DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 20. Mai 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 (Gewichtung) [28 Punkte]

(a) Beschreiben Sie kurz das grundsätzliche Ziel beim Einsatz eines Gewichtungsverfahrens.
In einem Zeitungsartikel wird behauptet, der Schadenbedarf des aktuellen Jahres sei um 10% gegenüber Vorjahr gesunken. Was sollten Sie als erstes überprüfen? (4 Punkte)

(b) Berechnen Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU mit der *Gewichtung mit dem individuellen Bestand* (bitte überlegen Sie, welche Herkunft, d.h. VU oder Markt, Bestandsgrößen und Schadenbedarfe dabei haben). Welche Werte sind dann vergleichbar und wie ist der Vergleich VU vs. Markt?

	Regionalklasse	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
VU	1	100	100
	2	200	200
	3	500	300
	4	200	400
	Gesamt	1.000	280
...			
Markt	1	4.000	140
	2	5.000	200
	3	6.000	320
	4	5.000	420
	Gesamt	20.000	279

(10 Punkte)

(c) Wie wäre der Vergleich VU vs. Markt mit der Gewichtung mit dem Gesamtbestand? Welches Problem würde die *Gewichtung mit dem Gesamtbestand* zeigen, wenn im obigen Beispiel die Marktdaten unverändert sind, die VU-Daten sich wie folgt darstellen?

	Regionalklasse	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
VU	1	10	1.000
	2	240	200
	3	500	300
	4	250	400
	Gesamt	1.000	308

(14 Punkte)

Aufgabe 2 (Lifetime Value) [26 Punkte]

Gegeben sei ein Bestand mit 10.000 Policen (vereinfachte Annahme Vertragsbeginn und Prämienzahlung zum 01.01. jeden Jahres; Veränderungen wie Inflation etc. wirken jährlich) mit den Kenngrößen wie in den folgenden Tabellen angegeben (sämtliche Größen vor Weiterverwendung auf 2 Nachkommastellen gerundet):

Situation 1	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00	415,84	432,31	
Anzahl Policen	10.000	8.000	6.400	
Schadenquote	80,00%	78,48%	76,98%	
Kündigungsrate	20%	20%	20%	
Preisanpassung	5%	5%	5%	
Schadeninflation	3%	3%	3%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	100			100
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	-44,00	64,55	73,57	94,13
Ergebnis total	-440.000,00	516.435,64	470.868,35	547.303,99

Situation 2	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00	415,84	432,31	
Anzahl Policen	10.000	8.000	6.400	
Schadenquote	80,00%	78,48%	76,98%	
Kündigungsrate	20%	20%	20%	
Preisanpassung	5%	5%	5%	
Schadeninflation	3%	3%	3%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	8%	8%	8%	
Akquisitionskosten abs.	32,00	33,27	34,58	99,85
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	24,00	31,29	38,99	94,28
Ergebnis total	240.000,00	250.297,03	249.525,34	739.822,37

(a) Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Tabellen zur Bestimmung des Lifetime Value? Wie sind die Ergebniseffekte im Zeitablauf? Welche Kenngröße weist darüber hinaus systematisch einen Unterschied auf?

(6 Punkte)

(b) Mit Blick auf die Stakeholder Versicherung, Vertrieb und Kunde: Wer hat welche Vor- bzw. Nachteile in der Situation 1 bzw. 2? Für wen ist dies neutral? Unterscheiden Sie dabei nach dem ersten Jahr und über alle Jahre.

Welche Gefahr besteht für den Versicherer speziell in der Situation 1, falls der Vertrieb ungebunden, z.B. durch einen Makler erfolgt? (6 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Ergebnisse pro Police und total je Jahr und in Summe, wenn sich die Kündigungsrate jeweils und in jedem Jahr auf 30%, die Preisanpassung jeweils und in jedem Jahr auf 4% und die Schadeninflation jeweils und in jedem Jahr auf 10% ändern, indem Sie in den beiden Tabellen im ANHANG die grau hinterlegten Felder vervollständigen.

Bitte tragen Sie die Ergebnisse direkt in die Tabellen im ANHANG ein und geben Sie diesen mit ab!

Welche Kenngrößen verändern sich durch die geänderten Vorgaben? Wie stellen sich die Ergebnisse in beiden Situationen auf Basis dieses Zeithorizontes dar?

Hinweis: Runden Sie Schadenquoten und Euro-Beträge auf zwei Nachkommastellen und rechnen Sie mit den gerundeten Werten weiter. (14 Punkte)

Situation 1	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00	411,88		
Anzahl Policen	10.000	7.000		
Schadenquote	80,00%	84,62%		
Kündigungsrate	30%	30%	30%	
Preisanpassung	4%	4%	4%	
Schadeninflation	10%	10%	10%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	100			100
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	-44,00			13,75
Ergebnis total	-440.000,00		93.578,90	-75.846,84

Situation 2	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00			
Anzahl Policen	10.000	7.000		
Schadenquote	80,00%	84,62%		
Kündigungsrate	30%	30%	30%	
Preisanpassung	4%	4%	4%	
Schadeninflation	10%	10%	10%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	8%	8%	8%	
Akquisitionskosten abs.	32,00			98,88
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	24,00			14,87
Ergebnis total	240.000,00		-72.674,29	207.246,51

siehe ANHANG!

Aufgabe 3 (GLM/Marginalsummenverfahren) [26 Punkte]

(a) Im multiplikativen Modell und unter Annahme einer Poisson-Verteilung führt die Nullsetzung der Ableitung der Log-Likelihood bei zwei Merkmalen auf:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} w_{ij}(y_{ij} - u_i v_j)x_{ij} = 0$$

Dabei ist x_{ij} ein Zeilenvektor der Designmatrix.

Leiten Sie für den Fall $I = J = 2$ die Design-Matrix und daraus die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens her. (10 Punkte)

(b) Gegeben seien für zwei Dimensionen mit jeweils zwei Ausprägungen die folgende Bestandsverteilung sowie die zugehörigen Schadenbedarfe.

Bestandsverteilung:

Jahreseinheiten	1	2	Gesamt
1	300	200	500
2	400	200	600
Gesamt	700	400	1.100

Schadenbedarfe (ganzzahlig gerundet):

SB	1	2	Gesamt
1	100	200	140
2	150	250	183
Gesamt	129	225	164

Stellen Sie hierfür die Startgleichungen des Marginalsummenverfahrens auf (nicht iterieren oder lösen). Dabei bezeichne in den Marginalsummengleichungen der Index i Zeilen und der Index j Spalten. (10 Punkte)

(c) Diskutieren Sie die Vorteile des Marginalsummenverfahrens gegenüber dem Simon-Bailey-Verfahren und begründen Sie Ihre Bewertung qualitativ. (6 Punkte)

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 (Rückversicherungsprogramm) [35 Punkte]

Ein Erstversicherer hat für sein Sach-Portefeuille folgende Rückversicherungsverträge abgeschlossen:

- Summenexzedent:
  - Maximum 2.000, Anzahl der Maxima: 4
  - Provision: 10%
  - Gewinnanteil: 30% nach 5% Verwaltungskosten
  - Verlustvortrag bis Tilgung, aktueller Verlustvortrag: 100

- Schadenexzedent 1.500 xs 500 pro Risiko auf den Summenexzedenten-Selbstbehalt:
  - eine bezahlte Wiederauffüllungen zu 100% prc
  - Upfront-Prämie: 1% des GNPI

- Ereignisschaden-Stop Loss 8.000 xs 2.000 auf den Selbstbehalt von Summenexzedent und Schadenexzedent pro Risiko:
  - Ereignisschadengrenze: 1.000
  - Upfront-Prämie: 2% des GNPI

Nach einem Jahr, das durch die Stürme Achim und Berta betroffen ist, stellt sich die Schadensituation wie folgt dar:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schadenlast gesamt	davon Schaden aus Achim	davon Schaden aus Berta
1	500	10.000	25.000	18.000	2.000	1.000
2	1.500	5.000	40.000	30.000	1.000	1.500
3	2.500	1.200	20.000	18.000	2.500	500
4	4.000	290	10.000	8.000	300	700
5	10.000	50	5.000	4.000	250	250
Summe		16.540	100.000	78.000	6.050	3.950

Hierin enthalten sind folgende Einzelschäden > 400:

Datum	VS	Schadenhöhe	Bemerkung
01.02.	2.500	1.500	Achim
15.03.	1.500	1.000	Berta
05.07.	10.000	2.000	Feuer
08.10.	2.500	1.500	Feuer

Neben Achim und Berta sind keine weiteren Kumulschäden eingetreten.

(a) Erläutern Sie, weshalb ein solches Rückversicherungsprogramm zum Schutz eines Sach-Portefeuilles zweckmäßig ist. Gehen Sie hierbei auf die risikotechnische Funktion der einzelnen Verträge innerhalb des Programms ein.
Halten Sie ein solches Programm auch bei einem Haftpflicht-Portefeuille für sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort. (10 Punkte)

(b) Berechnen Sie für alle drei Verträge Prämien, Schäden und externe Kosten des Rückversicherers. Wie hoch ist das technische Ergebnis des Rückversicherers für das gesamte Rückversicherungsprogramm? (25 Punkte)

Aufgabe 5 (Stabilisierungsklausel) [20 Punkte]

(a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer APK10 und einer SIC30.

[4 Punkte]

(b) Die Klausel SIC10 funktioniert komplett analog zur SIC30, jedoch mit 10% statt 30% Marge. Wir betrachten nun einen Schadenexzedenten 3.000 xs 2.000 für das Anfalljahr 2017. Es sei eine SIC10 mit Indexbasis 2016 vereinbart. Zur Stabilisierung wird hierbei folgender Index verwendet:

I_{2016}	I_{2017}	I_{2018}	I_{2019}	I_{2020}	I_{2021}
100	104	109	113	117	120

Berechnen Sie für folgenden Schaden aus 2017 die stabilisierten Deckungen sowie kumulierte Schadenzahlungen und Reserven im XL für die Jahre 2017 bis 2021:

	2017	2018	2019	2020	2021
Kumulierte Zahlungen	1.000	3.000	3.000	4.000	6.000
Reserve	2.000	2.000	3.000	2.000	0
Schadenaufwand	3.000	5.000	6.000	6.000	6.000

[16 Punkte]

Aufgabe 6 (Haftpflicht-Exposurequotierung) [35 Punkte]

(a) In der Haftpflichtversicherung wird häufig die sogenannte Zuschlagsquotierung verwendet.

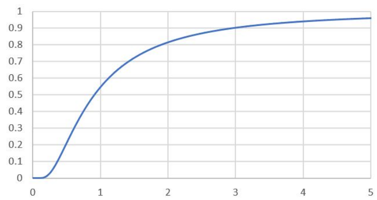
- Erläutern Sie die grundlegende Modellannahme.
- Gegeben sei ein Risiko mit einer Prämie von $s_0 > 0$ für eine Deckungssumme von $v_0 > 0$. Leiten Sie unter der Annahme eines Zuschlagssatzes von $z \in (0, 1)$ die zugehörige stetige Prämienfunktion $S_z(v)$ her (d.h. die Prämie in Abhängigkeit von der Deckungssumme).

(6 Punkte)

(b) Gegeben sei eine Prämienfunktion $S\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$. Erläutern Sie, was es bedeutet, S durch ein kollektives Modell darzustellen. Nennen Sie Kriterien, anhand derer man entscheiden kann, ob die Prämienfunktion S durch ein kollektives Modell darstellbar ist. (5 Punkte)

(c) Entscheiden Sie, ob folgende Prämienfunktion durch ein kollektives Modell darstellbar ist (mit Begründung):

$$S_a(v) := \begin{cases} \sin\left[\exp\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right] & \text{für } v > 0 \\ 0 & \text{für } v = 0 \end{cases}$$



Sie dürfen hierbei mit dem abgebildeten Graphen argumentieren. (3 Punkte)

(d) Eine Prämienfunktion S sei durch ein kollektives Modell darstellbar. Geben sie ein darstellendes kollektives Modell an. (4 Punkte)

(e) Geben Sie konkret für die Prämienfunktion $S_b(v) := 1 - \exp(-v)$ ein darstellendes kollektives Modell an. (3 Punkte)

(f) Begründen Sie, warum die Prämienfunktion $S_c(v) := v + \log(v + 1)$ nicht als kollektives Modell darstellbar ist. (2 Punkte)

(g) Wir betrachten nun den Rückversicherungslayer 9.000 xs 1.000 und ein Risikoprofil mit Deckungssummen zwischen 500 und 20.000. Ändern Sie S_c so zu einer Prämienfunktion S_c^* ab, dass

- S_c^* durch ein kollektives Modell darstellbar ist und
- die Prämienfunktionen S_c und S_c^* beim Exposure-Rating das gleiche Ergebnis liefern.

(5 Punkte)

(h) Begründen Sie, warum eine Feuer-Exposurequotierung mit der Quasi-Exposure-kurve

$$G(x) := \begin{cases} x^{\log_2(1+z)} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

das gleiche Ergebnis liefert wie eine Zuschlagsquotierung mit dem Zuschlagsatz $z \in (0, 1)$. (7 Punkte)

Aufgabe 7 (Pareto-Optimalität) [10 Punkte]

Es sei S der Jahresgesamtschaden eines Portefeuilles. Fur einen Rückversicherungsvertrag τ bezeichnen wir mit $\widetilde{S}_\tau$ den Schaden im Selbstbehalt und mit $\widehat{S}_\tau$ den rückversicherten Schaden.

(a) Wann heißt der Vertrag τ im Varianzmodell *Pareto-optimal*? [4 Punkte]

(b) Die Funktion $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ sei definiert durch $g(s) := \mathrm{E}(\widehat{S}_\tau \,|\, S = s)$.
Zeigen Sie: Falls $\widehat{S}_\tau$ keine Funktion von S ist, so gilt für den durch

$$\widehat{S}_\theta := g(S), \quad \widetilde{S}_\theta := S - g(S)$$

definierten Rückversicherungsvertrag θ:

$$\mathrm{Var}(\widehat{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\widehat{S}_\tau) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\tau).$$

[6 Punkte]

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

Zu (a): Ein Gewichtungsverfahren ermöglicht den Vergleich einer Kenngröße wie z.B. Schadenbedarf zwischen verschiedenen Beständen (z.B. verschiedene Jahre); dabei werden Effekte durch unterschiedliche Bestandsverteilungen herausgerechnet. Ein solcher Schadenbedarfsunterschied kann durch unterschiedliche Bestandsverteilungen zwischen beiden Jahren verursacht sein, was man somit überprüfen sollte.

Zu (b): Der gewichtete Schadenbedarf des VU ist hier 298 (Bestandsgrößen individuell, d.h. vom VU jeweils multipliziert mit Schadenbedarfen Markt und anschließend dividiert durch Bestandssumme des VU) und somit liegt das VU mit 280 unter dem vergleichbaren (wg. gleicher Bestandsverteilung) Schadenbedarf des Marktes.

Zu (c): Dabei wäre der gewichtete Schadenbedarf 260 (Bestandsgrößen des Marktes jeweils multipliziert mit Schadenbedarfen VU und anschließend dividiert durch Bestandssumme Markt) und das VU würde auch hier unter dem vergleichbaren Markt-SB von 279 liegen.

Der gewichtete Schadenbedarf des VU ist im geänderten Fall 440. Dieses Ergebnis ist stark von dem Ausreißer in der Altersgruppe 1 des VU beeinflusst. Dieser Schadenbedarf von 1.000 ist beim VU vor dem Hintergrund eines geringen Bestandes in der betreffenden Regionalklasse zu sehen. Durch den Bestand des Marktes in dieser Regionalklasse, der einen deutlich höheren Anteil als beim VU hat, erhält dieser Ausreißer bei diesem Gewichtungsverfahren ein hohes Gewicht, d.h. dieses Gewichtungsverfahren ist ausreißerempfindlich. Bei Gewichtung mit dem individuellen Bestand wird dies vermieden.

Zu Aufgabe 2:

Zu (a): Der wesentliche Unterschied liegt in den Akquisitionskosten: In Situation 1 erfolgt eine einmalige Provisionszahlung bei Abschluss, in Situation 2 handelt sich um eine jährliche Provision auf Basis eines Prozentsatzes der jeweiligen Prämie.

Bei der Einmalprovision führt dies im ersten Jahr zu einem negativen Ergebnis, während bei der laufenden Provision in jedem Jahr ein positives Ergebnis entsteht. Über alle Jahre verbessert sich bei der Einmalprovision das Ergebnis für den Versicherer pro Police und auch insgesamt.

Als weitere Kenngröße unterscheidet sich zwischen den beiden Situationen die Summe der Akquisitionskosten über die Jahre: Diese wächst bei laufender Provision im Zeitablauf und ist bei hinreichend langer Laufzeit größer als bei der Einmalprovision, auch wenn dies sich im ersten Jahr genau anders herum verhält.

Zu (b): Im ersten Jahr ist das Ergebnis für den Versicherer in der Situation 1 schlechter, wo-hingegen für den Vertrieb dies genau gegenläufig ist. Über alle Jahre verhält es sich bei hinreichend langer Laufzeit umgekehrt.

Für den Kunden sind beide Situationen gleich, also neutral.

In Situation 1 könnte durch einen ungebundenen Vertrieb jährlich eine Umdeckung zu einem anderen Versicherer erfolgen und folglich keine Zeit bleiben, das negative Ergebnis des ersten Jahres nach einiger Zeit ins Positive zu bringen.

Zu (c): Die Ergebnisse ergeben sich wie folgt:

Situation 1	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00	411,88	424,12	
Anzahl Policen	10.000	7.000	4.900	
Schadenquote	80,00%	84,62%	89,50%	
Kündigungsrate	30%	30%	30%	
Preisanpassung	4%	4%	4%	
Schadeninflation	10%	10%	10%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	100			100
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	-44,00	38,65	19,10	13,75
Ergebnis total	-440.000,00	270.574,26	93.578,90	-75.846,84

Situation 2	Jahre			
	1	2	3	Summe
Durchschnittsprämie	400,00	411,88	424,12	
Anzahl Policen	10.000	7.000	4.900	
Schadenquote	80,00%	84,62%	89,50%	
Kündigungsrate	30%	30%	30%	
Preisanpassung	4%	4%	4%	
Schadeninflation	10%	10%	10%	
Diskontierung	1%	1%	1%	
Akquisitionskosten	8%	8%	8%	
Akquisitionskosten abs.	32,00	32,95	33,93	98,88
Verwaltungskosten	6%	6%	6%	
Ergebnis pro Police	24,00	5,70	-14,83	14,87
Ergebnis total	240.000,00	39.920,79	-72.674,29	207.246,51

Die Schadeninflation überwiegt in beiden Situationen deutlich die Preisanpassung, wodurch sich jährlich die Schadenquote verschlechtert. Durch die geringere Preisanpassung fällt der Anstieg der Durchschnittsprämie niedriger aus. Folglich gilt dies auch in Situation 2 für die Akquisitionskosten. Letzteres zeigt sich in klar geringerem Ausmaß, so dass grundsätzlich das Ergebnis pro Police für den Versicherer schlechter bei laufender Provisionszahlung und im dritten Jahr bereits negativ ist. Allerdings ist aufgrund der hohen Kündigungsrate das Ergebnis des gesamten Bestandes sum-miert über die Jahre in Situation 2 bei diesem Zeithorizont besser.

Zu Aufgabe 3:

Zu (a): Die Design-Matrix ist in diesem Fall ($I+J$ Spalten und IJ Zeilen, jeweils also 4):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im folgenden ist x_{ij} ein Zeilenvektor der Design-Matrix. Damit gilt

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_{ij}(y_{ij} - u_i v_j)x_{ij} = 0$$

Somit liefert die komponentenweise Betrachtung die Gleichungen des Marginalsummenverfahrens:

$$\begin{pmatrix} w_{11}(y_{11}-u_1v_1) \\ 0 \\ w_{11}(y_{11}-u_1v_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{12}(y_{12}-u_1v_2) \\ 0 \\ 0 \\ w_{12}(y_{12}-u_1v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_{21}(y_{21}-u_2v_1) \\ w_{21}(y_{21}-u_2v_1) \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ w_{22}(y_{22}-u_2v_2) \\ 0 \\ w_{22}(y_{22}-u_2v_2) \end{pmatrix} = 0$$

Damit ergeben sich folgende vier Gleichungen des Marginalsummenverfahrens:

I: $w_{11}y_{11} + w_{12}y_{12} = w_{11}u_1v_1 + w_{12}u_1v_2$

II: $w_{21}y_{21} + w_{22}y_{22} = w_{21}u_2v_1 + w_{22}u_2v_2$

III: $w_{11}y_{11} + w_{21}y_{21} = w_{11}u_1v_1 + w_{21}u_2v_1$

IV: $w_{12}y_{12} + w_{22}y_{22} = w_{12}u_1v_2 + w_{22}u_2v_2$

Zu (b): Gemäß dem Ergebnis aus (a) ergibt sich:

I: $u_1(300v_1 + 200v_2) = 300 * 100 + 200 * 200 \Leftrightarrow u_1(3v_1 + 2v_2) = 700$

II: $u_2(400v_1 + 200v_2) = 400 * 150 + 200 * 250 \Leftrightarrow u_2(2v_1 + v_2) = 550$

III: $v_1(300u_1 + 400u_2) = 300 * 100 + 400 * 150 \Leftrightarrow v_1(3u_1 + 4u_2) = 900$

IV: $v_2(200u_1 + 200u_2) = 200 * 200 + 200 * 250 \Leftrightarrow v_2(u_1 + u_2) = 450$

Zu (c): Das Simon-Bailey-Verfahren überschätzt im multiplikativen Modell systematisch die beobachteten Werte.

Dieses ist beim Marginalsummenverfahren nicht der Fall, da gerade durch das Verfahren die beobachteten Randwerte reproduziert werden.

Zudem versucht das Simon-Bailey-Verfahren die beobachteten Werte auf Ebene der untersten Tarifzellen zu approximieren. Dadurch wird es ausreißerempfindlich.

Auch dies ist nicht der Fall beim Marginalsummenverfahren aufgrund der beschriebenen Reproduktion der beobachteten Randwerte, die auf größeren Beständen beruhen und dadurch i.a. stabiler sind.

Zu Aufgabe 4:

Zu (a): Charakteristisch für die Sachversicherung sind

- inhomogene Versicherungssummen
- hohes Groß- und Totalschadenpotential (Feuer)
- hohes Kumulschadenpotential (Naturgefahren)

Häufig ist hierbei die Annahme plausibel, dass die Schadengrade (d.h. Schadenhöhe in % der Versicherungssumme) aller Risiken näherungsweise identisch verteilt sind. Summenexzedenten sind in der Sachversicherung üblich, da sie unter dieser Annahme das Portefeuille homogenisieren (idealerweise hat man im Selbstbehalt des Summenexzedenten lauter ähnliche Risiken).

Der XL pro Risiko dient dem Schutz vor Großschäden, der Ereignisschaden-Stop Loss dem Schutz vor

- einzelnen größeren Kumulschäden (> 2.000) und
- einer Häufung von kleineren Kumulschäden (> 1.000).

In den Haftpflichtbranchen ist ein solches Rückversicherungsprogramm in der Regel nicht zielführend. Häufig ist die Annahme plausibel, dass alle Risiken ähnliche Schadenhöhenverteilungen haben, die durch unterschiedliche Versicherungssummen nach oben abgeschnitten werden. Unter dieser Annahme würde ein Summenexzedent eine Inhomogenisierung der Risiken im Selbstbehalt bewirken. Daher sind Summenexzedenten in den Haftpflichtbranchen eher unüblich.

Zu (b): Der Selbstbehalt des Summenexzedenten stellt sich wie folgt dar:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schadenlast gesamt	davon Schaden aus Achim	Berta
1	500	10.000	25.000	18.000	2.000	1.000
2	1.500	5.000	40.000	30.000	1.000	1.500
3	2.000	1.200	16.000	14.400	2.000	400
4	2.000	290	5.000	4.000	150	350
5	2.000	50	1.000	800	50	50
Summe		16.540	87.000	67.200	5.200	3.300

Für die Abgabe des Summenexzedenten erhält man:

Band Nr.	VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schadenlast gesamt	davon Schaden aus Achim	Berta
1	0	10.000	0	0	0	0
2	0	5.000	0	0	0	0
3	500	1.200	4.000	3.600	500	100
4	2.000	290	5.000	4.000	150	350
5	8.000	50	4.000	3.200	200	200
Summe		16.540	13.000	10.800	850	650

Die Provision beläuft sich auf $10\% \cdot 13.000 = 1.300$, der Gewinn nach Verwaltungskosten und Verlustvortrag auf $13.000 - 10.800 - 10\% \cdot 13.000 - 5\% \cdot 13.000 - 100 = 150$. Es ergibt sich ein Gewinnanteil von $30\% \cdot 150 = 45$. Die externen Kosten des Rückversicherers belaufen sich somit auf $1.300 + 45 = 1.345$ (Provision + Gewinnanteil). Wir erhalten ein technisches Ergebnis von

$$13.000 - 10.800 - 1.345 = 855.$$

Das GNPI für die XLs ist gleich der Selbstbehaltsprämie des Summenexzedenten, d.h. 87.000. Die RV-Prämie für den XL pro Risiko beläuft sich also auf $1\% \cdot 87.000 = 870$. Externe Kosten fallen beim XL pro Risiko nicht an. Einzelschäden im Summenexzedenten-Selbstbehalt (SX-SB) und Erstattung im XL pro Risiko:

Datum	VS im SX-SB	Schadenhöhe im SX-SB	Erstattung im XL pro Risiko	Bemerkung
01.02.	2.000	1.200	700	Achim
15.03.	1.500	1.000	500	Berta
05.07.	2.000	400	0	Feuer
08.10.	2.000	1.200	700	Feuer
Summe		3.800	1.900	

Der Rückversicherer erhält eine Wiederauffüllungsprämie von

$$\min\left(1;\frac{1.900}{1.500}\right)\cdot 100\%\cdot 870 = 870.$$

Man erhält ein technisches Ergebnis von

$$870+870-1.900=-160$$

für diesen Vertrag.

Selbstbehaltsschäden der Stürme nach Summenexzedent und XL Pro Risiko:

	Schaden im SX-SB	Erstattung im XL pro Risiko	SB-Schaden nach SX und XL pro Risiko	größer als 1.000
Achim	5.200	700	4.500	ja
Berta	3.300	500	2.800	ja
Summe			7.300	

Die Erstattung im Ereignisschaden-Stop Loss beträgt also

$$\min(8.000,(7.300-2.000)^+)=5.300.$$

Die Rückversicherungsprämie für den Ereignisschaden-Stop Loss beläuft sich auf $2\%\cdot 87.000 = 1.740$. Das technische Ergebnis des Rückversicherers in diesem Vertrag ist somit $1.740-5.300=-3.560$.

Für das gesamte Rückversicherungsprogramm erhalten wir ein technisches Ergebnis von $855-160-3.560=-2.865$.

Zu Aufgabe 5:

Zu (a): Bei der APK10 beginnt man mit der Stabilisierung der Deckung, sobald der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 10% gewachsen ist. Die Schadenzahlungen und Reserven werden dann vom aktuellen Index auf den Basisindex bereinigt. Bei der SIC30 beginnt man mit der Stabilisierung erst dann, wenn der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 30% gewachsen ist. Die Inflationbereinigung findet dann auf $1{,}3\cdot$Basisindex statt.

zu (b): Seien $C := 3.000$ und $D := 2.000$. Es bezeichne z_i die inkrementelle Zahlung im Jahr i und r_i die Reserve am Ende des Jahres i, also

i	2017	2018	2019	2020	2021
z_i	1.000	2.000	0	1.000	2.000
r_i	2.000	2.000	3.000	2.000	0

Mit

$$f_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2016}} < 1{,}1 \\ \frac{I_{2016}\cdot 1{,}1}{I_i} & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2016}} \geq 1{,}1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_i := \frac{z_{2017} + \cdots + z_i + r_i}{f_{2017}z_{2017} + \cdots + f_i z_i + f_i r_i}$$

sind dann $C_i^{\text{stab}} := F_i C$ die stabilisierte Haftung und $D_i^{\text{stab}} := F_i D$ die stabilisierte Priorität im Jahr i. Einsetzen liefert

i	2017	2018	2019	2020	2021
f_i	1,000	1,000	0,973	0,940	0,917
F_i	1,000	1,000	1,013	1,031	1,039
C_i^{stab}	3.000	3.000	3.040	3.093	3.118
D_i^{stab}	2.000	2.000	2.027	2.062	2.078

Bringt man kumulierte Zahlungen und Schadenaufwand des Jahres i in die Deckung C_i^{stab} xs D_i^{stab} ein, so erhält man folgende Zahlen für den XL:

	2017	2018	2019	2020	2021
Kumulierte xs-Zahlungen	0	1.000	973	1.938	3.118
xs-Reserve	1.000	2.000	2.067	1.154	0
xs-Schadenaufwand	1.000	3.000	3.040	3.093	3.118

Zu Aufgabe 6:

Zu (a): Grundlegende Annahme bei der Zuschlagsquotierung: Eine Verdoppelung der Deckungssumme kostet immer den gleichen prozentualen Zuschlag (= Zuschlagssatz) auf die Prämie.

Aus dieser Annahme folgt

$$S_z(2^n v_0) = (1+z)^n s_0$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Setzt man in diese Formel $n = \log_2(v/v_0)$ ein, so erhält man die stetige Fortsetzung

$$S_z(v) = (1+z)^{\log_2(v/v_0)} s_0 = (v/v_0)^{\log_2(1+z)} s_0.$$

Zu (b): Eine Prämienfunktion S wird durch das kollektive Modell $\sum_{i=1}^{N} X_i$ dargestellt, wenn

$$S(v) = E\left(\sum_{i=1}^{N} \min(X_i, v)\right) = E(N)E(\min(X, v))$$

für alle $v \geq 0$ gilt (wobei X wie die X_i verteilt ist). Laut Skript gilt folgender

Satz: Eine Prämienfunktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$ lässt sich genau dann durch ein kollektives Modell darstellen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) S ist konkav

(b) $\lim_{v\to 0} \frac{S(v)}{v} < \infty$ (d.h. S ist bei 0 rechtsseitig differenzierbar)

(c) $\lim_{v\to\infty} S'(v) = 0$ (wobei S' die rechtsseitige Ableitung von S bezeichnet)

Zu (c): Die Prämienfunktion $S_a(v)$ ist nicht konkav und daher nicht als kollektives Modell darstellbar.

Zu (d): Es seien $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda := S'(0)$ und $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. und unabhängig von N mit

$$F_{X_i}(v) = 1 - \frac{S'(v)}{S'(0)}.$$

Hierbei bezeichne S' die rechtsseitige Ableitung von S. Dann ist $\sum_{i=1}^N X_i$ gemäß Skript ein darstellendes kollektives Modell.

Zu (e): Es gilt $S_b'(v) = \exp(-v)$. Somit können wir $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda = S_b'(0) = 1$ und X_i mit

$$F_{X_i}(v) = 1 - \frac{S_b'(v)}{S_b'(0)} = 1 - \exp(-v)$$

wählen.

Zu (f): Die Prämienfunktion S_c ist nicht durch ein kollektives Modell darstellbar, da $\lim_{v\to\infty} S_c'(v) = 1$.

Zu (g): Wir wählen ein $v_1 \geq 20.000$ und definieren

$$S_c^*(v) := \begin{cases} S_c(v) & \text{für } 0 \leq v \leq v_1 \\ S_c(v_1) & \text{für } v > v_1. \end{cases}$$

Dann ist S_c^* als kollektives Modell darstellbar (die Kriterien aus obigem Satz sind alle erfüllt). Wegen $S_c^*(v) = S_c(v)$ für alle $v \leq 20.000$ ändert der Übergang von S_c zu S_c^* die Ergebnisse beim Exposure-Rating nicht.

Zu (h): Wir betrachten den XL pro Risiko C xs D und ein Risiko mit Deckungssumme v und Schadenbedarf s. Die Prämienfunktion des Risikos ist gemäß Riebesell-Modell von der Form $S(x) = c \cdot x^{\log_2(1+z)}$. Wegen $s = S(v)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\text{Ergebnis Zuschlagsquotierung} = \\
&= c \cdot S(\min(C+D, v)) - c \cdot S(\min(D, v)) \\
&= s \cdot \frac{S(\min(C+D, v)) - S(\min(D, v))}{S(v)/c} \\
&= s \cdot \left[\min\left(\frac{C+D}{v}, 1\right)^{\log_2(1+z)} - \min\left(\frac{D}{v}, 1\right)^{\log_2(1+z)} \right] \\
&= s \cdot \left[G\left(\frac{C+D}{v}\right) - G\left(\frac{D}{v}\right) \right] \\
&= \text{Ergebnis Feuer-Exposurequotierung.}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 7:

Zu (a): Der Vertrag τ heißt im Varianzmodell *Pareto-optimal*, wenn für alle Rückversicherungsverträge θ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widehat{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\widehat{S}_\tau) &\Rightarrow \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\theta) > \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\tau)\\
\mathrm{Var}(\widetilde{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\tau) &\Rightarrow \mathrm{Var}(\widehat{S}_\theta) > \mathrm{Var}(\widehat{S}_\tau).
\end{aligned}$$

Zu (b): Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widehat{S}_\theta) &= \mathrm{Var}(g(S)) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\widehat{S}_\tau\,|\,S)\\
&< \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\widehat{S}_\tau\,|\,S)) + \mathrm{E}(\mathrm{Var}(\widehat{S}_\tau\,|\,S)) = \mathrm{Var}(\widehat{S}_\tau)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widetilde{S}_\theta) &= \mathrm{Var}(S - g(S)) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(S - \widehat{S}_\tau\,|\,S)) = \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\widetilde{S}_\tau\,|\,S))\\
&< \mathrm{Var}(\mathrm{E}(\widetilde{S}_\tau\,|\,S)) + \mathrm{E}(\mathrm{Var}(\widetilde{S}_\tau\,|\,S)) = \mathrm{Var}(\widetilde{S}_\tau).
\end{aligned}$$