



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

## **Modellierung**

gemäß Prüfungsordnung 3  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Mai 2022

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht einschließlich Deckblatt aus 13 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Dr. Volker Goersmeyer, Dr. Lucattilio Tenuta,  
Andreas Wagner

**Aufgabe 1.** *[Risikobewertung] [30 Punkte]*

- (a) Erläutern Sie die Bedeutung der Risikoanalyse und -bewertung im Risikomanagement-Kreislauf. *[5 Punkte]*
- (b) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen qualitativer und quantitativer Risikobewertung. Erläutern Sie kurz den typischen Prozessablauf von der Risikoanalyse bis zur Auswahl der (quantitativen) Bewertungsmethode. *[5 Punkte]*
- (c) Es gibt vier Klassen von mathematischen Methoden und Modellen zur Risikobewertung. Nennen Sie für zwei dieser Klassen ein Beispiel aus dem Versicherungsbereich. Geben Sie dazu die Klasse selbst und das konkrete Risiko an und erläutern Sie kurz den jeweiligen Bewertungsansatz. *[6 Punkte]*
- (d) Was ist die hauptsächliche Ursache, weshalb manche Risiken nicht oder nur schwer quantifizierbar sind? Geben Sie zwei mögliche Umstände an, die zu dieser Hauptursache führen können. *[3 Punkte]*
- (e) Im Rahmen der Risikobewertung findet man die Begriffe Brutto- und Nettorisiko. Erläutern Sie kurz den Unterschied im Allgemeinen und geben Sie zwei konkrete Beispiele an, welche unterschiedliche Bedeutung die Begriffe Brutto- und Nettorisiko bei einem Versicherungsunternehmen in der Praxis haben können. *[4 Punkte]*
- (f) In welchem grundlegenden Zusammenhang steht Risikobewertung mit der Funktionsweise von Limitsystemen? *[2 Punkte]*
- (g) Erläutern Sie kurz, wie man grundsätzlich bei der Risikobewertung mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgeht. Nennen Sie zwei Beispiele aus dem Versicherungsbereich für die Auswahl einer geeigneten Granularitätsebene. *[5 Punkte]*

**Aufgabe 2.** *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [10 Punkte]*

Die Leichendorfer Rentenanstalt, ein Lebensversicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland, hat zu Beginn des laufenden Jahres angefangen, Risikolebensversicherungen zu verkaufen. Das Produkt leistet nur bei Tod der Versicherungsnehmer. Die standardmäßige Laufzeit beträgt 10 Jahre. Die Versicherungsnehmer haben jedoch am Ende der Laufzeit die Option, den Vertrag ohne erneute Gesundheitsprüfung für weitere 5 Jahre zu der gleichen versicherten Leistung zu verlängern. Der zu zahlende Beitrag bei einer Verlängerung ist derjenige, den ein Versicherungsnehmer für einen neuen Vertrag zu den zum Zeitpunkt der Verlängerung gültigen Bedingungen seinem Alter entsprechend zahlen würde. Die Option kann nur einmal am Ende der ursprünglichen Laufzeit ausgeübt werden.

Sie arbeiten im Aktuariat der Leichendorfer Rentenanstalt und müssen zum Jahresende (d. h., das Produkt war ein Jahr auf dem Markt) die Reserven nach deutschem Handelsgesetzbuch (HGB) und nach Solvency II für die neue Risikolebensversicherung bestimmen.

Besprechen Sie alle wesentlichen Sachverhalte, die mit der Festlegung der Annahmen für die erstmalige Bewertung dieses neuen Produktes inklusive der Verlängerungsoption zusammenhängen. Sie sollten dabei explizit erwähnen, ob und eventuell aus welchen Gründen unterschiedliche Annahmen für die Bewertung nach HGB und Solvency II verwendet werden sollten.

*Hinweis: Beachten Sie, dass die Punktevergabe von Ihrer Ausarbeitung und den Begründungen abhängt, weil es bei dieser Aufgabe keine eindeutige Lösung gibt. Ergänzen Sie die Informationen, die Ihnen vorliegen, mit weiteren sinnvollen Annahmen, falls Sie das für nötig erachten.*

*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie zehn unterschiedliche Sachverhalte erwähnen.*

**Aufgabe 3.** [Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [20 Punkte]

Sie arbeiten in der Risikomanagementabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt, ein Versicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland. Sie sind gerade dabei, den Bericht für das „Own Risk and Solvency Assessment“ (ORSA) vorzubereiten. Der CRO der Leichendorfer Rentenanstalt möchte in dem Bericht zeigen, dass das Unternehmen über eine sehr gute Kapitalausstattung verfügt, auch wenn man eine mehrjährige Risikosicht annimmt.

- (a) Erläutern Sie mögliche Hintergründe, warum unter Solvency II eine einjährige Risikosicht gewählt wurde. [2 Punkte]

Das Risikokapital der Leichendorfer Rentenanstalt zum Jahresende beträgt 1000 Euro. Die entsprechenden Eigenmittel betragen 2500 Euro.

Nehmen Sie dazu an, dass die Leichendorfer Rentenanstalt für alle Berechnungen das Risikomaß *Value at Risk* verwendet, d. h., dass das Risikokapital als Quantil der Verlustfunktion definiert wird. Sie wissen außerdem, dass unter Solvency II das Risikokapital das Quantil der einjährigen Verlustfunktion zu einem Sicherheitsniveau von 99,5% ist.

Die Eigenmittelverluste eines jeden Jahres sind identisch verteilt und folgen einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung  $\sigma$ .

- (b) Nehmen Sie für diese Frage an, dass die Eigenmittelverluste eines jeden Jahres unabhängig voneinander sind. Welche Solvenzquote würde die Leichendorfer Rentenanstalt bei einer zweijährigen Risikosicht und einem Sicherheitsniveau von 99,5% ausweisen? [8 Punkte]
- (c) Bei welchem Sicherheitsniveau in der zweijährigen Risikosicht müsste das Unternehmen das gleiche Risikokapital wie unter Solvency II vorhalten, wenn die Eigenmittelverluste des ersten und des zweiten Jahres eine Korrelation von 50% besitzen? [10 Punkte]

**Hilfsmittel:** Beachten Sie die nachstehende Tabelle mit den Quantilen der Standardnormalverteilung  $Z \sim N_1(0, 1)$ . Fehlende Quantile können linear interpoliert werden.



Sicherheitsniveau $x\%$	Quantil $Q_Z(x\%)$
75%	0,67
80%	0,84
90%	1,28
95%	1,64
97,5%	1,96
99%	2,33
99,50%	2,58
99,75%	2,80
99,99%	3,72
99,999%	4,26

**Aufgabe 4.** *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [30 Punkte]*

Die Leichendorfer Rentenanstalt ist ein Lebensversicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland. Das Unternehmen verkauft ausschließlich klassische Lebensversicherungsprodukte mit Garantie. Alle Produkte sind überschussberechtigigt.

Die Kapitalanlageabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt hat verschiedene Anlagestrategien, deren Wirksamkeit in einer Monte-Carlo-Simulation überprüft wird, entwickelt, um die Garantie bei Ablauf darstellen zu können. Die Kapitalmarktpfade in der Monte-Carlo-Simulation werden durch einen Economic Scenario Generator (ESG) erzeugt.

Sie arbeiten in der Kapitalanlageabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt und beschäftigen sich mit einer konkreten Anlagestrategie für den unten beschriebenen Teilbestand.

- Erlebensfallpolice, Garantierter Betrag bei Ablauf: 1000 Euro
- Laufzeit: 4 Jahre
- Einmalbeitrag bei Abschluss: 990 Euro
- Anlagestrategie:
  - Bei Abschluss des Vertrages wird eine 2 Jahre laufende Staatsanleihe ohne Zinskupons („Nullkuponanleihe“ oder „Zerobond“) höchster Bonität (AAA) gekauft. Der Kauf wird vollständig durch den Einmalbeitrag finanziert.
  - Nach zwei Jahren wird zu den dann gültigen Zinsen eine 2 Jahre laufende Staatsanleihe ohne Zinskupons höchster Bonität (AAA) gekauft. Nennwert der Anleihe ist der bei Ablauf garantierte Betrag.
  - Der zukünftige (in zwei Jahren) Anleihekauf wird durch die Erlöse aus der Rückzahlung der bei Abschluss gekauften zweijährigen Anleihe finanziert. Je nach Zinslage kann daraus für das Unternehmen zum Zeitpunkt des zweiten Anleihekaufs ein Gewinn oder ein Verlust entstehen.
  - Versicherungsnehmer werden zu 90% an den Gewinnen beteiligt. Verluste werden in voller Höhe von dem Unternehmen getragen.
- Best-Estimate-Annahmen:
  - Alle Kosten und alle biometrischen Annahmen (wie Sterblichkeit oder Storno) können vernachlässigt werden (d. h., sie sind gleich 0).
- Zinsannahmen:



- $r_t$ : Spot Rate,  $t$ -Jahre-Zins zu  $t = 0$ .
- $r_{1,3}$ : Forward Rate, 3-Jahre-Zins zu  $t = 1$ .
- $r_{2,2}$ : Forward Rate, 2-Jahre-Zins zu  $t = 2$ .

Certainty-Equivalent-Szenario		
Spot Rate $r_t, t \leq 2$	Forward Rate $r_{1,3}$	Forward Rate $r_{2,2}$
0,00%	1,09%	1,65%

Pfade der Monte-Carlo-Simulation			
Pfadnummer	Spot Rate $r_t, t \leq 2$	Forward Rate $r_{1,3}$	Forward Rate $r_{2,2}$
1	0,00%	0,15%	1,50%
2	0,00%	1,50%	1,90%
3	0,00%	1,60%	1,50%

Für die folgenden Berechnungen runden Sie alle Ergebnisse auf ganze Zahl kaufmännisch. Zinsen werden wie oben in Prozent mit zwei Nachkommastellen angegeben.

- Berechnen Sie den erwarteten Gewinn oder Verlust im Certainty-Equivalent-Szenario. [6 Punkte]
- Führen Sie einen  $1 = 1$  - Test für die Pfade der Monte-Carlo-Simulation zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2$  durch. [12 Punkte]
- Führen Sie eine Monte-Carlo-Simulation durch und berechnen Sie den Zeitwert der Optionen und Garantien (TVOG) für die Anlagestrategie. [12 Punkte]

**Hinweis:** Der Preis zum Zeitpunkt  $t$  eines Zerobonds mit Restlaufzeit  $T$  und Nennwert  $N$  ist:

$$P_t = \frac{N}{(1 + r_{t,t+T})^T}, \quad (1)$$

wobei  $r_{t,t+T}$  der entsprechende Terminzins (Forward Rate) für die Zeitspanne  $[t, t + T]$  ist.

**Aufgabe 5.** [Modellierung in der Schadenversicherung] [30 Punkte]

Die KHuK Versicherung AG betreibt das Geschäft der Kraftfahrtversicherung. Sie arbeiten im Risikomanagement und sollen den Schadenaufwand des Geschäftsjahres 2022 in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung modellieren. Ihnen liegt die folgende Liste mit den in den vergangenen Jahren eingetretenen Großschäden sortiert absteigend nach Schadenaufwand in TSD EUR vor. Die Großschadengrenze liegt bei der KHuK-Versicherung bei einer Mio. EUR. Alle Werte sind inflationsbereinigt.

Anfalljahr	Schadenaufwand	Anfalljahr	Schadenaufwand
2018	6.163	2018	1.484
2019	5.618	2021	1.392
2021	5.542	2018	1.313
2017	4.037	2018	1.170
2018	1.869	2021	1.148
2021	1.795	2020	1.112
2021	1.722	2019	1.107
2021	1.579	2018	1.061
2021	1.570	2020	1.043
2018	1.533	2018	1.006

Als Exposure verwenden Sie das Mittel der über das Geschäftsjahr bestehenden Verträge. In den vergangenen Jahren betrug dieses:

Geschäftsjahr	2017	2018	2019	2020	2021
Anzahl Verträge in TSD	100	120	180	190	200

Für das Jahr 2022 wird mit einem stagnierenden Vertragsvolumen von 200 TSD Verträgen gerechnet.

Eine Übersicht mit für die Großschadenmodellierung wichtigen Verteilungen liegt stets griffbereit auf Ihrem Schreibtisch. Dieser entnehmen Sie:

Name	Dichte	Erwartungswert	Varianz
Poisson-Verteilung	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$
Negative Binomial-Verteilung	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Pareto-Verteilung	$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha+1}$	$\frac{\alpha}{\alpha-1} \lambda$	$\frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}$

- (a) Bestimmen Sie je Anfalljahr die Anzahl der eingetretenen Großschäden und die Großschadenhäufigkeit. [5 Punkte]

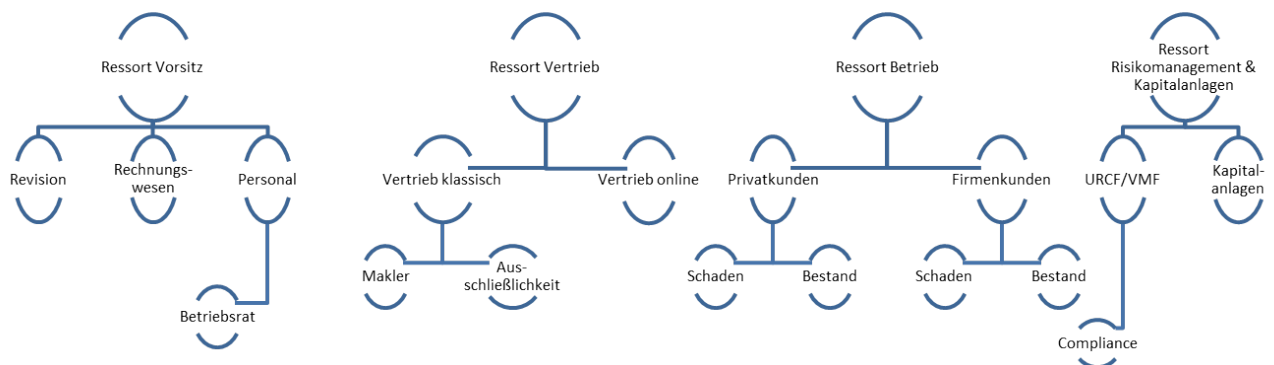




- (b) Multiplizieren Sie die Großschadenhäufigkeit für jedes Anfalljahr mit dem Planexposure für 2022 und schätzen Sie auf Basis dieser Größen Erwartungswert und Varianz der Verteilung der Großschadenanzahl für das Jahr 2022! *[9 Punkte]*
- (c) Sie entscheiden sich dafür, eine negative Binomial-Verteilung an die ermittelten Größen anzupassen. Warum? *[2 Punkte]*
- (d) Bestimmen Sie die Parameter der negativen Binomial-Verteilung! *[4 Punkte]*
- (e) Zur Bestimmung der Schadenhöhenverteilung passen Sie eine Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\lambda = 1$  und  $\alpha = 1,9$  an. Wie könnten diese Werte zustande gekommen sein? Geben Sie die Verteilungsfunktion an! *[6 Punkte]*
- (f) Der Leiter der Rückversicherungsabteilung will einen Einzelschaden-XL-Vertrag abschließen und möchte von Ihnen wissen, wie hoch die Priorität - also der Betrag, ab dem die Rückversicherung den Schadenaufwand trägt - gewählt werden soll, damit im Mittel 5% der Großschäden diesen überschreiten. Wie viele Schäden hätten in den letzten 5 Jahren tatsächlich diesen Wert überschritten? *[4 Punkte]*

**Aufgabe 6.** [Solvency II, Governance, Aufbauorganisation] [20 Punkte]

Die Komplex Versicherung AG betreibt das ganze Spektrum der Schaden-/Unfallversicherung über verschiedene Vertriebswege sowohl im Privatkunden- als auch im gewerblichen Segment einschließlich Spezial-Geschäft mit Großrisiken industrieller Kunden. In der Dokumentation der Aufbauorganisation sind das Organigramm und der Geschäftsverteilplan in folgenden Darstellungen enthalten:



<b>Geschäftsverteilplan Komplex AG</b>		
<b>Ressort/Funktionen</b>	<b>Name/Gremium</b>	<b>Abteilungen</b>
Ressort Vorsitz	Dr. B. Oss	Personal
		Rechnungswesen
		Revision
Ressort Vertrieb	Dr. B. Oss	Vertrieb klassisch
		Vertrieb online
Ressort Betrieb	S. Meier	Privatkunden
		Firmenkunden
Ressort Risikomanagement & Kapitalanlagen	I. Mobilie	URCF/VMF
		Kapitalanlagen
Revision	A. Sesor	
Compliance	A. Sesor	
URCF	I. Mobilie	
VMF	VMF-Komitee	

- Ordnen Sie die Abteilungen auf Basis der aufgrund ihrer Bezeichnungen naheliegenden Aufgaben den drei Verteidigungslinien zu! [3 Punkte]
- Worum handelt es sich bei den „MaGo“? [2 Punkte]
- Beschreiben Sie auf Grundlage der dem Organigramm und dem Geschäftsverteilplan zu entnehmenden Informationen kurz fünf aufsichtsrechtliche Anfor-



derungen an die Geschäftsorganisation, die bei der Komplex Versicherung AG  
möglicherweise nicht erfüllt sind! Begründen Sie dies jeweils! *[15 Punkte]*

**Aufgabe 7.** *[Solvency II, Governance, Modellierung Schaden] [40 Punkte]*

Ganz anders dagegen ist das Geschäftsmodell der Simpel Versicherung AG, die ebenfalls Schadenversicherungsgeschäft betreibt. Diese arbeitet ausschließlich mit Assekuradeuren zusammen. Der Assekuradeur wird dabei mit einer zeitlich begrenzten Vollmacht zur Zeichnung von Versicherungsverträgen einer festgelegten Sparte und zur Regulierung der damit verbundenen Schäden ausgestattet. Risikoträger ist stets die Simpel Versicherung AG. Die Simpel Versicherung AG schließt die Verträge mit dem jeweiligen Assekuradeur nur für maximal ein Jahr und über eine ausgewählte – aber von Assekuradeur zu Assekuradeur variierenden - Sparte ab. Der Assekuradeur erhält eine vom Prämienvolumen proportional abhängige Provision als Vergütung. Der Assekuradeur liefert quartärllich Vertrags- und Schadeninformationen einschließlich der versicherungstechnischen Rückstellungen nach Solvency II an die Simpel Versicherung AG. Die Simpel Versicherung AG legt die Mittel, die zur Bedeckung der versicherungstechnischen Verpflichtungen benötigt werden, in Aktien an.

(a) Sind folgende Aussagen richtig oder falsch:

- (i) Die Simpel Versicherung AG benötigt eine Outsourcing-Leitlinie.
- (ii) Die Simpel Versicherung AG benötigt keine versicherungsmathematische Funktion, da die Rückstellungen zugeliefert werden.
- (iii) Die Simpel Versicherung AG kann gut von Diversifikationseffekten profitieren.
- (iv) Die Simpel Versicherung AG hat in jedem Fall nur kurzfristige versicherungstechnische Risiken.

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz! *[8 Punkte]*

(b) Beschreiben Sie fünf Risiken, die sich aus dem Geschäftsmodell der Simpel Versicherung AG abgesehen von den versicherungstechnischen Risiken ergeben und nennen Sie dabei die zugehörige Risikokategorie! *[10 Punkte]*

Die Simpel Versicherung AG hat zwei Vorstände. Vorstand A verantwortet das Privatkundengeschäft, Vorstand B das Firmenkundengeschäft. Die jährliche Vergütung ist vollständig variabel und bemisst sich für Vorstand A proportional zum Beitragsvolumen des Privatkundengeschäfts und für Vorstand B proportional zum Beitragsvolumen des Firmenkundengeschäfts.

(c) Nennen sie vier Aspekte an der Vergütungsregelung, die vor dem Hintergrund einer guten Praxis oder gar aufsichtsrechtlichen Regelungen kritisch zu sehen sind. Geben Sie jeweils eine Begründung oder einen Vorschlag zur Verbesserung an! *[8 Punkte]*



- (d) Die Sempel Versicherung AG will ihr versicherungstechnisches Risiko selbst modellieren und fordert zu diesem Zweck Vertragsdaten und Schadendaten von den Assekuradeuren an. Nennen Sie vier mögliche Probleme, vor denen die Sempel Versicherung AG dabei stehen könnte! [8 Punkte]
- (e) Die Sempel Versicherung AG schätzt die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust im Privatkundengeschäft auf 5% und für einen Verlust im Firmenkundengeschäft auf 14%. Bezüglich der Abhängigkeit zwischen diesen beiden Geschäftssegmenten nimmt sie an, dass Kendalls Tau 0,1 beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust in beiden Geschäftssegmenten bei einer Modellierung mit der Clayton-Copula? [6 Punkte]

*Hinweis: Die Clayton-Copula ist definiert durch:*

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty$$

*Der Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und dem Parameter  $\theta$  der Copula ist gegeben durch:*

$$\rho_{\tau}(U, V) = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

## Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1. [Risikobewertung] [30 Punkte]

- (a) Erläutern Sie die Bedeutung der Risikoanalyse und -bewertung im Risikomanagement-Kreislauf. [5 Punkte]

### Lösungsvorschlag

Der Risikomanagement-Kreislauf beginnt mit der Risikoidentifikation.

Bevor ein identifiziertes Risiko im Rahmen der Risikosteuerung behandelt werden kann, begegnet man folgenden Herausforderungen:

- Vergleichbarkeit verschiedener Risiken und deren Ertragspotential
- Trennung von wesentlichen und unwesentlichen Risiken (Wirtschaftlichkeit → sinnvoller Ressourceneinsatz im Risikomanagement)
- Auswahl der passenden Risikosteuerungsinstrumente (dazu gehört gegebenenfalls auch das aktive Eingehen von Risiken im Rahmen der Risikostrategie) → Sicherheit und Erfolg des Unternehmens

[1 Punkt je Herausforderung]

Der Risikomanager muss einschätzen können, wie gefährlich ein identifiziertes Risiko für das Unternehmen ist und ob sich gegebenenfalls Ertragschancen aus dem Eingehen des Risikos ergeben, denn er muss Schaden vom Unternehmen abwenden und dabei wirtschaftlich handeln. [1 Punkt]

Diesen Herausforderungen begegnet man mit Risikoanalyse und Risikobewertung, die somit als Bindeglied zwischen Risikoidentifikation und Risikosteuerung dienen. [1 Punkt]



- (b) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen qualitativer und quantitativer Risikobewertung. Erläutern Sie kurz den typischen Prozessablauf von der Risikoanalyse bis zur Auswahl der (quantitativen) Bewertungsmethode. *[5 Punkte]*

### **Lösungsvorschlag**

Qualitative Risikobewertung ist immer möglich. Man überlegt dabei, wie wahrscheinlich es ist, dass sich das Risiko im Unternehmen realisiert („Eintrittswahrscheinlichkeit“), und wie groß der mögliche Schaden für das Unternehmen wäre, wenn sich das Risiko realisierte („Schadenausmaß“). Mit diesen beiden Informationen ist bereits eine grobe Trennung von wesentlichen und unwesentlichen Risiken möglich.

Bei der quantitativen Bewertung kommen mathematische Methoden und Modelle zum Einsatz. Oft werden Risiken mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt, wobei zur Bewertung verschiedene Risikomaße verwendet werden können.

*[3 Punkte]*

Üblicherweise wird so vorgegangen:

- Zunächst wird qualitativ bewertet;
- dann wird die Wesentlichkeit festgestellt;
- bei wesentlichen Risiken wird dann die Quantifizierbarkeit festgestellt, d. h. ob geeignete Daten und Methoden verfügbar sind, um bei diesem Risiko eine quantitative Bewertung durchzuführen;
- schließlich werden im Falle der Quantifizierbarkeit eine oder mehrere geeignete Bewertungsmethoden ausgewählt, mit denen das Risiko dann bewertet wird.

*[0,5 Punkte je Prozessschritt]*



- (c) Es gibt vier Klassen von mathematischen Methoden und Modellen zur Risikobewertung. Nennen Sie für zwei dieser Klassen ein Beispiel aus dem Versicherungsbereich. Geben Sie dazu die Klasse selbst und das konkrete Risiko an und erläutern Sie kurz den jeweiligen Bewertungsansatz. [6 Punkte]

### Lösungsvorschlag

- Faktorbasiert: zum Beispiel nichtlebensversicherungstechnisches Risiko/Prämienrisiko. In der Solvency-II-Standardformel wird das Prämienrisiko auf der Ebene einer einzelnen Sparte mit Risikofaktoren (Standardabweichungen) auf Volumenmaße bewertet.
- Szenariobasiert: zum Beispiel Marktrisiko/Zinsänderungsrisiko. In der Standardformel von Solvency II wird mittels einer modifizierten Zinsstrukturkurve ein „gestresster“ Net Asset Value des Unternehmens berechnet und mit dem ungestressten („best estimate“) Net Asset Value verglichen. Die Differenz der beiden Größen ist die Bewertung des Risikos.
- Analytisch: zum Beispiel Marktrisiko/Zinsänderungsrisiko. Ein analytischer Ansatz ist die Durationsformel, bei der aus einer gegebenen Zinsdifferenz und der Durationslücke zwischen Aktiv- und Passivseite der Verlust berechnet werden kann.
- Simulationsmodelle: zum Beispiel Kapitalmarktmodelle zur Bewertung des Marktrisikos. Mittels Monte-Carlo-Simulation werden Risikotreiber wie Zinsen oder Aktienpreise in die Zukunft fortgeschrieben. Wechselwirkungen mit dem Kapitalanlage- und dem Versicherungsbestand werden mit geeigneten Kapitalanlagemodellen und Passivmodellen dargestellt. Als Ergebnis erhält man eine empirische Verlustverteilung, auf der die gewünschten Risikomaße berechnet werden können.

(Es waren zwei Beispiele verlangt.)

[3 Punkte je Beispiel; je 1 Punkt für die Nennung der Klasse, die Nennung des Risikos und die Erläuterung des Ansatzes; maximal 6 Punkte]





- (d) Was ist die hauptsächliche Ursache, weshalb manche Risiken nicht oder nur schwer quantifizierbar sind? Geben Sie zwei mögliche Umstände an, die zu dieser Hauptursache führen können. [3 Punkte]

### Lösungsvorschlag

Die Hauptursache ist das Fehlen geeigneter Daten. [1 Punkt]

Folgende Gründe kann es dafür geben:

- Das Risiko hat eine sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeit, so dass es naturgemäß wenige Schadenereignisse gibt.
- Das Risiko ist erst seit relativ kurzer Zeit neu entstanden, so dass noch keine historischen Daten vorliegen können (Emerging Risks).
- Das Risiko ist sehr spezifisch, also sehr von der Situation im jeweiligen Unternehmen abhängig. Dann können kaum externe Daten herangezogen werden.
- Das Risiko hat sehr viele Wechselwirkungen mit äußeren Faktoren (z. B. anderen Risiken). Aufgrund der Komplexität reichen die vorhandenen Daten nicht aus, um zu einer verlässlichen Bewertung zu kommen.

(Es waren zwei Beispiele verlangt.)

[1 Punkt je Beispiel, maximal 2 Punkte]



- (e) Im Rahmen der Risikobewertung findet man die Begriffe Brutto- und Nettorisiko. Erläutern Sie kurz den Unterschied im Allgemeinen und geben Sie zwei konkrete Beispiele an, welche unterschiedliche Bedeutung die Begriffe Brutto- und Nettorisiko bei einem Versicherungsunternehmen in der Praxis haben können. *[4 Punkte]*

### **Lösungsvorschlag**

Das Bruttorisiko ist eine theoretische Bewertung, bei der das Risiko isoliert von äußeren Faktoren bewertet wird. *[1 Punkt]*

In der Praxis relevant ist dagegen eher das Nettorisiko, bei dem die Wechselwirkung mit verschiedenen äußeren Faktoren (innerhalb und außerhalb des Unternehmens) sowie mit Risikosteuerungsmaßnahmen berücksichtigt wird. *[1 Punkt]*

Die Begriffe Brutto- und Nettorisiko können im Versicherungsbereich verschiedene Bedeutungen haben:

- Vor und nach Rückversicherung
- Vor und nach Steuern
- Vor und nach Diversifikation
- Vor und nach Anpassung der Überschussbeteiligung (LV)

(Es waren zwei Beispiele verlangt.)

*[1 Punkt je Beispiel; maximal 2 Punkte]*



- (f) In welchem grundlegenden Zusammenhang steht Risikobewertung mit der Funktionsweise von Limitsystemen? [2 Punkte]

### **Lösungsvorschlag**

Zunächst hat die Limitierung von Risiken einen grundlegenden Zusammenhang zur Risikobewertung, da nur eine quantitative Größe hinsichtlich des Einhaltens einer Beschränkung sinnvoll überwacht werden kann.

Operativ werden in der Regel so genannte quantitative Risikoindikatoren beobachtet, deren Größe mit der Höhe des Risikos in direktem Zusammenhang stehen. Der Zusammenhang zwischen Risikoindikator und Risiko wird in der Regel im Rahmen der Risikobewertung festgestellt.



- (g) Erläutern Sie kurz, wie man grundsätzlich bei der Risikobewertung mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgeht. Nennen Sie zwei Beispiele aus dem Versicherungsbereich für die Auswahl einer geeigneten Granularitätsebene. [5 Punkte]

### Lösungsvorschlag

Zunächst benötigt man einen geeigneten Datenpool mit Realisierungen des Risikos. Eventuell müssen zusätzliche Informationen bei der Interpretation der Daten berücksichtigt werden (z. B. bekannte Änderungen bei äußeren Faktoren oder bekannte Trends). [1 Punkt]

Dann wählt man ein passendes Modell (eine Verteilung). Hierbei bewegt man sich auf einer geeigneten Granularitätsebene (Teilrisiko, Teilbestand, ...). In einigen Fällen kann man auf bereits bewährte Verteilungen zurückgreifen.

[1 Punkt]

Anschließend werden mit den Daten die Verteilungsparameter geschätzt. Ist dieser Schritt abgeschlossen, können Risikomaße aus der Verteilung berechnet werden. [1 Punkt]

Von der gewählten Granularitätsebene zu einer Gesamtrisikobewertung kommt man mittels Risikoaggregation.

Geeignete Granularitätsebene (Beispiele):

- Lebensversicherung/Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung: Bewertung des versicherungstechnischen Risikos mit der multiplikativen Gesamtschadenschwankung: Die Granularitätsebene sind die einzelnen Faktoren, die auf Farnys Elementen des versicherungstechnischen Risikos basieren.
- Schaden-Unfall-Versicherung: Die bei der Bewertung des versicherungstechnischen Risikos verwendeten Schadenklassen (Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden) sind hier die Granularitätsebene.
- Operationales Risiko: Die aus internen und externen Verlustdatenbanken abgeleiteten homogenen Risikoeinheiten sind die Granularitätsebene.

(Es waren zwei Beispiele verlangt.)

[1 Punkt je Beispiel; maximal 2 Punkte]

**Aufgabe 2.** *[Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [10 Punkte]*

Die Leichendorfer Rentenanstalt, ein Lebensversicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland, hat zu Beginn des laufenden Jahres angefangen, Risikolebensversicherungen zu verkaufen. Das Produkt leistet nur bei Tod der Versicherungsnehmer. Die standardmäßige Laufzeit beträgt 10 Jahre. Die Versicherungsnehmer haben jedoch am Ende der Laufzeit die Option, den Vertrag ohne erneute Gesundheitsprüfung für weitere 5 Jahre zu der gleichen versicherten Leistung zu verlängern. Der zu zahlende Beitrag bei einer Verlängerung ist derjenige, den ein Versicherungsnehmer für einen neuen Vertrag zu den zum Zeitpunkt der Verlängerung gültigen Bedingungen seinem Alter entsprechend zahlen würde. Die Option kann nur einmal am Ende der ursprünglichen Laufzeit ausgeübt werden.

Sie arbeiten im Aktuariat der Leichendorfer Rentenanstalt und müssen zum Jahresende (d. h., das Produkt war ein Jahr auf dem Markt) die Reserven nach deutschem Handelsgesetzbuch (HGB) und nach Solvency II für die neue Risikolebensversicherung bestimmen.

Besprechen Sie alle wesentlichen Sachverhalte, die mit der Festlegung der Annahmen für die erstmalige Bewertung dieses neuen Produktes inklusive der Verlängerungsoption zusammenhängen. Sie sollten dabei explizit erwähnen, ob und eventuell aus welchen Gründen unterschiedliche Annahmen für die Bewertung nach HGB und Solvency II verwendet werden sollten.

*Hinweis: Beachten Sie, dass die Punktevergabe von Ihrer Ausarbeitung und den Begründungen abhängt, weil es bei dieser Aufgabe keine eindeutige Lösung gibt. Ergänzen Sie die Informationen, die Ihnen vorliegen, mit weiteren sinnvollen Annahmen, falls Sie das für nötig erachten.*

*Um die volle Punktzahl zu erhalten, sollten Sie zehn unterschiedliche Sachverhalte erwähnen.*

## Lösungsvorschlag

Die Punktevergabe orientiert sich am folgenden Vorschlag (die maximale Anzahl an erreichbaren Punkten ist auf 10 begrenzt):

- (a) [1 Punkt] Das Produkt wird zum erstem Mal bewertet, deswegen existieren keine früheren Bewertungsannahmen, worauf man sich beziehen könnte.
- (b) [1 Punkt] Man könnte die Pricing-Annahmen verwenden.
- (c) [1 Punkt] Die HGB-Annahmen verlangen eine Sicherheitsmarge.
- (d) [1 Punkt] Die Sicherheitsmarge bei den HGB-Annahmen sollte die höhere Unsicherheit, die mit einer erstmaligen Bewertung verbunden ist, berücksichtigen und könnte deswegen höher ausfallen.
- (e) [1 Punkt] Solvency II verlangt Best-Estimate-Annahmen, d. h. ohne jegliche Risiko- oder Sicherheitsmarge.
- (f) [1 Punkt] Weil das Unternehmen über keinerlei Erfahrung über die Ausübungsrate der Option verfügt, könnte ein Rückversicherer um Unterstützung bei der Festlegung dieser Annahmen gebeten werden.
- (g) Mögliche Annahmen, die bei der Bewertung eine Rolle spielen, sind:
- [1 Punkt] Ausübungsrate der Option.
  - [1 Punkt] Sterblichkeit der Versicherungsnehmer, die die Option ausüben.
  - [1 Punkt] Sterblichkeit der Versicherungsnehmer, die die Option nicht ausüben.
  - [1 Punkt] Höhere Kosten, die mit der Ausübung der Option verbunden sind (z. B. zusätzliche Felder im Verwaltungssystem für die Verträge, erhöhte Kommunikation mit den Versicherungsnehmern. . .)
- (h) [1 Punkt] Bei der Festlegung der Ausübungsrate könnte das Unternehmen von einem Worst-Case-Szenario ausgehen:
- [1 Punkt] Alle Versicherungsnehmer, die am Ende der ursprünglichen Laufzeit noch leben, üben die Option aus.
- (i) [1 Punkt] Die Sterblichkeit der Versicherungsnehmer, die die Option ausüben, ist wahrscheinlich höher als diejenige derer, die die Option nicht ausüben (Antiselektion).



- (j) [1 Punkt] Die Option, worum es in der Aufgabe geht, ist eine sogenannte „versicherungstechnische Option“, die für den Versicherer (überwiegend) kein zusätzliches Finanzrisiko, sondern ein zusätzliches Versicherungsrisiko darstellt.
- (k) [1 Punkt] Der Wert einer versicherungstechnischen Option wird in den meisten Fällen deterministisch und nicht stochastisch bestimmt.

**Aufgabe 3.** [Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [20 Punkte]

Sie arbeiten in der Risikomanagementabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt, ein Versicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland. Sie sind gerade dabei, den Bericht für das „Own Risk and Solvency Assessment“ (ORSA) vorzubereiten. Der CRO der Leichendorfer Rentenanstalt möchte in dem Bericht zeigen, dass das Unternehmen über eine sehr gute Kapitalausstattung verfügt, auch wenn man eine mehrjährige Risikosicht annimmt.

- (a) Erläutern Sie mögliche Hintergründe, warum unter Solvency II eine einjährige Risikosicht gewählt wurde. [2 Punkte]

Das Risikokapital der Leichendorfer Rentenanstalt zum Jahresende beträgt 1000 Euro. Die entsprechenden Eigenmittel betragen 2500 Euro.

Nehmen Sie dazu an, dass die Leichendorfer Rentenanstalt für alle Berechnungen das Risikomaß *Value at Risk* verwendet, d. h., dass das Risikokapital als Quantil der Verlustfunktion definiert wird. Sie wissen außerdem, dass unter Solvency II das Risikokapital das Quantil der einjährigen Verlustfunktion zu einem Sicherheitsniveau von 99,5% ist.

Die Eigenmittelverluste eines jeden Jahres sind identisch verteilt und folgen einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung  $\sigma$ .

- (b) Nehmen Sie für diese Frage an, dass die Eigenmittelverluste eines jeden Jahres unabhängig voneinander sind. Welche Solvenzquote würde die Leichendorfer Rentenanstalt bei einer zweijährigen Risikosicht und einem Sicherheitsniveau von 99,5% ausweisen? [8 Punkte]
- (c) Bei welchem Sicherheitsniveau in der zweijährigen Risikosicht müsste das Unternehmen das gleiche Risikokapital wie unter Solvency II vorhalten, wenn die Eigenmittelverluste des ersten und des zweiten Jahres eine Korrelation von 50% besitzen? [10 Punkte]

**Hilfsmittel:** Beachten Sie die nachstehende Tabelle mit den Quantilen der Standardnormalverteilung  $Z \sim N_1(0, 1)$ . Fehlende Quantile können linear interpoliert werden.





Sicherheitsniveau $x\%$	Quantil $Q_Z(x\%)$
75%	0,67
80%	0,84
90%	1,28
95%	1,64
97,5%	1,96
99%	2,33
99,50%	2,58
99,75%	2,80
99,99%	3,72
99,999%	4,26



### Lösungsvorschlag

- (a) [2 Punkte] Hauptgrund für eine einjährige Sicht unter Solvency II ist, dass Geschäftsjahre eine natürliche Einheit für Unternehmen, die einmal pro Jahr eine Bilanz aufstellen müssen, sind. Außerdem ist die mutmaßliche Zeit für das wirksame Eingreifen der Aufsicht ungefähr ein Jahr.

Seien  $V_t$  die ökonomischen Eigenmittel des Unternehmens zum Zeitpunkt  $t$ . Die entsprechende Verlustfunktion über einen Zeitraum  $\Delta t$  ist gegeben durch die Formel:

$$L_{t+\Delta t} = -\Delta V_{t+\Delta t} = V_t - V_{t+\Delta t}.$$

Unter Verwendung des Risikomaßes *Value at Risk* ist das Risikokapital  $SCR$  definiert wie folgt:

$$P[L_{t+\Delta t} < SCR] = x\%,$$

wobei  $x\%$  das geeignete Sicherheitsniveau darstellt. D. h., das Risikokapital ist das  $x\%$ -Quantil der Verlustverteilung der ökonomischen Eigenmittel über den Zeitraum  $\Delta t$ .

Wenn man  $\Delta t = 2$  Jahre wählt, kann man entsprechend umformen:

$$L_{t+2} = V_t - V_{t+2} = V_t - V_{t+1} + V_{t+1} - V_{t+2} = L_{0;1} + L_{1;2},$$

wobei  $L_{0;1} := V_t - V_{t+1}$  und  $L_{1;2} := V_{t+1} - V_{t+2}$ .

Das Solvency II-Risikokapital entspricht dem *VaR* für  $L_{0;1}$  zum Sicherheitsniveau 99,5% (einjährige Risikosicht):

$$SCR_0 = Q_{L_{0;1}}(99,5\%).$$

Bei einem allgemeinen Zeitraum  $\Delta t$  und einem allgemeinen Sicherheitsniveau  $x\%$  kann man schreiben:

$$SCR_0 = Q_{L_{t+\Delta t}}(x\%).$$

Falls  $L_{t+\Delta t}$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist, gilt:

$$SCR_0 = Q_{L_{t+\Delta t}}(x\%) = \mu + \sigma Q_Z(x\%), \quad (2)$$



wobei  $Z$  einer Standardnormalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 folgt.

Laut Aufgabentext sind  $L_{0;1}$  und  $L_{1;2}$  identisch verteilt und folgen einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung  $\sigma$ . Sei  $\rho$  die Korrelation zwischen  $L_{0;1}$  und  $L_{1;2}$ .

Die Summe von normalverteilten Zufallsvariablen ist auch normalverteilt. Aus den allgemeinen Eigenschaften der Normalverteilung folgt:

$$\begin{aligned} E(L_{t+2}) &= 0, \\ \sigma_{L_{t+2}}^2 &= \sigma_{L_{0;1}}^2 + \sigma_{L_{1;2}}^2 + 2\rho\sigma_{L_{0;1}}\sigma_{L_{1;2}} = 2 \cdot \sigma^2(1 + \rho). \end{aligned} \quad (3)$$

(b) [8 Punkte] Wenn die Eigenmittelverluste eines jeden Jahres unabhängig voneinander sind, gilt laut Formel (3):

$$\begin{aligned} E(L_{t+2}) &= 0, \\ \sigma_{L_{t+2}}^2 &= 2 \cdot \sigma^2. \end{aligned}$$

Aus Formel (2) folgt deswegen:

$$\begin{aligned} SCR_{2 \text{ Jahre}}(99,5\%) &= Q_{L_{t+2}}(99,5\%) = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot Q_Z(99,5\%) = \\ &= \sqrt{2} \cdot SCR_0 = \sqrt{2} \cdot 1000 = 1414 \\ \Rightarrow \frac{\text{Eigenmittel}}{SCR_{2 \text{ Jahre}}(99,5\%)} &= \frac{2500}{1414} = 177\%. \end{aligned}$$

(c) [10 Punkte] In diesem Fall folgt aus den Formeln (2) und (3):

$$\begin{aligned} \sigma \cdot Q_Z(99,5\%) &= SCR_0 := \\ &:= SCR_{2 \text{ Jahre}}(x\%) = Q_{L_{t+2}}(x\%) = \sigma_{L_{t+2}} \cdot Q_Z(x\%) = \sigma \cdot \sqrt{2(1 + \rho)} \cdot Q_Z(x\%) \\ \Rightarrow Q_Z(x\%) &= \frac{Q_Z(99,5\%)}{\sqrt{2(1 + \rho)}} = 1,49. \end{aligned}$$

Durch lineare Interpolation der Daten in der Tabelle bestimmt man ein  $\alpha$  so dass:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \cdot 1,64 + \alpha \cdot 1,28 &=: 1,49 \Rightarrow \alpha = 0,42 \\ \Rightarrow x\% &= (1 - 0,42) \cdot 95\% + 0,42 \cdot 90\% = 93\% \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** [Modelle in der Versicherung - Personenversicherung] [30 Punkte]

Die Leichendorfer Rentenanstalt ist ein Lebensversicherungsunternehmen mit Sitz in Deutschland. Das Unternehmen verkauft ausschließlich klassische Lebensversicherungsprodukte mit Garantie. Alle Produkte sind überschussberechtigigt.

Die Kapitalanlageabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt hat verschiedene Anlagestrategien, deren Wirksamkeit in einer Monte-Carlo-Simulation überprüft wird, entwickelt, um die Garantie bei Ablauf darstellen zu können. Die Kapitalmarktpfade in der Monte-Carlo-Simulation werden durch einen Economic Scenario Generator (ESG) erzeugt.

Sie arbeiten in der Kapitalanlageabteilung der Leichendorfer Rentenanstalt und beschäftigen sich mit einer konkreten Anlagestrategie für den unten beschriebenen Teilbestand.

- Erlebensfallpolice, Garantierter Betrag bei Ablauf: 1000 Euro
- Laufzeit: 4 Jahre
- Einmalbeitrag bei Abschluss: 990 Euro
- Anlagestrategie:
  - Bei Abschluss des Vertrages wird eine 2 Jahre laufende Staatsanleihe ohne Zinskupons („Nullkuponanleihe“ oder „Zerobond“) höchster Bonität (AAA) gekauft. Der Kauf wird vollständig durch den Einmalbeitrag finanziert.
  - Nach zwei Jahren wird zu den dann gültigen Zinsen eine 2 Jahre laufende Staatsanleihe ohne Zinskupons höchster Bonität (AAA) gekauft. Nennwert der Anleihe ist der bei Ablauf garantierte Betrag.
  - Der zukünftige (in zwei Jahren) Anleihekauf wird durch die Erlöse aus der Rückzahlung der bei Abschluss gekauften zweijährigen Anleihe finanziert. Je nach Zinslage kann daraus für das Unternehmen zum Zeitpunkt des zweiten Anleihekaufs ein Gewinn oder ein Verlust entstehen.
  - Versicherungsnehmer werden zu 90% an den Gewinnen beteiligt. Verluste werden in voller Höhe von dem Unternehmen getragen.
- Best-Estimate-Annahmen:
  - Alle Kosten und alle biometrischen Annahmen (wie Sterblichkeit oder Storno) können vernachlässigt werden (d. h., sie sind gleich 0).
- Zinsannahmen:



- $r_t$ : Spot Rate,  $t$ -Jahre-Zins zu  $t = 0$ .
- $r_{1,3}$ : Forward Rate, 3-Jahre-Zins zu  $t = 1$ .
- $r_{2,2}$ : Forward Rate, 2-Jahre-Zins zu  $t = 2$ .

Certainty-Equivalent-Szenario		
Spot Rate $r_t, t \leq 2$	Forward Rate $r_{1,3}$	Forward Rate $r_{2,2}$
0,00%	1,09%	1,65%

Pfade der Monte-Carlo-Simulation			
Pfadnummer	Spot Rate $r_t, t \leq 2$	Forward Rate $r_{1,3}$	Forward Rate $r_{2,2}$
1	0,00%	0,15%	1,50%
2	0,00%	1,50%	1,90%
3	0,00%	1,60%	1,50%

Für die folgenden Berechnungen runden Sie alle Ergebnisse auf ganze Zahl kaufmännisch. Zinsen werden wie oben in Prozent mit zwei Nachkommastellen angegeben.

- Berechnen Sie den erwarteten Gewinn oder Verlust im Certainty-Equivalent-Szenario. [6 Punkte]
- Führen Sie einen  $1 = 1$  - Test für die Pfade der Monte-Carlo-Simulation zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2$  durch. [12 Punkte]
- Führen Sie eine Monte-Carlo-Simulation durch und berechnen Sie den Zeitwert der Optionen und Garantien (TVOG) für die Anlagestrategie. [12 Punkte]

**Hinweis:** Der Preis zum Zeitpunkt  $t$  eines Zerobonds mit Restlaufzeit  $T$  und Nennwert  $N$  ist:

$$P_t = \frac{N}{(1 + r_{t,t+T})^T}, \quad (4)$$

wobei  $r_{t,t+T}$  der entsprechende Terminzins (Forward Rate) für die Zeitspanne  $[t, t + T]$  ist.



### Lösungsvorschlag

- (a) [6 Punkte] Da die Zinskurve bis zu Jahr 2 flach und der Zins null ist, ist laut Formel (4) der Nennwert für den ersten Zerobond, der zu  $t = 0$  mit 990 Euro gekauft wird, genau gleich 990. D. h., in zwei Jahren bekommt man einfach den Einmalbeitrag zurück. Der Preis des zweiten Zerobonds beträgt:

$$P_2 = \frac{1000}{(1 + 1,65\%)^2} = 968.$$

Deswegen beträgt der Gewinn vor Beteiligung der Versicherungsnehmer  $990 - 968 = 22$ . Bei dem Unternehmen bleibt nur 10% davon, d. h., 2 Euro. Das ist der Gewinn aus Unternehmenssicht im Certainty-Equivalent-Szenario  $PVFP_{CE}$ . Wir haben den Gewinn zum Zeitpunkt  $t = 2$  berechnet. Der Zins bis  $t = 2$  ist jedoch null, folglich ist dieser auch gleich dem Barwert des Gewinns zu  $t = 0$ .

- (b) [12 Punkte] Analog zu den Berechnungen unter Punkt a) kann man in jedem Pfad der Monte-Carlo-Simulation den entsprechenden Bondpreis rechnen. Falls der Mittelwert der Preise über alle Szenarien gleich ist dem unter dem Certainty-Equivalent-Szenario berechneten Preis (968), dann ist der 1 = 1-Test bestanden. Man geht davon aus, dass das Certainty-Equivalent-Szenario die aktuellen Marktpreise richtig abbildet.

Die Berechnung der Bondpreise in den verschiedenen Pfaden erfolgt durch Anwendung der Formel (4). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Bondpreise in der Monte-Carlo-Simulation		
Pfadnummer	$t = 1$	$t = 2$
1	996	971
2	956	963
3	953	971
Mittelwert	968	968

D. h., der 1 = 1-Test ist sowohl zu  $t = 1$  als auch zu  $t = 2$  bestanden.

- (c) [12 Punkte] Der Gewinn bzw. Verlust aus Unternehmenssicht zu  $t = 2$  in jedem Pfad der Monte-Carlo-Simulation lässt sich wie im Certainty-Equivalent-Szenario berechnen. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Berechnung von $PVFP_{stoch}$		
Pfadnummer	Gewinn vor VN-Beteiligung	Gewinn nach VN-Beteiligung
1	19	2
2	27	3
3	19	2
Mittelwert ( $PVFP_{stoch}$ )	nicht relevant	2



Der *TVOG* beträgt:

$$TVOG = PVFP_{CE} - PVFP_{stoch} = 2 - 2 = 0.$$

**Aufgabe 5.** [Modellierung in der Schadenversicherung] [30 Punkte]

Die KHuK Versicherung AG betreibt das Geschäft der Kraftfahrtversicherung. Sie arbeiten im Risikomanagement und sollen den Schadenaufwand des Geschäftsjahres 2022 in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung modellieren. Ihnen liegt die folgende Liste mit den in den vergangenen Jahren eingetretenen Großschäden sortiert absteigend nach Schadenaufwand in TSD EUR vor. Die Großschadengrenze liegt bei der KHuK-Versicherung bei einer Mio. EUR. Alle Werte sind inflationsbereinigt.

Anfalljahr	Schadenaufwand	Anfalljahr	Schadenaufwand
2018	6.163	2018	1.484
2019	5.618	2021	1.392
2021	5.542	2018	1.313
2017	4.037	2018	1.170
2018	1.869	2021	1.148
2021	1.795	2020	1.112
2021	1.722	2019	1.107
2021	1.579	2018	1.061
2021	1.570	2020	1.043
2018	1.533	2018	1.006

Als Exposure verwenden Sie das Mittel der über das Geschäftsjahr bestehenden Verträge. In den vergangenen Jahren betrug dieses:

Geschäftsjahr	2017	2018	2019	2020	2021
Anzahl Verträge in TSD	100	120	180	190	200

Für das Jahr 2022 wird mit einem stagnierenden Vertragsvolumen von 200 TSD Verträgen gerechnet.

Eine Übersicht mit für die Großschadenmodellierung wichtigen Verteilungen liegt stets griffbereit auf Ihrem Schreibtisch. Dieser entnehmen Sie:

Name	Dichte	Erwartungswert	Varianz
Poisson-Verteilung	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$
Negative Binomial-Verteilung	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Pareto-Verteilung	$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha+1}$	$\frac{\alpha}{\alpha-1} \lambda$	$\frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}$





- (a) Bestimmen Sie je Anfalljahr die Anzahl der eingetretenen Großschäden und die Großschadenhäufigkeit. [5 Punkte]

**Lösungsvorschlag**

Geschäftsjahr	2017	2018	2019	2020	2021
Anzahl Verträge in TSD	100	120	180	190	200
Anzahl Großschäden	1	8	2	2	7
Großschadenhäufigkeit	0,01	0,0667	0,0111	0,0105	0,035



- (b) Multiplizieren Sie die Großschadenhäufigkeit für jedes Anfalljahr mit dem Planexposure für 2022 und schätzen Sie auf Basis dieser Größen Erwartungswert und Varianz der Verteilung der Großschadenanzahl für das Jahr 2022! [9 Punkte]

### Lösungsvorschlag

Geschäftsjahr	2017	2018	2019	2020	2021
Großschadenhäufigkeit	0,01	0,0667	0,0111	0,0105	0,035
Erwartungswert	2	13,333	2,222	2,105	7
quadratische Abweichung	11,1	64,02	9,67	10,41	2,78

Der Mittelwert beträgt damit 5,33 und die empirische Varianz 24,497.



- (c) Sie entscheiden sich dafür, eine negative Binomial-Verteilung an die ermittelten Größen anzupassen. Warum? [2 Punkte]

### **Lösungsvorschlag**

Von den in der Tabellen angegebenen Verteilungen eignen sich Poisson- und negative Binomial-Verteilung zur Modellierung von Schadenanzahlen. Die Varianz der Poisson-Verteilung entspricht dem Erwartungswert. Da die empirische Varianz in diesem Fall deutlich größer ist als der Mittelwert, ist die negative Binomial-Verteilung besser geeignet.



(d) Bestimmen Sie die Parameter der negativen Binomial-Verteilung! [4 Punkte]

**Lösungsvorschlag**

Es gelten

$$p = \frac{E(X)}{\text{Var}(X)}$$

und

$$r = \frac{(E(X))^2}{\text{Var}(X) - E(X)}$$

Somit ergibt sich  $p = 0,2177$  und  $r = 1,4835$ .



- (e) Zur Bestimmung der Schadenhöhenverteilung passen Sie eine Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\lambda = 1$  und  $\alpha = 1,9$  an. Wie könnten diese Werte zustande gekommen sein? Geben Sie die Verteilungsfunktion an! [6 Punkte]

### Lösungsvorschlag

Um zu prüfen, ob eine Pareto-Verteilung angemessen ist, empfiehlt sich ein Hill-Plot. Die Kurve sollte in eine Waagrechte übergehen. Der Wert, an dem das passiert, eignet sich zur Schätzung des charakteristischen Index  $\alpha$ . Die Großschadengrenze  $\lambda$  kann dann als der kleinste der Schäden gewählt werden, die dabei in die Berechnung eingehen. Die Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung erhält man durch Integration der angegebenen Dichte.

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{1,9}$$



- (f) Der Leiter der Rückversicherungsabteilung will einen Einzelschaden-XL-Vertrag abschließen und möchte von Ihnen wissen, wie hoch die Priorität - also der Betrag, ab dem die Rückversicherung den Schadenaufwand trägt - gewählt werden soll, damit im Mittel 5% der Großschäden diesen überschreiten. Wie viele Schäden hätten in den letzten 5 Jahren tatsächlich diesen Wert überschritten?  
[4 Punkte]

### Lösungsvorschlag

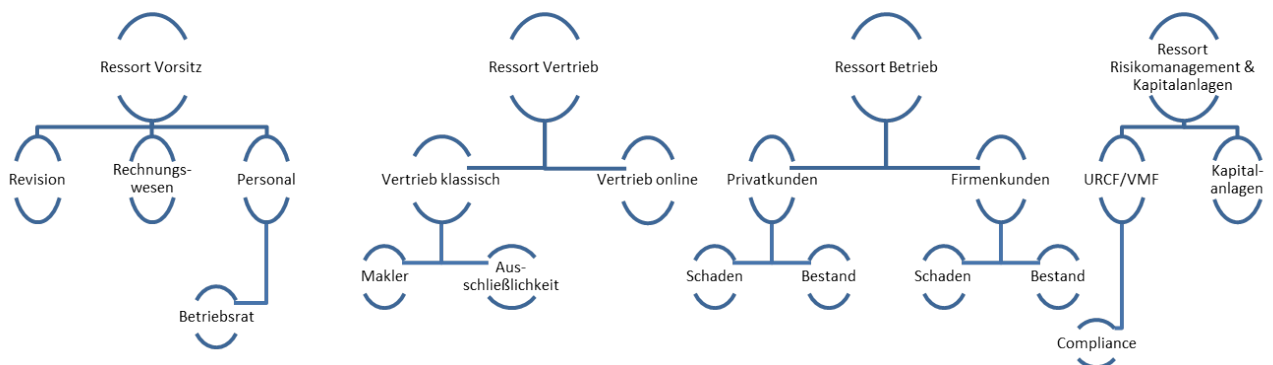
Wir invertieren die Verteilungsfunktion und erhalten die Quantilsfunktion

$$x = \frac{1,0}{(1 - P(X \leq x))^{\frac{1}{1,9}}}$$

und erhalten  $x(95\%) = 4,839$  Mio. EUR. Dieser wurde in den letzten 5 Jahren von drei Großschäden überschritten.

**Aufgabe 6.** [Solvency II, Governance, Aufbauorganisation] [20 Punkte]

Die Komplex Versicherung AG betreibt das ganze Spektrum der Schaden-/Unfallversicherung über verschiedene Vertriebswege sowohl im Privatkunden- als auch im gewerblichen Segment einschließlich Spezial-Geschäft mit Großrisiken industrieller Kunden. In der Dokumentation der Aufbauorganisation sind das Organigramm und der Geschäftsverteilplan in folgenden Darstellungen enthalten:



<b>Geschäftsverteilplan Komplex AG</b>		
<b>Ressort/Funktionen</b>	<b>Name/Gremium</b>	<b>Abteilungen</b>
Ressort Vorsitz	Dr. B. Oss	Personal
		Rechnungswesen
		Revision
Ressort Vertrieb	Dr. B. Oss	Vertrieb klassisch
		Vertrieb online
Ressort Betrieb	S. Meier	Privatkunden
		Firmenkunden
Ressort Risikomanagement & Kapitalanlagen	I. Mobilie	URCF/VMF
		Kapitalanlagen
Revision	A. Sesor	
Compliance	A. Sesor	
URCF	I. Mobilie	
VMF	VMF-Komitee	



- (a) Ordnen Sie die Abteilungen auf Basis der aufgrund ihrer Bezeichnungen nahe-  
liegenden Aufgaben den drei Verteidigungslinien zu! [3 Punkte]

### **Lösungsvorschlag**

Risikonehmende Einheiten (1. Verteidigungslinie): Personal, Rechnungswesen,  
Vertrieb klassisch, Vertrieb online, Privatkunden, Firmenkunden, Kapitalanla-  
gen

Risikoüberwachende Einheiten (2. Verteidigungslinie): URCF/VMF

Revision als dritte Verteidigungslinie

(Je drei korrekten Zuordnungen ein Punkt (aufgerundet))





(b) Worum handelt es sich bei den „MaGo“? [2 Punkte]

### **Lösungsvorschlag**

Es handelt sich um ein Rundschreiben der BaFin (VA) zu den Mindestanforderungen an die Geschäftsorganisation von Versicherungsunternehmen, die sich aus VAG und delegierter Verordnung zu SII aus ihrer Sicht ergeben.



- (c) Beschreiben Sie auf Grundlage der dem Organigramm und dem Geschäftsverteilplan zu entnehmenden Informationen kurz fünf aufsichtsrechtliche Anforderungen an die Geschäftsorganisation, die bei der Komplex Versicherung AG möglicherweise nicht erfüllt sind. Begründen Sie dies jeweils! [15 Punkte]

### Lösungsvorschlag

- Es müssen Vertretungsregelungen bestehen, was nicht erkennbar ist.
- Trennung der Zuständigkeiten bis einschließlich Ebene Geschäftsleitung: kritisch z.B. Kapitalanlagen und URCF/VMF-Tätigkeiten im selben Ressort
- Schlüsselfunktionen stehen gleichrangig und gleichberechtigt nebeneinander. Hier z.B. Compliance möglicherweise URCF untergeordnet.
- Es wird eine natürliche Person als „intern verantwortliche Person“ für die Schlüsselfunktion benötigt. Dies ist beim VMF-Komitee nicht der Fall.
- Geschäftsleiter kann nur im Einzelfall auch zugleich intern verantwortliche Person für eine Schlüsselfunktion sein. Hier z.B. Vorstand I.Mobilie als URCF.
- In der Regel kann eine natürliche Person nur für eine Schlüsselfunktion verantwortlich sein. Hier: A. Sesor gleichzeitig verantwortlich für Compliance und Revision.

(Je Beschreibung und Begründung 3 Punkte)

**Aufgabe 7.** *[Solvency II, Governance, Modellierung Schaden] [40 Punkte]*

Ganz anders dagegen ist das Geschäftsmodell der Simpel Versicherung AG, die ebenfalls Schadenversicherungsgeschäft betreibt. Diese arbeitet ausschließlich mit Assekuradeuren zusammen. Der Assekuradeur wird dabei mit einer zeitlich begrenzten Vollmacht zur Zeichnung von Versicherungsverträgen einer festgelegten Sparte und zur Regulierung der damit verbundenen Schäden ausgestattet. Risikoträger ist stets die Simpel Versicherung AG. Die Simpel Versicherung AG schließt die Verträge mit dem jeweiligen Assekuradeur nur für maximal ein Jahr und über eine ausgewählte – aber von Assekuradeur zu Assekuradeur variierenden - Sparte ab. Der Assekuradeur erhält eine vom Prämienvolumen proportional abhängige Provision als Vergütung. Der Assekuradeur liefert quartärllich Vertrags- und Schadeninformationen einschließlich der versicherungstechnischen Rückstellungen nach Solvency II an die Simpel Versicherung AG. Die Simpel Versicherung AG legt die Mittel, die zur Bedeckung der versicherungstechnischen Verpflichtungen benötigt werden, in Aktien an.

(a) Sind folgende Aussagen richtig oder falsch:

- (i) Die Simpel Versicherung AG benötigt eine Outsourcing-Leitlinie.
- (ii) Die Simpel Versicherung AG benötigt keine versicherungsmathematische Funktion, da die Rückstellungen zugeliefert werden.
- (iii) Die Simpel Versicherung AG kann gut von Diversifikationseffekten profitieren.
- (iv) Die Simpel Versicherung AG hat in jedem Fall nur kurzfristige versicherungstechnische Risiken.

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz! *[8 Punkte]*

**Lösungsvorschlag**

- (i) Richtig. Es handelt sich um Ausgliederung von Versicherungstätigkeiten (Vertragsverwaltung, Schadenabwicklung). Eine Outsourcing-Leitlinie ist dann rechtlich vorgeschrieben (Delegierte Verordnung Artikel 274).
- (ii) Falsch. Die Berechnung allein ersetzt nicht die Aufgaben der versicherungsmathematischen Funktion.
- (iii) Richtig. Durch geeigneten Sparten-Mix können Diversifikationseffekte ausgenutzt oder optimiert werden.



(iv) Falsch. Je nach Sparte kann die Abwicklung der Schäden lange dauern und für den Abwicklungszeitraum trägt die Simpel Versicherung AG das Abwicklungsrisiko

(richtige Einordnung ein Punkt, Begründung ein Punkt)



- (b) Beschreiben Sie fünf Risiken, die sich aus dem Geschäftsmodell der Simpel Versicherung AG abgesehen von den versicherungstechnischen Risiken ergeben und nennen Sie dabei die zugehörige Risikokategorie! [10 Punkte]

### **Lösungsvorschlag**

Strategisches Risiko: Das Geschäftsmodell funktioniert nicht. Kosten/Schäden zu hoch, um Gewinn zu erzielen.

Reputationsrisiko: Kundenbetreuung/Schadenabwicklung durch die Assekuradeure ist möglicherweise mangelhaft.

Marktrisiko: Der Wert der gehaltenen Aktien kann sich verändern.

Rechtsrisiko: Gesetzliche Regelungen zu Outsourcing können das Geschäft unprofitabel oder gar unmöglich machen.

Operationelles Risiko: Interne Prozesse beim Assekuradeur oder in der Datenübermittlung können fehlerhaft oder inadäquat sein.

...

Je ein Punkt für die Risikobeschreibung und die richtige Risikokategorie.



Die Sempel Versicherung AG hat zwei Vorstände. Vorstand A verantwortet das Privatkundengeschäft, Vorstand B das Firmenkundengeschäft. Die jährliche Vergütung ist vollständig variabel und bemisst sich für Vorstand A proportional zum Beitragsvolumen des Privatkundengeschäfts und für Vorstand B proportional zum Beitragsvolumen des Firmenkundengeschäfts.

- (c) Nennen sie vier Aspekte an der Vergütungsregelung, die vor dem Hintergrund einer guten Praxis oder gar aufsichtsrechtlichen Regelungen kritisch zu sehen sind. Geben Sie jeweils eine Begründung oder einen Vorschlag zur Verbesserung an! [8 Punkte]

### Lösungsvorschlag

- Die Vergütung bemisst sich nur am Vertriebsserfolg. Besser wäre, wenn auch der erzielte Gewinn einfließen würde.
- Die Vergütung fördert unter Umständen das Eingehen unangemessener Risiken. Besser wäre eine Bemessung an risikoorientierten Erfolgsgrößen.
- Die Vergütung bemisst sich je Vorstand nur an einer Kenngröße eines Teils des Geschäfts. Besser wäre, wenn für jeden Vorstand auch der Unternehmenserfolg insgesamt eine Rolle spielen würde.
- Die Vergütung bemisst sich nur am kurzfristigen Erfolg. Es sollte zumindest ein Teil der Vergütung erst bei langfristigem Erfolg ausbezahlt werden.
- Die Vergütung ist nicht ausgewogen. Ein Teil der Vergütung sollte fix sein oder es sollten Teile der Vergütung auf anderen Bemessungsgrundlagen basieren wie z.B. Mitarbeiterzufriedenheit, Erreichen von Projektzielen etc.
- ...

(2 Punkte je Angabe inklusive Begründung/Verbesserung)



- (d) Die Simpel Versicherung AG will ihr versicherungstechnisches Risiko selbst modellieren und fordert zu diesem Zweck Vertragsdaten und Schadendaten von den Assekuradeuren an. Nennen Sie vier mögliche Probleme, vor denen die Simpel Versicherung AG dabei stehen könnte! [8 Punkte]

### Lösungsvorschlag

- Die Modellierung erfordert Experten, die die Simpel Versicherung AG möglicherweise nicht hat.
- Die Assekuradeure können oder wollen die geforderten Daten nicht liefern.
- Die gelieferten Daten sind fehlerhaft.
- Die gelieferten Daten sind unvollständig.
- Die Daten werden uneinheitlich von den verschiedenen Assekuradeuren angeliefert.
- Die Daten basieren auf uneinheitlichen Vertragsgrundlagen wie Versicherungssummen, versicherte Schäden etc.
- Die Daten basieren auf uneinheitlichem Vorgehen bei der Schadenregulierung wie z.B. unterschiedliche Richtlinien beim Setzen der Schadenreserven, Abwicklungsgeschwindigkeit, Kulanzzahlungen etc.
- ...

(je zwei Punkte).



- (e) Die Sempel Versicherung AG schätzt die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust im Privatkundengeschäft auf 5% und für einen Verlust im Firmenkundengeschäft auf 14%. Bezüglich der Abhängigkeit zwischen diesen beiden Geschäftssegmenten nimmt sie an, dass Kendalls Tau 0,1 beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust in beiden Geschäftssegmenten bei einer Modellierung mit der Clayton-Copula? [6 Punkte]

*Hinweis: Die Clayton-Copula ist definiert durch:*

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty$$

*Der Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und dem Parameter  $\theta$  der Copula ist gegeben durch:*

$$\rho_{\tau}(U, V) = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

### Lösungsvorschlag

Die Clayton-Copula ist definiert durch:

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < \infty$$

Der Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und dem Parameter  $\theta$  der Copula ist gegeben durch:

$$\rho_{\tau}(U, V) = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

Umformen nach  $\theta$  und einsetzen von  $\rho_{\tau} = 0,1$  ergibt:

$$\theta = \frac{2\rho_{\tau}}{1 - \rho_{\tau}} = 0,2222$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit:

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = (0,05^{-0,2222} + 0,14^{-0,2222} - 1)^{-1/0,2222} = 0,0164.$$