Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 24. Mai 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko. *[30 Punkte]*

Der zufällige Parameter Θ sei exponentialverteilt mit Parameter $\beta > 0$, d.h. habe die Dichte $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Gegeben den Wert θ von Θ, habe die Schadengröße X die Dichte

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x),$$

also die Verteilungsfunktion $F(x|\theta) = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0$.

(a) *[8 Punkte]* Sei $\alpha \in (0,1)$. Bestimmen Sie die Risikomaße $VaR_\alpha(X|\Theta = \theta)$ und $ES_\alpha(X|\Theta = \theta)$ der bedingten Verteilung von X, gegeben den Parameterwert θ.

Hinweis. $\int (\ln(z))^2 \, dz = z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z$

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung $x_1 \in \mathbb{R}^+$ von X, sowie die Randdichte von X.

Hinweis. Die Gamma-Verteilung mit den Parametern $a, b > 0$ hat die Dichte

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta),$$

und es gilt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) *[14 Punkte]* Aus dem korrekten Ergebnis von Teil b) ergibt sich iterativ die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

Die Vorhersageverteilung hat den Erwartungswert $\mathbb{E}(X|x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

(i) *[2 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Value at Risk $VaR_\alpha^{(n)}$ der Vorhersageverteilung von $X \mid x_1, x_2, \ldots, x_n$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegeben ist durch

$$VaR_\alpha(X \mid x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2.$$

(ii) *[6 Punkte]* Quantifizieren Sie das Parameterrisiko, das bei der Schätzung des Value at Risk unter Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers auf Basis der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsteht.

(iii) *[6 Punkte]* Die Analyse des asymptotischen Verhaltens für $n \to \infty$ führt auf folgende Ergebnisse:

- Die Varianz der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen 0.
- Der Erwartungswert der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$.

Erklären Sie die asymptotischen Resultate. Überlegen Sie sich insbesondere dazu, welches Risikomaß welcher Größe der Grenzwert

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$$

darstellt.

Aufgabe 2. Risikomaße und Extremwerttheorie. *[23 Punkte]*

Die Schadengröße X habe die Verteilungsfunktion

$$F_{a,b}(x) = 1 - \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{-\frac{1}{a}}, \quad x \geq 0,$$

mit den Parametern $a \in (0,1)$ und $b > 0$.

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von X zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, wobei $a > 0$ und $b > 1$ gilt.

(b) *[6 Punkte]* Berechnen Sie das asymptotische Verhältnis von ES zu VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

und diskutieren einen möglichen Nutzen dieser Relation für die Bestimmung des Risikokapitals.

(c) *[12 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen hat bisher seine jährlichen Verluste X aus operationalen Risiken mit Hilfe der Lognormalverteilung mit den Parametern $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 4$ modelliert. Analysen des Risikomanagements haben ergeben, dass diese Verteilung im Bereich der Schadenhöhen normaler Jahre angemessen ist, aber Zweifel aufgeworfen, ob extreme Verluste, wie sie in selten eintretenden Krisenjahren auftreten, durch den Verlauf des Tails der Verteilungsfunktion hinreichend erfasst werden.

Ein Workshop mit den Risk Ownern gelangt zu der Einschätzung, dass ein Krisenjahr durch das Überschreiten des Schadens über die Schwelle $u = 35.52$ charakterisiert wird. Gemäß der bisher verwendeten Verteilung tritt ein solches Krisenjahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K) = 0.1$ ein. Die Experten halten diese Eintrittswahrscheinlichkeit für vernünftig und schätzen, dass der mittlere Verlust in einem Krisenjahr 100 beträgt. Der Risikomanager verfolgt zwei Ansätze, das Ergebnis des Workshops in die Verteilung von X mit einzubinden.

A) Modellierung mit der Verteilungsfunktion

$$G(x) := \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) & ; \quad 0 \leq x \leq 35.52, \\ 0.9 + 0.1 \cdot F_{a,b}(x - 35.52); & x \geq 35.52, \end{cases}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

B) Modellierung mit der Verteilungsfunktion

$$H(x) = 0.9 \cdot \Phi\left(\frac{\ln(x) - 1}{2}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2 + x}\right)^{b_2}\right)$$

Sie können die folgenden Eigenschaften ohne Nachweis verwenden:

- Für die Verteilung mit der Verteilungsfunktion $F_{a,b}$ gilt:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = F_{a,b+au}(y)$
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{1-a}$
- Für die Pareto-Verteilung mit der Verteilungsfunktion $x \mapsto 1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}$ gilt:
  - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a_2+u)^{b_2}}{(a_2+u+y)^{b_2}}$, $y \geq 0$
  - $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a_2+u}{b_2-1}$

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Motivation der beiden Ansätze A) und B).

(ii) *[8 Punkte]*

- *[4 Punkte]* Vergleichen und beurteilen Sie die beiden Ansätze A) und B).
- *[4 Punkte]* Entwerfen Sie einen Vorschlag zur Umsetzung beider Vorschläge. Gehen Sie dabei auch darauf ein, ob und, wenn ja, welche Informationen Sie von den Workshopteilnehmern für die Umsetzung benötigen.

Aufgabe 3. Zinsmodelle. *[22 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $P(0,S) > P(0,T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ für $0 < T < S$ gilt, wobei $P(0,T)$ bzw. $F(0,T,S)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zur Zeit 0 bzw. die Forward-Rate für die künftige Periode $[T,S]$ zum Zeitpunkt 0 bezeichnen. Entwickeln Sie eine Arbitrage-Strategie.

(b) *[8 Punkte]* Seien $F(t,T,S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T \geq t$ und Fälligkeit $S > T$ und $L(T,S)$ der einfache Kassazins zum Zeitpunkt T für die Periode $[T,S]$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem S-forward-Maß Q^S bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

(c) *[5 Punkte]* Erklären Sie die grundlegende Idee hinter der Black 76 Formel für ein Caplet. In welchem Modellrahmen kann diese Idee mathematisch sauber implementiert werden? Diskutieren Sie Stärken dieses Modellrahmens im Vergleich zur klassischen Black 76 Formel.

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas. *[30 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1, \dots, L_d$. Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit $\mathrm{EC}_1, \dots, \mathrm{EC}_d$ bezeichnet.

(a) *[9 Punkte]* Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.

(b) Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass L_2 log-normal verteilt ist mit Parametern μ_2, σ_2^2, d.h. $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden. Dabei entscheidet dass Risikomanagement, ein Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) zu wählen.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie für einen fixen Parameter ρ die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im Meta Gauss Modell an.

(ii) *[6 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Normalverteilung erzeugt. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisation $(L_1, L_2)'$ generiert, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.

(c) Ein wesentlicher Punkt bei der Verwendung des in (b) skizzierten Meta Gauss Modells ist die Bestimmung des Parameters ρ der Gauss copula.

(i) *[7 Punkte]* Welche Abhängigkeitsstruktur erhält man im Fall $\rho = 0$ und $\rho = 1$?. Sind L_1 und L_2 im Fall $\rho = 1$ perfekt korreliert? Geben Sie für den Fall $\rho = 1$ den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$ an. Begründen Sie Ihre Antworten.

(ii) *[5 Punkte]* Sie haben die folgenden 5 Beobachtungen von L_1 und L_2 zur Verfügung.

data point	1	2	3	4	5
L_1	0.13	0.16	0.81	0.17	0.66
L_2	0.81	0.42	0.94	0.92	0.78

Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für den Korrelationsparameter ρ von C_ρ^{Ga}.

Aufgabe 5. Counterparty Risk. *[20 Punkte]*

Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt t aus Sicht von B sei mit V_t bezeichnet; die Fälligkeit sei T. (Beispiele für einen derartigen Vertrag sind credit default swaps und Rückversicherungsverträge).

(a) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, was man in diesem Zusammenhang unter counterparty risk versteht und diskutieren Sie kurz zwei verschiedene Techniken zum Management dieser Risikokategorie.

(b) In der oben skizzierten Situation ist die Bewertungskorrektur für den Vertrag aus Sicht des protection buyers B durch

$$\mathrm{CVA} = \delta_S \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\big)$$

gegeben. Hier ist $r \geq 0$ der risikofreie Zinssatz, τ_S die Ausfallzeit und und δ_S der loss given default von S.

(i) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass δ_S deterministisch ist und dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen das CVA durch

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei f_S die Dichte der Ausfallzeit τ_S bezeichnet.

(ii) *[5 Punkte]* Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $E^Q(V_t^+)$ konstant gleich 100 und τ_S unter Q exponentialverteilt mit Parameter γ_S ist. Kann der Parameter γ_S aus am Markt beobachteten CDS spreads auf S kalibriert werden?

(iii) *[4 Punkte]* Bei der Herleitung der Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Diskutieren Sie am Beispiel eines Rückversicherungsvertrags, warum die bei der Herleitung von der Formel für $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ gemachte Unabhängigkeitsannahme in der Praxis problematisch sein kann.

Aufgabe 6. Portfolio Credit Risk. *[25 Punkte]*

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der Versicherungen gegen den Ausfall von Konsumentenkrediten anbietet. Das Versicherungsportfolio umfasst m Verträge gegen den Ausfall von m verschiedenen Krediten mit Ausfallsindikatoren $Y^1, \ldots, Y^m$. Falls der i-te Kredit ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e_i. Wir nehmen im folgenden an, dass e_i deterministisch ist. Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Kreditversicherungsgeschäft verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle der m Kredite zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m. \tag{1}$$

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen der Kredite erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (1) an.

(b) *[8 Punkte]* Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$,die Kovarianz $c_{ij} = \operatorname{cov}(Y^i, Y^j)$ und die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.

(c) *[6 Punkte]* Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Simulation einer Realisierung von $L = \sum_{i=1}^m e_i Y^i$. Dabei steht Ihnen ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der sowohl normalverteilte als auch Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen erzeugen kann.

(d) *[8 Punkte]* Nehmen Sie im folgenden an, dass das Modell homogen ist ($\mu_i \equiv \mu, e_i \equiv e$) und definieren Sie die Mischvariable $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$. Für großes m gilt

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{2}$$

Erläutern Sie die Herleitung dieser Formel und benutzen Sie (2), um approximativ $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$. zu berechnen. Wie wirkt sich für $\alpha > 0.5$ ein höheres σ auf $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ aus?

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. *[30 Punkte]* Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern a, b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Sei ferner λ der Marktpreis des Risikos. Dann folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q \quad \text{(RN)}$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$ mit deterministischen Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t)\right)$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t,T)$ und $B_\lambda(t,T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $a_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

(a) *[10 Punkte]* Zur Bedeckung einer Zahlungsverpflichtung der Höhe S, die zum Zeitpunkt 2 fällig wird, hat ein Unternehmen den Marktwert dieser Verpflichtung zum Zeitpunkt 0 in einen Zerobond mit Fälligkeit 1 investiert. Ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 den Marktwert der Zahlungsverpflichtung bedecken zu können.

(b) *[20 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen hat ein Kollektiv von N gleichaltrigen Personen, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe S mit Fälligkeit zum Zeitpunkt 2 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, den Fälligkeitszeitpunkt zu erleben, beträgt p. Nehmen Sie an, dass Sterblichkeiten und Zinsraten unabhängig sind.

  (i) *[2 Punkte]* Geben Sie den stochastischen Barwert $PV(0)$ der versicherungstechnischen Verpflichtungen zum Zeitpunkt 0 in Abhängigkeit von der zufälligen Anzahl der Überlebenden und der zufälligen Entwicklung der Short-Rate an.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungswert von $PV(0)$ unter dem realen und dem risikoneutralen Maß. Welcher Erwartungswert ist der Marktwert M der Verpflichtungen?

(iii) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie die Varianz von $PV(0)$ unter dem realen Maß. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten $\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right)$ und geben dafür eine ökonomische Erklärung an.

Hinweis. Für quadratintegrierbare Zufallsgrößen X, Y gilt

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)).$$

(iv) *[5 Punkte]* Das Versicherungsunternehmen investiert den Marktwert M der Verbindlichkeiten in ein Bankkonto, das sich gemäß dem Vasicek-Modell entwickelt. Schlagen Sie eine Strategie zur Reduktion des Zinsrisikos vor und erörtern dabei qualitativ die Frage, ob sich das Zinsrisiko vollständig eliminieren lässt.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko.

(a) Die Verteilungsfunktion von X, gegeben den Parameterwert θ erhält man durch Integration der Dichte.

$$F(x|\theta) = \int_0^x \frac{\theta}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right) dy = \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$$

Auflösen der Gleichung $1-\exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) = \alpha$ liefert den Value at Risk.

$$VaR_\alpha(X|\Theta=\theta) = \left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)^2$$

Gemäß der Definition des Expected Shortfall erhalten wir

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X|\Theta=\theta) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(1-z)}{\theta}\right)^2 dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha}\left(\frac{\ln(z)}{\theta}\right)^2 dz \\ &= \frac{1}{\theta^2(1-\alpha)}\left(z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z\right)\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left((\ln(1-\alpha))^2 - 2\ln(1-\alpha) + 2\right). \end{aligned}$$

(b) Die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_1, ergibt sich modulo konstanter Terme zu

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von Gamma$(2, \beta+\sqrt{x_1})$. Folglich gilt

$$\pi(\theta|x_1) = (\beta+\sqrt{x_1})^2\cdot\theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Die Randdichte $m(x)$ von X erhalten wir als Quotient von gemeinsamer Dichte und a posteriori Dichte:

$$m(x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\cdot(\beta+\sqrt{x})^{-2}.$$

(c) (i) Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(VaR_\alpha^{(n)}\,|\,x_,\ldots,x_n) &= 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i} + \frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\right)^{n+1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(ii) Nullsetzen der Ableitung der Dichte

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta^n}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)\\
&= \frac{\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\cdot\left(n\theta^{n-1}-\theta^n\cdot\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)
\end{aligned}
$$

liefert den ML-Schätzer $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$.

Da die Vorhersageverteilung die Unsicherheit bezüglich des Parameters einbezieht, kann das Parameterrisiko durch die Differenz

$$
\begin{aligned}
&VaR_\alpha(X|x_1,\ldots,x_n)-VaR_\alpha(X|\Theta=\hat{\theta})\\
&= \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2\\
&= \left(\beta+\frac{n}{\hat{\theta}}\right)^2\cdot\left((1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}}-1\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2
\end{aligned}
$$

quantifiziert werden.

(iii) Der Grenzwert $VaR_\alpha^{(\infty)}:=\left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ ist der Value at Risk der Beobachtungsverteilung zum Niveau α unter der Voraussetzung, dass θ der richtige Parameterwert ist. Dies überprüft man leicht durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Beobachtungsverteilung

$$F(x|\theta)=1-\exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Mit jeder Beobachtung wächst die Information über den Parameter Θ an. Im Grenzübergang $n\to\infty$ besteht keine Parameterunsicherheit mehr. Die Varianz der a posteriori Verteilung verschwindet, so dass der Parameter gleich dem Grenzwert des Erwartungswertes der a posteriori Verteilung, d.h. $\Theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$ ist. Daher konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung $VaR_\alpha^{(n)}$ gegen den Value at Risk $VaR_\alpha^{(\infty)}$ der Beobachtungsverteilung, gegeben $\theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Wir führen noch den Nachweis der angegebenen Resultate, der *nicht Bestandteil der Aufgabenstellung* ist.

Die Randverteilungsfunktion F von X ergibt sich durch Integration der Dichte m aus b):

$$F(x)=1-\left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right).$$

Wie die Randverteilungsdichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a priori Dichte entsteht, so entsteht die Vorhersagedichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte:

$$
\begin{aligned}
m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta,\\
f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta.
\end{aligned}
$$

Daher erhalten wir die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung, indem wir in der Randverteilungsfunktion die Parameter der a priori Verteilung durch diejenigen der a posteriori Verteilung ersetzen:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta + \sqrt{x_1}}{\beta + \sqrt{x_1} + \sqrt{x}}\right)^2.$$

Iterativ ergibt sich die Vorhersageverteilung auf Basis von n Beobachtungen

$$F(x|x_1,\dots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{n+1}.$$

Mit dem Gesetz der großen Zahl beobachten wir die Konvergenz der Erwartungswerte der a posteriori Verteilung

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\dots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$$

und die Konvergenz der Varianzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\dots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich konvergieren die a posteriori Verteilungen von $\Theta|x_1,\dots,x_n$ gegen das Dirac-Maß im Punkt $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Für $n \to \infty$ konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(X|x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\alpha)\right)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Risikomaße und Extremwerttheorie.

(a) Auflösen der Gleichung $1 - \left(1 + \frac{\alpha x}{b}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \alpha$ nach x führt auf den Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \frac{b}{a}\left((1-\alpha)^{-a} - 1\right).$$

Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\frac{b}{a}\int_\alpha^1 \left((1-z)^{-a}-1\right)dz \\
&= -\frac{b}{a(1-a)(1-\alpha)}\left[(1-z)^{-a+1}\right]_\alpha^1 - \frac{b}{a} \\
&= \frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a} - \frac{b}{a}.
\end{aligned}
$$

(b) Da $(1-\alpha)^{-a}$ für $\alpha \to 1$ gegen unendlich konvergiert, gilt

$$
\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{b}{a(1-a)}(1-\alpha)^{-a}}{\frac{b}{a}(1-\alpha)^{-a}} = \frac{1}{1-a}\,.
$$

Für heavy-tailed Verteilungen kann der Value at Risk in Simulationen stabiler geschätzt werden als der Expected Shortfall, der empfindlich auf Ausreißer reagiert. Für hohe Niveaus kann somit dieses Resultat genutzt werden, um den Expected Shortfall mit Hilfe eines per Simulation bestimmten Wertes des Value at Risk zu schätzen.

(c) (i) Ansatz A) behält die bisher verwendete Lognormalverteilung bis zur Schwelle $u = 35.52$, d.h. bis zum 0.9-Quantil bei. Um das Auftreten extremer Schäden besser zu abzubilden, korrigiert Ansatz A) jedoch die Modellierung des Tails, d.h. hier des Bereichs der 10 Prozent größten Werte, indem die Überschreitung der Schwelle durch eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung beschrieben (GPD) wird.

Ansatz B) stellt eine Mischung der Verteilungsfunktionen für ein normales Jahr und für ein Krisenjahr dar:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X\le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid \bar{K}) + \mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K) \\
&= 0.9\cdot\Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) + 0.1\cdot\left(1-\left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right),
\end{aligned}
$$

wobei ein normales Jahr durch die bisherige Lognormal-Verteilung mit den Parametern 1 und 4 beschrieben wird, die sich in Normaljahren bewährt hat, während ein Krisenjahr durch eine neu zu kalibrierende Paretoverteilung auf Basis der Workshopergebnisse modelliert wird.

(ii) Ansatz A) geht davon aus, dass die in Krisenjahren beobachteten Unzulänglichkeiten auf eine unzulängliche Modellierung des Tails durch die Lognormalverteilung zurückzuführen ist. In der Extremwerttheorie liegt die

Lognormalverteilung im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung und wird in Ansatz A) im Tail durch eine GPD ersetzt, die zu dem Fréchet-Fall mit langsamer abfallenden Tailfunktionen gehört. Die in Normaljahren bewährte Lognormalverteilung wird bis zur Schwelle $u = 35.52$ unverändert beibehalten.

Ansatz B) greift hingegen den zeitlichen Aspekt auf, dass sich Normaljahre und Krisenjahre abwechseln und mischt die bisherige Lognormalverteilung mit einer GPD gemäß den Eintrittswahrscheinlichkeiten. Dadurch wird die Modellierung auch im Bereich der Schäden unterhalb der Schwelle $u = 35.52$ verändert. In der Modellierung des Tailverhaltens überwiegt durch die Mischungswahrscheinlichkeiten der Einfluss der bisher verwendeten Lognormalverteilung.

Für die Entscheidung zwischen beiden Ansätzen sollte der Schadenverlauf in Krisenjahren unter- und oberhalb der Schwelle genauer untersucht bzw. dazu weitere Experteninformationen eingeholt werden.

In beiden Ansätzen sind zwei Parameter zu bestimmen. Neben der Information über die mittlere Überschreibung $e(35.52) = 100 - 35.52 = 64.48$ wird eine weitere Bedingung benötigt. Die Teilnehmer könnten beispielsweise gefragt werden, für wie wahrscheinlich sie die Überschreitung der Schwelle $2 \cdot 35.52 = 71.04$ in einem Krisenjahr halten. Damit kann die Information $\mathbb{P}(X > 2 \cdot 35.52 \mid X > 35.52)$ in beiden Ansätzen genutzt werden.

Aufgabe 3. Zinsmodelle.

(a) Zur Zeit $t = 0$ verkaufe $\frac{P(0,T)}{P(0,S)}$ Zerobonds mit Fälligkeit S und kaufe 1 Zerobond mit Fälligkeit T, so dass keine Zahlung fällig wird. Schließe darüber hinaus einen Receiver Swap mit Strike $K = F(0,T,S)$ und Nominal 1 kostenlos ab. Zur Zeit T wird die Zahlung 1 des fälligen Zerobonds in $\frac{1}{P(T,S)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit S investiert. Zur Zeit S ist die resultierende Zahlung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + (S-T)\cdot F(0,T,S) - (S-T)\cdot L(T,S) \\ > \quad &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(0,T)}{P(0,S)} + \left(\frac{P(0,T)}{P(0,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet einen strikt positiven Gewinn ohne Verlustrisiko.

(b) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß Q^S. Unter Beachtung von $L(T,S) = F(T,T,S)$ erhalten wir damit

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = \mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S.$$

Zur Zeit $u \leq T$ stellt die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ dar.

(c) Die grundlegende Idee der Black 76 Formel für Caplets besteht darin, die Forward-Rate $F(u,T,S)$, $0 \leq u \leq T$, mit einer stochastischen Differentialgleichung vom Black-Scholes Typ

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \leq u \leq T,$$

bezüglich einer Brownschen Bewegung W zu modellieren und die Black-Scholes Formel für Call-Optionen zu übertragen.

Dieser Ansatz wird mathematisch rigoros in der Theorie der LIBOR-Marktmodelle umgesetzt. Jene Modelle ermöglichen es, zeitabhängige und stochastische Volatilitäten abzubilden, und verbessern somit die Kalibrierung an Marktpreise von Zinsderivaten.

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas.

(a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht principles based, keine Berücksichtigung von Diversifikation.

- Correlation adjusted summations $\mathrm{EC} = \left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \rho_{ij}\,\mathrm{EC}_i\,\mathrm{EC}_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteile: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.

- Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteile: Modellrisiko bei Wahl der copula und bei Kalibrierung der copula Parameter, schwer zu kommunizieren.

- Structural Models (factor based) Vorteile: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht sehr intuitiv. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.

(b) (i) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C_\rho^{\mathrm{Ga}}\Big(\phi((\ell_1 - \mu_1)/\sigma_1), \phi((\log \ell_2 - \mu_2)/\sigma_2)\Big)$.

(ii) Schritt 1: Konstruktion von korrelierten normalverteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $x_1 = z_1$, $x_2 = \rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2$.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C_\rho^{Ga}$: Setze $(u_1, u_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2 ist durch $u \mapsto \exp(\sigma\phi^{-1}(u) + \mu)$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\ell_1, \ell_2) = \left(\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\left(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)\right)\right)$$

die gewünschten Realisierungen.

(c) (i) Für $\rho = 0$ erhält man Unabhängigkeit, für $\rho = 1$ Komonotonie. L_1 und L_2 sind nicht vom gleichen Typ und daher im Fall $\rho = 1$ nicht perfekt korreliert (aber ihre Korrelation ist maximal). Wegen der Komonotonie gilt für $\rho = 1$ dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1+L_2) = \mathrm{VaR}_\alpha(L_1)+\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) = \mu_1+\sigma_1\phi^{-1}(u_1)+\exp(\sigma_2\phi^{-1}(\alpha)+\mu_2)\,.$$

(ii) Man erhält für Kendalls tau, dass $\hat{\rho}_\tau = 0.4$ und somit $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_\tau) = 0.59$.

Aufgabe 5. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk ist das Risiko, dass einer der Vertragsparteien, beispielsweise S vor Fälligkeit des Vertrags ausfällt; falls der Vertrag im Ausfallszeitpunkt τ_S aus Sicht von B einen positiven Wert hat, so erleidet B einen Verlust. Mögliche Ansätze zum Management von counterparty risk: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

(b) (i) Es gilt

$$\mathrm{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ und somit die Behauptung.

(ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100 \gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100 \delta_S \gamma_S \Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t} \Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)\end{aligned}$$

(iii) Die Unabhängigkeitsannahme ist problematisch. Falls S ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophennereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

Aufgabe 6. Portfolio Credit Risk

(a) Abhängigkeit ensteht insbesondere dadurch, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit von unterschiedlichen Konsumentenkrediten stark durch die wirtschaftliche Entwicklung (insbesondere auch Arbeitslosigkeit) getrieben wird. Diese Phänomen wird durch die Zufallsvariable ψ modelliert, die alle Ausfallswahrscheinlichkeiten treibt.

(b) Es gilt $\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\, dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Für die Kovarianz gilt

$$\mathrm{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}^i \bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\, dx - \bar{p}_i \bar{p}_j\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall berechnet sich zu

$$\sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x) \prod_{j=1, j\neq i}^m (1 - \phi(\mu_j + \sigma x))\, \varphi(x)\, dx$$

(c) Zur Erzeugung einer Realisierung von $Y^1, \ldots, Y^m$ generiert man zunächst $\psi \sim N(0,1)$ und dann m unabhängige Bernoulli- Zufallsvariablen $Y^1, \ldots, Y^m$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_i(\psi)$. Der zugehörige Verlust ergibt sich dann als $L = \sum_{i=1}^m e_i Y^i$.

(d) Gegeben $Q = q$ sind die Ausfallindikatoren Y_i unabhängig mit Mittelwert q; nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt also, dass gegeben $Q = q$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L^{(m)}}{m} = eq,$$

oder $L^{(m)} \approx meQ$. Hieraus ergibt sich die Formel. Die Formel zeigt direkt, dass der tail der Verteilung der Anzahl an Ausfällen proportional zum tail von Q ist, so dass der tail von Q der wesentliche Risikotreiber ist. Wir erhalten unter Verwendung von (2) dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx em\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) = \mathrm{VaR}_\alpha(Q)\phi(\mu + \sigma\phi^{-1}\alpha);$$

für $\alpha > 0.5$ ist $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ ist somit wachsend in σ.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) Der stochastische Barwert der Verpflichtung zur Zeit t ist gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot D(t, 2).$$

Zum Zeitpunkt 0 wird der Betrag

$$M = \mathbb{E}_Q(PV(0)) = S \cdot \exp\left(-A_\lambda(0, 2) - B_\lambda(0, 2) \cdot r(0)\right)$$

in den Zerobond mit Fälligkeit 1 investiert.

Das 95%-Quantil des Marktwertes der Verpflichtung zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(a(1)) + \sqrt{b(1)} \cdot \Phi^{-1}(0.05).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verpflichtung unter dem risikoneutralen Maß

$$\begin{aligned} MV_{0.95}(1) &= \mathbb{E}_Q\left(PV(1) \mid r_{0.05}(1)\right) \\ &= S \cdot \exp\left(-A_\lambda(1, 2) - B_\lambda(1, 2) \cdot r_{0.05}(1)\right). \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verpflichtung mit Wahrscheinlichkeit 0.95 zusammen mit der Auszahlung $\frac{M}{P(0,1)}$ des Zerobonds puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta MV) = \left(MV_{0.95}(1) - \frac{M}{P(0, 1)}\right) \cdot P(0, 1) = MV_{0.95}(1) \cdot P(0, 1) - M$$

mit dem Zerobondpreis $P(0, 1) = \exp(-A_\lambda(0, 1) - B_\lambda(0, 1) \cdot r(0))$ zu stellen.

(b) (i) Der stochastische Barwert der versicherungstechnischen Verpflichtungen zur Zeit 0 ist gegeben durch

$$PV(0) = S \cdot L \cdot D(0,2),$$

wobei L die zufällige Anzahl der Überlebenden zum Zeitpunkt 2 angibt.

(ii) Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} M &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,2) - B_\lambda(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

Der Erwartungswert unter dem realen Maß ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(PV(0)) &= S \cdot N \cdot p \cdot \mathbb{E}(D(0,2)) \\ &= S \cdot N \cdot p \cdot \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

(iii) Durch Bedingen auf die Anzahl L der Überlebenden berechnen wir

$$\begin{aligned} Var(PV(0)) &= \mathbb{E}(Var(PV(0)|L)) + Var(\mathbb{E}(PV(0)|L)) \\ &= \mathbb{E}(S^2 \cdot L^2 \cdot Var(D(0,2))) + Var(S \cdot L \cdot \mathbb{E}(D(0,2))) \\ &= S^2 \cdot \mathbb{E}(L^2) \cdot Var(D(0,2)) + S^2 \cdot Var(L) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \left(\mathbb{E}(D(0,2)^2) - (\mathbb{E}(D(0,2)))^2\right) \\ &\quad + S^2 \cdot N \cdot p(1-p) \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 \\ &= S^2 \cdot (N \cdot p(1-p) + N^2 p^2) \cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) \\ &\quad - S^2 \cdot N^2 p^2 \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2 . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} A(0,2) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(2 - B(0,2)) + \frac{\sigma^2}{4a} B(0,2)^2 \\ B(0,2) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-2a)) \end{aligned}$$

berechnen wir

$$\mathbb{E}(D(0,2)) = \exp\left(-A(0,2) - B(0,2) \cdot r(0)\right).$$

Wegen $D(0,2)^2 = \exp\left(-\int_0^2 2r(u)\,du\right)$ liefert eine analoge Rechnung mit den Koeffizienten a, $2b$ und 2σ

$$\mathbb{E}(D(0,2)^2) = \exp\left(-A_{a,2b,2\sigma}(0,2) - B_{a,2b,2\sigma}(0,2) \cdot 2r(0)\right).$$

Für die Varianz des Barwerts pro Vertrag erhalten wir im Grenzübergang $N \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} Var\left(\frac{PV(0)}{N}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} Var(PV(0)) \\
&= S^2 \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{(N \cdot p(1-p) + N^2p^2) \cdot \mathbb{E}(D(0,2)^2) - N^2p^2 \cdot (\mathbb{E}(D(0,2)))^2}{N^2} \\
&= S^2 \cdot p^2 \cdot \mathbf{Var(D(0,2))}.
\end{aligned}$$

Der gemeinsame Risikofaktor Zins steht dem Pooling-Effekt entgegen.

(iv) Eine Möglichkeit besteht darin, einen Receiver-Swap mit dem Nominal $N \cdot S \cdot p$ und der Swap-Rate $S_{0,T}$ kostenlos abzuschließen. Wegen der stochastischen Entwicklung des Bankkontos und der stochastischen Entwicklung der Anzahl der Überlebenden wird dabei das Zinsrisiko jedoch nicht vollständig eliminiert.

Trotz der Unabhängigkeit von Biometrie und Sterblichkeit lässt sich das Zinsrisiko durch Zinsderivate nicht perfekt hedgen, da der Absicherungsbedarf vom Verlauf der Anzahl der Überlebenden abhängig ist.