevant aspects to be clarified.

Question 3. Interest Rate Models. *[22 points]*

(a) *[9 points]* Assume that $P(0,S) > P(0,T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ for some $0 < T < S$, where $P(0,T)$ and $F(0,T,S)$ denote the price of the zero bond with maturity T at time 0 and the forward rate for the future period $[T,S]$ at time 0, respectively. Develop an arbitrage strategy.

(b) *[8 points]* Let $F(t,T,S)$ be the simply-compounded forward rate at time t with expiry time $T \geq t$ and maturity $S > T$ and $L(T,S)$ the simply-compounded spot rate at time T for the period $[T,S]$. Prove

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

where $\mathbb{E}^S$ denotes the expected value under the S-forward measure Q^S. Discuss this result in the special case $t = T$.

(c) *[5 points]* Explain the basic idea underlying the Black 76 formula for a caplet. In which modeling framework can this idea be implemented in a mathematically rigorous way? Discuss strengths of this framework as opposed to the classical Black 76 formula.

Question 4. Risk aggregation and copulas. *[30 points]*

Consider an insurance company with d business units and associated loss variables $L_1, \dots, L_d$. The risk capital of the individual business units is denoted by $\mathrm{EC}_1, \dots, \mathrm{EC}_d$.

(a) *[9 points]* Explain three methods for determining the overall risk capital EC and discuss pros and cons.

(b) For simplicity we consider from now on $d = 2$ business units. Assume that $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and that L_2 follows a log-normal distribution with parameters μ_2, σ_2^2, that is $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. The group risk management team has decided to use the copula approach and a meta Gauss model (i.e. a model based on the Gauss copula C_ρ^{Ga}) for risk aggregation.

  (i) *[3 points]* Give for a fixed parameter ρ the distribution function $F_{\mathbf{L}}$ of $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ in the Meta Gauss model.

  (ii) *[6 points]* You have a random number generator at your disposal that is able to generate independent realisations z_1, z_2 from $N(0,1)$. Develop an algorithm for generating one realisation $(L_1, L_2)' \sim F_{\mathbf{L}}$.

(c) An important point in using a Meta Gauss model is to determine the copula parameters ρ.

  (i) *[7 points]* Explain which dependence structure is obtained in the special cases $\rho = 0$ and $\rho = 1$. Are L_1 and L_2 perfectly correlated for $\rho = 1$? Determine for the case $\rho = 1$ the Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$. Justify your answers.

  (ii) *[5 points]* You have the following 5 observations of L_1 and L_2 at your disposal.

data point	1	2	3	4	5
L_1	0.13	0.16	0.81	0.17	0.66
L_2	0.81	0.42	0.94	0.92	0.78

Compute Kendall's τ and an estimator for the parameter ρ in C_ρ^{Ga}.

Question 5. Counterparty Risk. *[20 points]* Two parties S and B have agreed on a contractual arrangement where the protection seller S offers the protection buyer B protection against some adverse event in return for premium payments. Denote by V_t the market value of the contract at time t from the point of view of B; the maturity is denoted by T. (Examples of such an arrangement are credit default swaps and reinsurance contracts).

(a) *[6 points]* Explain what is meant by counterparty risk in this context and discuss briefly two different techniques for managing this risk category.

(b) In the above context the valuation adjustment for the protection buyer B is given by

$$\mathrm{CVA} = \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S}(V_{\tau_S})^+\big).$$

Here $r \geq 0$ is the risk-free interest rate, τ_S and δ^S are the default time and the loss given default of S.

(i) *[5 points]* Assume that δ_S is deterministic and that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Show that under these assumptions the CVA is equal to the simpler expression

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt,$$

where f_S denotes the density of τ_S.

(ii) *[5 points]* Evaluate the formula for the case where $E^Q(V_t^+)$ is constant and equal to 100 and where under Q, τ_S has an exponential distribution with parameter γ_S. Can γ_S be calibrated from the spread of a traded CDS on S?

(iii) *[4 points]* In the derivation of the formula for $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ it is assumed that V_t and the default time τ_S are independent. Discuss the appropriateness of this assumption in the context of a reinsurance contract.

Question 6. Portfolio Credit Risk. *[25 points]*

Consider an insurance company offering insurance against defaults in consumer credits. The insurance portfolio consists of m contracts offering protection against the default of m different credits with default indicators $Y^1, \dots, Y^m$. In case credit i defaults, the insurance company suffers a loss of size e_i. In the sequel we assume that e_i is deterministic.

The insurer uses a probit-normal Bernoulli mixture model, for modelling the joint distribution of the defaults of the m credits (eg. for risk capital purposes). We assume that the conditional default probability takes the form

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ for } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,. \tag{1}$$

(a) *[3 points]* Explain why one expects the defaults to be dependent, and give an intuitive motivation for the model (1).

(b) *[8 points]* Express the default probability $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$, the covariance $c_{ij} = \operatorname{cov}(Y^i, Y^j)$ and the probability that exactly one credit defaults as an integral with respect to the density of ψ.

(c) *[6 points]* Develop an algorithm for generating a realisation of $L = \sum_{i=1}^m e_i Y^i$. For this you have a random number generator at your disposal that can generate normal and Bernoulli random variables.

(d) *[8 points]* Suppose in the sequel that the model is exchangeable ($\mu_i \equiv \mu$, $e_i \equiv e$) and define the mixing variable $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$. For large m it holds that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{2}$$

Explain the derivation of this formula and use (2) to compute an approximation for $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$. What is the impact of a higher σ on $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ for $\alpha > 0.5$?

Question 7. Interest rate risk and term structure models. *[30 points]* The short rate $r(t)$ is supposed to follow the Vasicek model with parameters a, b and σ under the real world measure $\mathbb{P}$:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Further, assume that λ is the market price of risk. Then, under the risk neutral measure $\mathbb{Q}$, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{(RN)}$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Hint. In the Vasicek model, the expected value of the stochastic discounting factor $D(t,T)$ is given by:

- under the **real world measure**:

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A(t,T)$ and $B(t,T)$,

- under the **risk neutral measure**:

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A_\lambda(t,T)$ and $B_\lambda(t,T)$.

Further, the short rate follows a normal distribution:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ with deterministic functions $a(t)$ and $b(t)$ under the **real world measure**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ with deterministic functions $a_\lambda(t)$ and $b_\lambda(t)$ under the **risk neutral measure**.

(a) *[10 points]* In order to cover the obligation to pay the amount S at time 2, a company invests the market value of the obligation in a zero bond with maturity 1. Determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to ensure that the market value of the payment obligation at time 1 can be covered with probability 0.95.

(b) *[20 points]* Consider a portfolio of N insured persons of the same age that hold a paid-up pure endowment policy paying the sum S at time 2. Let p be the probability of survival up to time 2. Assume that mortality and interest rates are independent.

   (i) *[2 points]* State the stochastic present value $PV(0)$ of the insurance liabilities at time 0 as a function of the random number of survivors and the random evolution of the short rate.

(ii) *[3 points]* Determine the expected value of $PV(0)$ under the real world measure and the risk neutral measure. Which of these quantities is the market value M of the liabilities?

(iii) *[10 points]* Determine the variance of $PV(0)$ under the real world measure. Analyze the asymptotic behaviour $\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right)$ and explain the result from an economic perspective.

Hint. For square integrable random variables X, Y it holds that

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)).$$

(iv) *[5 points]* The insurance company invests the market value of liabilities M in a bank account which is assumed to evolve according to the Vasicek model. Develop a strategy to reduce interest rate risk. Using qualitative arguments, discuss whether or not interest rate risk can be eliminated completely.

Proposal for solution

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk.

(a) Integrating the density, we obtain the cumulative distribution function of X, given the value θ of the parameter.

$$F(x|\theta) = \int_0^x \frac{\theta}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right) dy = \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$$

Solving the equation $1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) = \alpha$ yields the Value at Risk.

$$VaR_\alpha(X|\Theta = \theta) = \left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)^2$$

By the definition of Expected Shortfall, we obtain

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X|\Theta=\theta) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(1-z)}{\theta}\right)^2 dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha}\left(\frac{\ln(z)}{\theta}\right)^2 dz \\ &= \frac{1}{\theta^2(1-\alpha)}\left(z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z\right)\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left((\ln(1-\alpha))^2 - 2\ln(1-\alpha) + 2\right). \end{aligned}$$

(b) When calculating the posterior density of Θ, given the observation x_1, we may introduce and delete constants as convenient:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of Gamma$(2, \beta + \sqrt{x_1})$. We conclude that

$$\pi(\theta|x_1) = (\beta+\sqrt{x_1})^2\cdot\theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

The marginal density $m(x)$ of X is the quotient of the joint density and the posterior density:

$$m(x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\cdot(\beta+\sqrt{x})^{-2}.$$

(c) (i) We verify

$$\begin{aligned} F(VaR_\alpha^{(n)}\,|\,x_,\ldots,x_n) &= 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}+\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\right)^{n+1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(ii) Solving

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta^n}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\cdot\left(n\theta^{n-1}-\theta^n\cdot\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)\end{aligned}$$

yields the ML-estimator $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$.

Since the predictive distribution takes into account the uncertainty about the parameter, the parameter risk can be quantified by the difference

$$\begin{aligned} & VaR_\alpha(X|x_1,\dots,x_n)-VaR_\alpha(X|\Theta=\hat{\theta}) \\ &= \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \\ &= \left(\beta+\frac{n}{\hat{\theta}}\right)^2\cdot\left((1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}}-1\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2.\end{aligned}$$

(iii) The limit $VaR_\alpha^{(\infty)} := \left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ is the Value at Risk of the sample distribution at confidence level α provided that θ is the true value of the parameter. This is easily verified by inserting $\left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ into the cumulative distribution function of the sample distribution

$$F(x|\theta)=1-\exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Each observation increases the available information on the parameter Θ. In the limit $n\to\infty$, the variance of the posterior distribution vanishes, i.e. there is no longer any uncertainty about the parameter. Its value is known to be the limit of the expected value of the posterior distribution, i.e. $\Theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$. Therefore, the value at risk of the predictive distribution $VaR_\alpha^{(n)}$ converges to the value at risk $VaR_\alpha^{(\infty)}$ of the sample distribution, given $\theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

We now prove the results stated in this exercise. This proof is *not required* in this exercise.

Integrationg the density m from part b), we obtain the cumulative distribution function F of the marginal distribution of X:

$$F(x)=1-\left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right).$$

In the same way as the marginal density is obtained by averaging the sample density over the prior density, the predictive density is obtained by averaging the sample density over the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta.\end{aligned}$$

Therefore, we get the cumulative distribution function of the predictive distribution by replacing the parameters of the prior distribution in the marginal distribution function by those of the posterior distribution:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta + \sqrt{x_1}}{\beta + \sqrt{x_1} + \sqrt{x}}\right)^2.$$

By iteration, we get the predictive distribution based on n observations:

$$F(x|x_1,\ldots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{n+1}.$$

By the law of large numbers, we observe the following convergence of the expected values of the posterior distribution

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\ldots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$$

and the following convergence of the variances

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consequently, the posterior distributions of $\Theta|x_1,\ldots,x_n$ converge to the Dirac measure in the point $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

For $n \to \infty$, the Value at Risk of the predictive distribution at the confidence level $\alpha \in (0,1)$ converges to

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(X|x_1,\ldots,x_n) &= \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\alpha)\right)^2.
\end{aligned}$$

.

Question 2. Risk Measures and Extreme Value Theory.

(a) Solving the equation $1 - \left(1 + \frac{\alpha x}{b}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \alpha$, we obtain the Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \frac{b}{a}\left((1-\alpha)^{-a} - 1\right).$$

By definition, we compute the Expected Shortfall

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\frac{b}{a}\int_\alpha^1 \left((1-z)^{-a}-1\right)dz \\
&= -\frac{b}{a(1-\alpha)(1-a)}\left[(1-z)^{-a+1}\right]_\alpha^1 - \frac{b}{a} \\
&= \frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a} - \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

(b) Since $(1-\alpha)^{-a}$ tends to infinity when $\alpha \to 1$, it holds that

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a}}{\frac{b}{a}(1-\alpha)^{-a}} = \frac{1}{1-a}\,.$$

For heavy-tailed distributions, the computation of Value at Risk by means of stochastic simulations turns out to be more robust than the computation of Expected Shortfall which is sensitive to outliers. For high confidence levels, we may use this result in order to estimate Expected Shortfall by multiplying the asymptotic ratio with the estimate of Value at Risk obtained through simulations.

(c) (i) Approach A) keeps the lognormal distribution used so far up to the threshold $u = 35.52$, i.e. up to the 0.9-quantile. However, in order to better reflect the impact of extreme claim sizes, Approach A) modifies the model by describing the tail, i.e. the 10% largest claims, through a generalized Pareto-distribution (GPD).

Approach B) relies on a mixture of the distribution functions for a normal year and for a distressed year:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X\le x \mid \bar{K}) + \mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X \le x \mid K) \\
&= 0.9\cdot\Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) + 0.1\cdot\left(1-\left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right),
\end{aligned}$$

where a normal year is described by the lognormal distribution with parameters 1 and 4, which proved to be adequate in normal years, while a distressed year is modeled by a new Pareto-distribution which is calibrated using the results of the workshop.

(ii) Approach A) aims to remedy the observed shortcomings in modeling distressed years by replacing the lognormal distribution with a GPD. In extreme value theory, the lognormal distribution lies in the MDA of the Gumbel distribution whereas GPDs belong to the Fréchet-case characterized by tail functions decreasing more slowly, thus associating higher weights to extreme outcomes. As claims of normal years proved to be adequately modeled by the lognormal distribution Approach A) keeps this distribution up to the threshold $u = 35.52$ without any modification.

Approach B) takes up the temporal aspect that normal years and distressed years take turns and therefore chooses to mix the lognormal distribution used so far and a GPD according to the probabilities of normal and distressed years occurring. By that, the model is also modified below the threshold $u = 35.52$. Another consequence of that mixture is the prevailing influence of the lognormal distribution on the tail behaviour.

In order to decide between the two approaches the claim size distribution should be investigated more closely both above and below the threshold u. Furthermore, expert judgement could be taken into account.

Both approaches require to estimate two parameters. In addition to the given information $e(15.12) = 40 - 15.22 = 24.88$, we need a further condition. For example, the participants might be asked what probability they deem reasonable for the threshold $2 \cdot 35.52 = 71.04$ to be exceeded in a distressed year. Thus, we obtain $\mathbb{P}(X > 2 \cdot 35.52 \mid X > 35.52)$.

Question 3. Interest Rate Models.

(a) At time $t = 0$ sell $\frac{P(0,T)}{P(0,S)}$ zero bonds with maturity S and buy 1 zero bond with maturity T, resulting in a zero net investment. In addition, enter a receiver swap with $K = F(0,T,S)$ and nominal 1 for free. At time T, the payment 1 of the maturing zero bond is invested in $\frac{1}{P(T,S)}$ shares of the zero bond with maturity S. At time 2, the resulting payment is given by

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + (S-T)\cdot F(0,T,S) - (S-T)\cdot L(T,S) \\ > \quad & \frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + \left(\frac{P(0,T)}{P(0,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

i.e. a strictly positive profit without any downside risk.

(b) Since zero coupon bonds are tradable assets, so is the quantity

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S)).$$

Consequently, its discounted price process

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

is a martingale under the forward measure Q^S. Therefore, it holds that

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

In the special $t = T$, this relation takes the form

$$\mathbb{E}^T(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le T < S.$$

because of $F(T,T,S) = L(T,S)$. This shows that, at time $u \le T$, the forward rate $F(u,T,S)$ reflects the available market information on the spot rate of the future period $[T,S]$.

(c) The basic idea of the Black 76 formula for caplets consists in modeling the forward rate $F(u,T,S)$, $0 \le u \le T$ by a Black-Scholes type stochastic differential equation

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \le u \le T$$

with respect to a Brownian motion W and transferring the Black-Scholes formula for call options.

This approach is made mathematically rigorous in the theory of LIBOR market models. Those models allow for time dependent and stochastic volatilities, thus improving the fit to market prices of interest rate derivatives.

Aufgabe 4. Risk aggregation and copulas.

(a) Denote by EC_i the risk capital of subunit i and by EC the overall capital. In this context there are several aggregation rules (3 are sufficient):

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$ Pro: Simple; conservative if a subadditive risk measure is used to compute EC and EC_i. Con: not principles based; does not account for potential diversification.
- Correlation adjusted summations $\mathrm{EC} = \left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\rho_{ij}\,\mathrm{EC}_i\,\mathrm{EC}_j\right)^{\frac{1}{2}}$, where ρ_{ij} is often viewed as correlation between L_i and L_j. Pro: simple; accounts for diversification, albeit in an ad hoc way. Con: In general not principles-based, ρ_{ij} is hard to determine and consistency conditions need to hold
- Copula methods. Pro: Principles based. Con: model risk in choosing the copula and in calibrating the parameters; harder to communicate.
- Structural Models (factor based) Pro: Based on principles, natural from an economic viewpoint. Con. Practical application complex.

(b) (i) According to Sklar's theorem it holds that

$$F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C_\rho^{\mathrm{Ga}}\Big(\phi((\ell_1 - \mu_1)/\sigma_1), \phi((\log \ell_2 - \mu_2)/\sigma_2)\Big).$$

(ii) Step 1: Construct correlated bivariate normal random variables x_1, x_2: Let $x_1 = z_1$, $x_2 = \rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2$.
Step 2: Construction of $(u_1, u_2) \sim C_\rho^{Ga}$: Let $(u_1, u_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))$.
Step 3: The quantile function of a lognormal distribution with parameters μ, σ^2 is given by $u \mapsto \exp(\sigma\phi^{-1}(u) + \mu)$. According to Part 2 of Sklar's theorem, the realisations of $L_1, L_2)$ are then given by

$$(\ell_1, \ell_2) = \left(\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\left(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)\right)\right).$$

(c) (i) For $\rho = 0$ we get independence, for $\rho = 1$ the rvs are comonotonic. L_1 and L_2 are *not* of equal type and hence for $\rho = 1$ they are *not* perfectly correlated. (but their correlation is maximal). Due to comonotonicity we get for $\rho = 1$ that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) = \mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1) + \exp(\sigma_2\phi^{-1}(\alpha) + \mu_2).$$

(ii) One gets for Kendalls tau the value $\hat{\rho}_\tau = 0.4$ and hence $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_\tau) = 0.59$.

Question 5. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk is the risk that one of the contracting parties such as S defaults prior to maturity; if the contract has a positive value for B at τ_S is positive B suffers a loss. Approaches for managing counterparty risk include collateralization; netting; hedging with CDS contracts (provide a brief explanation).

(b) (i) It holds that

$$\text{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Using the independence assumption gives $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ and hence the claim.

(ii) We get

$$\begin{aligned}
\text{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100\gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\
&= 100\delta_S\gamma_S \Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\
&= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)
\end{aligned}$$

The CVA is a valuation adjustment and hence a risk neutral quantity; hence γ_S can be calibrated to market prices such as CDS spreads.

(iii) The independence assumption is problematic. If S is a big reinsurer one would expect that $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$: a default of S could be caused by a major catastrophic event, that affects the payoff of the insurance contract, and a default of S reduces the supply of reinsurance, leading to an increase in the premia for reinsurance contracts (other scenarios possible).

Question 6. Portfolio Credit Risk

(a) Dependence arises in particular due to the fact that the default probability of different consumers is driven largely by the economic environment (in particular the development of the rate of unemployment). This is modelled by the random variable ψ which drives the default probabilities of all credits.

(b) It holds that $\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\, dx$, for φ the density of the standard normal distribution. For the covariance we have

$$\text{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}_i\bar{p}_j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\, dx - \bar{p}_i\bar{p}_j\,.$$

The probability for exactly one default computes to

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\mu_i+\sigma x)\prod_{j=1,j\neq i}^{m}(1-\phi(\mu_j+\sigma x))\,\varphi(x)\,dx$$

(c) In order to generate a realisation of $Y^1,\dots,Y^m$ one first samples $\psi\sim N(0,1)$ and then m independent Bernoulli variables $Y^1,\dots,Y^m$ with success probability $p_i(\psi)$. The associated realisation of L is then $L=\sum_{i=1}^m e_i Y^i$.

(d) Given $Q=q$, the default indicators Y_i, $1\le i\le m$, are independent with mean q; according to the law of large numbers it holds that, given $Q=q$,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{L^{(m)}}{m}=eq,$$

oder $L^{(m)}\approx meQ$. This leads to the formula. The formula shows directly that the tail of the distribution of the number of defaults is for large m approximately proportional to the tail of Q, so that the tail of Q is the key risk driver. Using (2) we get that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L)\approx em\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q)=\mathrm{VaR}_\alpha(Q)\phi(\mu+\sigma\phi^{-1}\alpha);$$

for $\alpha>0.5$, one has $\phi^{-1}(\alpha)>0$ and $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ is increasing in σ.

Question 7. Interest rate risk and term structure models.

(a) The stochastic present value of the obligation at time t is given by

$$PV(t)=S\cdot D(t,2).$$

At time 0, the amount

$$M=\mathbb{E}_Q(PV(0))=S\cdot\exp\left(-A_\lambda(0,2)-B_\lambda(0,2)\cdot r(0)\right)$$

is invested in the zero bond with maturity 1.

The 95%-quantile of the market value of the obligation at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. Using the parameters of this normal distribution under the real world measure, we get the 5%-quantile

$$r_{0.05}(1)=\mathbb{E}(a(1))+\sqrt{b(1)}\cdot\Phi^{-1}(0.05).$$

In this VaR-scenario, the market value of the obligation under the risk neutral measure is given by

$$\begin{aligned}MV_{0.95}(1)&=\mathbb{E}_Q\left(PV(1)\,|\,r_{0.05}(1)\right)\\&=S\cdot\exp\left(-A_\lambda(1,2)-B_\lambda(1,2)\cdot r_{0.05}(1)\right).\end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability 0.95 after receiving the payment $\frac{M}{P(0,1)}$ of the zero bond, at time 0, we need the risk capital

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) = \left(MV_{0.95}(1) - \frac{M}{P(0,1)}\right) \cdot P(0,1) = MV_{0.95}(1) \cdot P(0,1) - M$$

with the zero bond price $P(0,1) = \exp(-A_\lambda(0,1) - B_\lambda(0,1) \cdot r(0))$.

(b) (i) The stochastic present value of the insurance liabilities at time 0 is given by

$$PV(0) = S \cdot L \cdot D(0,2),$$

where L denotes the random number of survivors at time 2.

(ii) At time 0, the market value is given by

$$\begin{aligned} M &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,2) - B_\lambda(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

The expected value under the real world measure is given by

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(PV(0)) &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

(iii) Conditioning on the number L of survivors, we get

$$\begin{aligned} Var(PV(0)) &= \mathbb{E}(Var(PV(0)|L)) + Var(\mathbb{E}(PV(0)|L)) \\ &= \mathbb{E}(S^2 \cdot L^2 \cdot Var(D(0,2))) + Var(S \cdot L \cdot \mathbb{E}(D(0,2))) \\ &= S^2 \cdot \mathbb{E}(L^2) \cdot Var(D(0,2)) + S^2 \cdot Var(L) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \left(\mathbb{E}(D(0,2)^2) - (\mathbb{E}(D(0,2)))^2\right) \\ &\quad + S^2 \cdot N \cdot p(1-p) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) \\ &\quad - S^2 \cdot N^2 p^2 \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2. \end{aligned}$$

With

$$\begin{aligned} A(0,2) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(2 - B(0,2)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,2)^2 \\ B(0,2) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

we compute

$$\mathbb{E}(D(0,2)) = \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right).$$

Because of $D(0,2)^2 = \exp\left(-\int_0^2 2r(u)\,du\right)$ an analogous calculus with the coefficients a, $2b$ and 2σ gives

$$\mathbb{E}(D(0,2)^2) = \exp\left(-A_{a,2b,2\sigma}(0,2) - B_{a,2b,2\sigma}(0,2)\cdot 2r(0)\right).$$

Letting N tend to infinity, we obtain the variance of the present value per contract:

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} Var(PV(0))\\
&= S^2\cdot \lim_{N\to\infty} \frac{(N\cdot p(1-p)+N^2p^2)\cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) - N^2p^2\cdot(\mathbb{E}(D(0,2)))^2}{N^2}\\
&= S^2\cdot p^2\cdot Var(D(0,2)).
\end{aligned}$$

Interest rate risk is a common risk factor that precludes the effect of pooling.

(iv) It is possible to enter a receiver-swap with nominal $N\cdot S\cdot p$ and swap-rate $S_{0,T}$ for free. Since the evolution of the bank account and the number of survivors are random and the nominal is fixed, interest rate risk is not eliminated completely.

Although mortality rates and interest rates are assumed to be independent there is no perfect hedge consisting of interest rate derivatives because the amount necessary to hedge depends on the evolution of the random number of survivors.