Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Schadenversicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 13. Mai 2022

Hinweise:

-

Mitglieder der Prüfungskommission:

Christian Hipp, Martin Morlock,
Hanspeter Schmidli, Klaus D. Schmidt

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Für eine Stichprobe $\{X_k\}_{k\in\{1,\ldots,70\}}$ von lognormal–verteilten Zufallsvariablen mit den Parametern μ und σ^2 ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{70} X_k = 210.627 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{70} X_k^2 = 1553.120$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{70} \ln(X_k) = 43.738 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{70} (\ln(X_k))^2 = 98.830$$

(a) Schätzen Sie die Parameter der Verteilung mit Hilfe der Daten $\{X_k\}_{k\in\{1,\ldots,70\}}$ und der Momentenmethode.
(5 Punkte)

(b) Schätzen Sie die Parameter der Verteilung mit Hilfe der Daten $\{\ln(X_k)\}_{k\in\{1,\ldots,70\}}$ und der Momentenmethode.
(4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie für die Schätzer aus (a) und (b) das Solvenzkapital, das heißt, das Kapital s mit $P[X \leq s] = 0.995$.
(6 Punkte)

Lösung:

(a) Sei X eine lognormal–verteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ^2. Dann gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \\ \operatorname{var}[X] &= \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) \\ E[X^2] &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} X_k\right] &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \\ E\left[\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} X_k^2\right] &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \end{aligned}$$

Für die Momentenschätzer $\widehat{\mu}$ und $\widehat{\sigma}^2$ von μ und σ^2 erhält man daher

$$2\widehat{\mu} + \widehat{\sigma}^2 = 2\,\ln\left(\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} X_k\right) = 2\,\ln\left(\frac{210.627}{70}\right) = 2.203187$$

und

$$2\widehat{\mu} + 2\widehat{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} X_k^2\right) = \ln\left(\frac{1553.120}{70}\right) = 3.099526$$

Daraus ergibt sich $\widehat{\sigma}^2 = 0.896339$ und $\widehat{\mu} = 0.653424$.

(b) Die Zufallsvariable $\ln(X)$ ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2. Es gilt

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} \ln(X_k)\right] &= E[\ln(X)] = \mu \\ E\left[\frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} (\ln(X_k))^2\right] &= E[(\ln(X))^2] = \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

Für die Momentenschätzer $\widehat{\mu}$ und $\widehat{\sigma}^2$ von μ und σ^2 erhält man daher

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} \ln(X_k) = \frac{43.738}{70} = 0.624829$$

und

$$\widehat{\sigma}^2 + \widehat{\mu}^2 = \frac{1}{70}\sum_{k=1}^{70} (\ln(X_k))^2 = \frac{98.830}{70} = 1.411857$$

und damit $\widehat{\sigma}^2 = 1.411857 - 0.624829^2 = 1.021446$.

(c) Die Zufallsvariable $(\ln(X) - \mu)/\sigma$ ist standardnormalverteilt. Es gilt

$$P\left[\frac{\ln(X) - \mu}{\sigma} \leq 2.58\right] = 0.995$$

und damit

$$P[X \leq \exp(\mu + 2.58\,\sigma)] = 0.995$$

Für das Solvenzkapital $s = \exp(\mu + 2.58\,\sigma)$ erhält man unter Verwendung der Schätzer aus (a) den Schätzer

$$\widehat{s} = 22.11$$

und unter Verwendung der Schätzer aus (b) den Schätzer

$$\widehat{s} = 25.34$$

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 des Gesamtschadens eines Bestandes liegen die Schätzwerte $\widehat{\mu} = 1$ und $\widehat{\sigma}^2 = 2$ vor. Für eine Klasse von Verteilungsfunktionen F mit den Parametern a und b sind die Parameter so zu bestimmen, dass der Erwartungswert und die Varianz mit den jeweiligen Schätzwerten übereinstimmen.

(a) Wie muss man die Parameter für eine verschobene Exponentialverteilung mit

$$F(x) = (1 - e^{-a(x-b)})\, \chi_{(b,\infty)}(x)$$

wählen?
(4 Punkte)

(b) Wie muss man die Parameter für eine verschobene Pareto–Verteilung mit

$$F(x) = (1 - (a/(x+a))^b)\, \chi_{(0,\infty)}(x)$$

wählen?
(4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie für beide Verteilungen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Prämie der Höhe 1.5 nicht ausreicht, um den Gesamtschaden zu decken.
(4 Punkte)

(d) Wie würden Sie entscheiden, welches die passendere Verteilung ist?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Im Fall der verschobenen Exponentialverteilung besitzt die Zufallsvariable $S-b$ wegen

$$\begin{aligned} P[S-b \leq x] &= P[S \leq x+b] \\ &= (1-e^{-a(x+b-b)})\,\chi_{(b,\infty)}(x+b) \\ &= (1-e^{-ax})\,\chi_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

die Exponentialverteilung mit dem Parameter a. Daraus folgt zunächst

$$E[S-b] = \frac{1}{a} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{var}[S-b] = \frac{1}{a^2}$$

und sodann

$$\mu = E[S] = b + \frac{1}{a} \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 = \mathrm{var}[S] = \mathrm{var}[S-b] = \frac{1}{a^2}$$

Aus der Forderung $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 2$ ergibt sich $a = 1/\sqrt{2}$ und $b = 1-\sqrt{2}$.

(b) Im Fall der verschobenen Pareto–Verteilung besitzt die Zufallsvariable $S+a$ wegen

$$\begin{aligned} P[S+a \leq x] &= P[S \leq x-a] \\ &= \left(1-\left(\frac{a}{x-a+a}\right)^b\right)\chi_{(0,\infty)}(x-a) \\ &= \left(1-\left(\frac{a}{x}\right)^b\right)\chi_{(a,\infty)}(x) \end{aligned}$$

die Pareto–Verteilung mit den Parametern a und b. Daraus folgt zunächst

$$E[S+a] = \frac{ab}{b-1} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{var}[S+a] = \frac{a^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$$

und sodann

$$\mu = E[S] = \frac{a}{b-1} \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 = \mathrm{var}[S] = \mathrm{var}[S+a] = \frac{a^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$$

Daher gilt $\sigma^2/\mu^2 = b/(b-2)$, und aus der Forderung $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 2$ ergibt sich $b = 4$ und $a = 3$.

(c) Im Fall der verschobenen Exponentialverteilung mit den Parametern $a = 1/\sqrt{2}$ und $b = 1-\sqrt{2}$ gilt

$$P[S > 1.5] = e^{-(1.5-(1-\sqrt{2}))/\sqrt{2}} = 0.2583$$

und im Fall der verschobenen Pareto–Verteilung mit den Parametern $a = 3$ und $b = 4$ gilt

$$P[S > 1.5] = \left(\frac{3}{1.5+3}\right)^4 = 1.1975$$

(d) Die Exponentialverteilung ist eine Kleinschadenverteilung und die Pareto–Verteilung ist eine Großschadenverteilung. Erwarten wir also eine Großschadenverteilung, werden wir die Pareto–Verteilung wählen, ansonsten die Exponentialverteilung. Wir können die Verteilung auch grafisch wählen: Liegen die größten Schäden isoliert, handelt es sich um eine Großschadenverteilung, sonst um eine Kleinschadenverteilung. Schließlich könnten wir auch mit einem Anpassungstest bestimmen, welche Verteilung besser zu den Daten passt.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Die Schadenanzahl N und die Schadenhöhen X_i eines versicherten Risikos während einer Versicherungsperiode seien stochastisch unabhängig und diskret verteilt mit

n	0	1	2
$P[N = n]$	0.7	0.2	0.1

und

$$P[X_i = x] = 0.1$$

für $x \in \{1, \ldots, 10\}$ und $i \in \{1, 2\}$.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie Π_a, d. h., den Erwartungswert des Gesamtschadens S.
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[S = s]$ für $s \in \{0, 1, 2\}$.
(3 Punkte)

(c) Wie wird sich ein rational handelnder Versicherungsnehmer verhalten, falls er seine Schäden erst am Ende der Versicherungsperiode melden muss und eine Beitragsrückerstattung in Höhe von 2.5 erhält, wenn er keine Schäden meldet?
(2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie Π_c für den Fall (c).
(3 Punkte)

(e) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie Π_e für den Fall, dass (anstelle der Beitragsrückerstattung) Schäden der Höhe 1 und 2 vom Versicherungsnehmer selbst bezahlt werden.
(3 Punkte)

(f) Welche Tarifvariante – Beitragsrückerstattung gemäß (c) oder Selbstbeteiligung gemäß (e) – dürfte das Versicherungsunternehmen vorziehen? Geben Sie ein Stichwort als Begründung an.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $E[N] = 0.4$ und $E[X_i] = 5.5$. Aus der ersten Gleichung von Wald folgt daher

$$\Pi_a = E[S] = E[N]\,E[X_i] = 0.4 \times 5.5 = 2.2$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[S=0] &= P[N=0] \\
&= 0.7 \\
P[S=1] &= P[N=1]\,P[X_1=1] \\
&= 0.2 \times 0.1 \\
&= 0.02 \\
P[S=2] &= P[N=1]\,P[X_1=2] + P[N=2]\,P[X_1=1]\,P[X_2=1] \\
&= 0.2 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \\
&= 0.021
\end{aligned}$$

(c) Ein rationaler Versicherungsnehmer wird die Schäden selbst tragen, falls die Summe dieser Schäden kleiner ist als die Beitragsrückerstattung. Im Fall von nur einem Schaden betrifft dies die Schadenhöhen 1 und 2, bei zwei Schäden wird er nur selbst regulieren, falls beide Schadenhöhen 1 sind.

(d) Im Fall der Beitragsrückerstattung ist die Versicherungsleistung gegeben durch

$$T := 2.5\,\chi_{\{S\le 2\}} + S\,\chi_{\{S\ge 3\}} = 2.5\,\chi_{\{S\le 2\}} + S - S\,\chi_{\{S\le 2\}}$$

Für die Nettorisikoprämie gilt daher in diesem Fall

$$\Pi_c = E[T] = 2.5\,P[S\le 2] + E[S] - E[S\,\chi_{\{S\le 2\}}]$$

Nach (b) gilt

$$P[S \le 2] = 0.741$$

und nach (a) gilt

$$E[S] = 2.2$$

Des Weiteren gilt nach (b)

$$E[S\,\chi_{\{S\le 2\}}] = 0 + P[S=1] + 2\,P[S=2] = 0.02 + 2 \times 0.021 = 0.062$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Pi_c &= 2.5\,P[S\le 2] + E[S] - E[S\,\chi_{\{S\le 2\}}] \\
&= 2.5 \times 0.741 + 2.2 - 0.062 \\
&= 3.9905
\end{aligned}$$

(e) Wenn vom Versicherungsnehmer Schäden der Höhe 1 und 2 selbst bezahlt werden, treten an die Stelle der Schadenhöhen X_i die Schadenhöhen

$$Y_i := X_i \, \chi_{\{X_i \geq 3\}}$$

Es gilt $E[Y_i] = 5.2$ und aus der ersten Gleichung von Wald folgt

$$\Pi_e = E[N] \, E[Y_i] = 0.4 \times 5.2 = 2.08$$

(f) Der Tarif mit Selbstbehalt hat gegenüber dem Tarif mit Beitragsrückerstattung für das Versicherungsunternehmen den Vorteil, dass er den Verwaltungsaufwand und die Zahlungsvorgänge reduziert und zu einer attraktiveren Prämie führt.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Bonus–Malus–System eines Versicherungsunternehmens hat die Klassen $0, 1, 2$.

– Einstiegsklasse ist die Klasse 0.

– Bei einem schadenfreien Verlauf im letzten Versicherungsjahr wird ein Versicherungsnehmer im nächsten Versicherungsjahr eine Klasse höher eingestuft oder er bleibt in der höchsten Klasse 2; im Schadenfall wird er im Folgejahr in die Klasse 0 eingestuft.

– Alle Versicherungsnehmer, die sich im Versicherungsjahr i in der Klasse 1 bzw. 2 befinden, erhalten einen Rabatt von 20% bzw. 40% auf die Basisprämie Π_i für Jahr i.

– Dem Versicherungsunternehmen ist bekannt, dass sein Kollektiv zu 70% aus Versicherungsnehmern des Typs A und zu 30% aus Versicherungsnehmern des Typs B besteht.

– Im Laufe eines Jahres bleibt ein Versicherungsnehmer des Typs A mit der Wahrscheinlichkeit 0.9 und ein Versicherungsnehmer des Typs B mit der Wahrscheinlichkeit 0.8 schadenfrei.

Im Schadenfall beträgt der Jahresgesamtschaden eines Versicherungsnehmers 1000.

(a) Berechnen Sie den erwarteten Schadenbedarf eines Versicherungsnehmers, von dem nicht bekannt ist, zu welchem Typ er gehört.
(4 Punkte)

(b) Berechnen Sie die (dann stationäre) Verteilung der Versicherungsnehmer des Typs A bzw. B auf die Klassen $0, 1, 2$ im Versicherungsjahr 3.
(4 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Basisprämie Π_3 für das dritte Jahr. Π_3 ist so zu bestimmen, dass der Erwartungswert der Prämieneinnahme im dritten Jahr gleich dem Erwartungswert der Schadenzahlungen ist.
(4 Punkte)

(d) Ist die Höhe der Rabattierung risikogerecht?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Die Schadeneintrittswahrscheinlichkeit eines Versicherungsnehmers, von dem nicht bekannt ist, zu welchem Typ er gehört, ist das entsprechend der Zusammensetzung des Bestandes gewichtete Mittel der Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten der Versicherungsnehmer von Typ A und B. Sie beträgt daher $0.1 \times 0.7 + 0.2 \times 0.3 = 0.13$. Zusammen mit dem Jahresgesamtschaden in Höhe von 1000 im Schadenfall ergibt sich für den erwarteten Schadenbedarf der Wert 130.

(b) Für Versicherungsnehmer mit Schadeneintrittswahrscheinlichkeit p hat die Übergangsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} p & p & p \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

Daher sind für diese Versicherungsnehmer die Verteilungen auf die Klassen 0,1,2 in den ersten drei Versicherungsjahren durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p \\ 1-p \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p \\ (1-p)p \\ (1-p)^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für Versicherungsnehmer von Typ A bzw. B gilt $p = 0.1$ bzw. $p = 0.2$, und damit im dritten Versicherungsjahr

$$\begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.09 \\ 0.81 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.16 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

(c) Bei der Bestimmung der Basisprämie Π_3 für das dritte Jahr sind die Rabatte und die Zusammensetzung des Bestandes zu berücksichtigen. Bei einer Basisprämie Π_3 ergibt sich für Versicherungsnehmer mit Schadeneintrittswahrscheinlichkeit $p = 0.1$ die Prämie

$$\Big(1 \times 0.10 + 0.8 \times 0.09 + 0.6 \times 0.81\Big)\Pi_3 = 0.658\,\Pi_3$$

und für Versicherungsnehmer mit Schadeneintrittswahrscheinlichkeit $p = 0.2$ ergibt sich die Prämie

$$\Big(1 \times 0.20 + 0.8 \times 0.16 + 0.6 \times 0.64\Big)\Pi_3 = 0.712\,\Pi_3$$

Für das entsprechend der Zusammensetzung des Bestandes gewichtete Mittel dieser Prämien ergibt sich wegen $0.658 \times 0.7 + 0.712 \times 0.3 = 0.6742$ der Wert

$$0.6742\,\Pi_3$$

Nach dem Äquivalenzprinzip muss Π_3 so gewählt werden, dass

$$0.6742\,\Pi_3 = 130$$

gilt. Daraus ergibt sich $\Pi_3 = 192.82$.

(d) Die risikogerechte Prämie für einen Versicherungsnehmer des Typs A ist gleich $1000 \times 0,1 = 100$. Diese Versicherungsnehmer befinden sich überwiegend in der Klasse 2 mit der Nettoprämie $192.82 \times 0.6 = 115.69$. Für die 81% der Versicherungsnehmer des Typs A ist dies eine recht gute risikoadäquate Einstufung.
Die risikogerechte Prämie für einen Versicherungsnehmer des Typs B ist gleich $1000 \times 0.2 = 200$. Auch diese Versicherungsnehmer befinden sich überwiegend in der Klasse 2 mit der Nettoprämie 115.69. Damit werden 64% der Versicherungsnehmer des Typs B durch die anderen Versicherungsnehmer deutlich subventioniert, insbesondere durch die zahlreicheren Versicherungsnehmer des Typs A. Nur die 20% der Versicherungsnehmer des Typs B in der Klasse 0 zahlen in etwa eine risikoadäquate Prämie.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck enthält die kumulierten Schadenzahlungen $S_{i,k}$ für die Anfalljahre 2019 bis 2021 sowie a–priori Schätzer γ^{extern} des Abwicklungsmusters für Quoten und a–priori Schätzer α^{extern} der erwarteten Endschadenstände.

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**a–priori Endschadenstand** α_i^{extern}
2019	656	800	848	900
2020	720	920		1000
2021	880			1100
γ_k^{extern}	0.80	0.92	1	

(a) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten.

(b) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Loss–Development Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten.

(c) Schätzen Sie die Gesamtreserve mit dem Chain–Ladder Verfahren.

(d) Berechnen Sie die Chain–Ladder Quoten.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Mit dem Bornhuetter–Ferguson Verfahren erhält man die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S_{2020,2}^{\mathrm{BF}} &= 920 + 0.08 \times 1000 &&= 1000 \\ S_{2021,2}^{\mathrm{BF}} &= 880 + 0.20 \times 1100 &&= 1100 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R_{2020}^{\mathrm{BF}} &= 1000 - 920 &&= 80 \\ R_{2021}^{\mathrm{BF}} &= 1100 - 880 &&= 220 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{BF}} = 80 + 220 = 300$$

(b) Mit dem Loss–Development Verfahren erhält man die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S_{2020,2}^{\mathrm{LD}} &= \frac{920}{0.92} &&= 1000 \\ S_{2021,2}^{\mathrm{LD}} &= \frac{880}{0.80} &&= 1100 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R_{2020}^{\mathrm{LD}} &= 1000 - 920 &&= 80 \\ R_{2021}^{\mathrm{LD}} &= 1100 - 880 &&= 220 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{LD}} = 80 + 220 = 300$$

(c) Für die Chain–Ladder Faktoren gilt

$$\begin{aligned} \varphi_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{848}{800} &&= 1.06 \\ \varphi_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{800 + 920}{656 + 720} &&= 1.25 \end{aligned}$$

Mit dem Chain–Ladder Verfahren erhält man daher die Endschadenstände

$$\begin{aligned} S_{2020,2}^{\mathrm{CL}} &= 920 \times 1.06 &&= 975.2 \\ S_{2021,2}^{\mathrm{CL}} &= 880 \times 1.25 \times 1.06 &&= 1166 \end{aligned}$$

und damit die Anfalljahrreserven

$$\begin{aligned} R_{2020}^{\mathrm{CL}} &= 975.2 - 920 &&= 55.2 \\ R_{2021}^{\mathrm{CL}} &= 1166 - 880 &&= 286 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gesamtreserve

$$R^{\mathrm{CL}} = 55.2 + 286 = 341.2$$

(d) Für die Chain–Ladder Quoten gilt

$$
\begin{aligned}
\gamma_2^{\mathrm{CL}} &= 1 \\
\gamma_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{1}{1.06} \approx 0.94 \\
\gamma_0^{\mathrm{CL}} &= \frac{0.94}{1.25} \approx 0.75
\end{aligned}
$$

(e) Die Loss–Development Gesamtreserve stimmt mit der Bornhuetter–Ferguson Gesamtreserve überein.
Die Chain–Ladder Gesamtreserve ist deutlich höher als die Loss–Development Gesamtreserve; dies ist darauf zurückzuführen, dass die Chain–Ladder Quote für das Abwicklungsjahr 0 kleiner ist als der a–priori Schätzer und damit eine stärkere Hebelwirkung auf den besonders hohen aktuellen Schadenstand des Anfalljahres 2021 hat.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Das folgende Abwicklungsdreieck enthält die Prämien π_i für die Anfalljahre 2019 bis 2021 und die in den Abwicklungsjahren 0 bis 2 geleisteten Zahlungen $Z_{i,k}$ sowie a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile:

Anfall–	**Abwicklungsjahr** k			**Prämie**
jahr i	0	1	2	π_i
2019	850	235	50	1250
2020	870	165		1250
2021	935			1250
$\vartheta_k^{\text{extern}}$	0.80	0.16	0.04	

Es wird angenommen, dass die erwarteten Endschadenquoten für alle Anfalljahre identisch sind.

(a) Schätzen Sie die erwartete Endschadenquote mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile.

(b) Schätzen Sie die Reserve für 2022 mit dem Cape–Cod Verfahren unter Verwendung der a–priori Schätzer für das Abwicklungsmuster für Anteile.

(c) Schätzen Sie die erwartete Endschadenquote mit dem additiven Verfahren.

(d) Schätzen Sie die Reserve für 2022 mit dem additiven Verfahren.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung:

(a) Beim Cape–Cod Verfahren wird die erwartete Endschadenquote durch die Cape–Cod Endschadenquote κ^{CC} geschätzt. Für die Berechnung von κ^{CC} benötigt man die Summe der aktuellen Schadenstände und die Summe der verbrauchten Prämien. Aus dem Abwicklungsdreieck für Zuwächse erhält man mit

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2
2019	850	1085	1135
2020	870	1035	
2021	935		

das Abwicklungsdreieck für Schadenstände und für die verbrauchten Prämien erhält man mit den a–priori Schätzern γ^{extern} für das Abwicklungsmuster für Quoten mit

Anfall–jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2019			1250	1250
2020		1200		1250
2021	1000			1250
$\vartheta_k^{\text{extern}}$	0.80	0.16	0.04	
γ_k^{extern}	0.80	0.96	1	

die verbrauchten Prämien. Daher gilt

$$\kappa^{\text{CC}} = \frac{935 + 1035 + 1135}{1000 + 1200 + 1250} = \frac{3105}{3450} = 0.9$$

(b) Für die Reserve für 2022 gilt

$$R_{2022}^{\text{CC}} = Z_{2021,1}^{\text{CC}} + Z_{2020,2}^{\text{CC}}$$

und wegen

$$\begin{aligned} Z_{2021,1}^{\text{CC}} &= \vartheta_1^{\text{extern}}\,\pi_{2021}\,\kappa^{\text{CC}} &= 0.16 \times 1250 \times 0.9 &= 180 \\ Z_{2020,2}^{\text{CC}} &= \vartheta_2^{\text{extern}}\,\pi_{2020}\,\kappa^{\text{CC}} &= 0.04 \times 1250 \times 0.9 &= 45 \end{aligned}$$

erhält man

$$R_{2022}^{\text{CC}} = 180 + 45 = 225$$

(c) Für die additiven Schadenquotenzuwächse gilt

$$\begin{aligned} \zeta_2^{\text{AD}} &= \frac{50}{1250} = 0.04 \\ \zeta_1^{\text{AD}} &= \frac{235 + 165}{1250 + 1250} = 0.16 \\ \zeta_0^{\text{AD}} &= \frac{850 + 870 + 935}{1250 + 1250 + 1250} = 0.708 \end{aligned}$$

Für die additive Endschadenquote erhält man daher

$$\kappa^{\mathrm{AD}} \;=\; 0.04 + 0.16 + 0.708 \;=\; 0.908$$

(d) Für die Reserve für 2022 erhält man

$$R^{\mathrm{AD}}_{2022} \;=\; Z^{\mathrm{AD}}_{2021,1} + Z^{\mathrm{AD}}_{2020,2} \;=\; 0.16 \times 1250 + 0.04 \times 1250 \;=\; 250$$

(e) Die additive Reserve ist etwa 11% höher als die Cape–Cod Reserve. Der Grund liegt darin, dass das additive Verfahren gerade das Cape–Cod Verfahren mit additiven Quoten ist und dass im vorliegenden Fall die additiven Anteile $\vartheta^{\mathrm{AD}}_k := \zeta^{\mathrm{AD}}_k/\kappa^{\mathrm{AD}}$ für die Abwicklungsjahre $k = 1$ und $k = 2$ ebenfalls etwa 11 % höher sind als die externen Anteile $\vartheta^{\mathrm{extern}}_k$, während die additive Endschadenquote κ^{AD} mit der Cape–Cod Endschadenquote κ^{CC} fast identisch ist.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Eine Schadenexzedentenrückversicherung (XL–Vertrag) mit Priorität $M_{\text{XL}} > 0$ und Limit $L_{\text{XL}} > 0$ zahlt bei einem Einzelschaden der Höhe X den Betrag

$$\hat{X} = \min\{\max\{X - M_{\text{XL}}, 0\}, L_{\text{XL}}\}$$

Eine Stop–Loss Rückversicherung (SL–Vertrag) mit Priorität $M_{\text{SL}} > 0$ und Limit $L_{\text{SL}} > 0$ zahlt bei einem Gesamtschaden der Höhe S (nach Abzug der Zahlungen aus dem XL–Vertrag) den Betrag

$$\hat{S} = \min\{\max\{S - M_{\text{SL}}, 0\}, L_{\text{SL}}\}$$

Ein Erstversicherer hat für einen Bestand einen XL–Vertrag mit $M_{\text{XL}} = 2000$ und $L_{\text{XL}} = 3000$ sowie einen SL–Vertrag mit $M_{\text{SL}} = 5000$ und $L_{\text{SL}} = 10000$ abgeschlossen.

(a) Welche Schadensumme muss der Erstversicherer nach Rückversicherung bezahlen, wenn 10 Schäden der Höhe 3000, 5 Schäden der Höhe 4000, 2 Schäden der Höhe 6000 und 1 Schaden der Höhe 8000 auftreten?
(7 Punkte)

(b) Welche Schadensumme muss der Erstversicherer nach Rückversicherung bezahlen, wenn 20 Schäden der Höhe 3000, 10 Schäden der Höhe 4000, 4 Schäden der Höhe 6000 und 2 Schäden der Höhe 8000 auftreten?
(5 Punkte)

(c) Warum ist die Schadensumme nach Rückversicherung bei Variante (b) nicht das Doppelte der Schadensumme bei Variante (a)?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Durch den XL–Vertrag wird ein Schaden der Höhe X auf

$$X - \hat{X} = X - \min\{\max\{X - 2000, 0\}, 3000\}$$

reduziert, also 3000 auf 2000, 4000 auf 2000, 6000 auf 3000 und 8000 auf 5000. Die Schadensumme S nach Abzug der Zahlungen aus dem XL–Vertrag ist demnach

$$S = 10 \times 2000 + 5 \times 2000 + 2 \times 3000 + 1 \times 5000 = 41000$$

Durch den SL–Vertrag wird sie auf

$$S - \hat{S} = S - \min\{\max\{S - 5000, 0\}, 10000\} = 31000$$

reduziert.

(b) Da nur die jeweiligen Anzahlen der Schadenhöhen verdoppelt werden, ist die Schadensumme nach Abzug der Zahlungen aus dem XL–Vertrag das Doppelte der entsprechenden Schadensumme unter (a), also 82000. Durch den SL–Vertrag wird sie auf 72000 reduziert.

(c) Weil die Zahlung aus dem SL–Vertrag in beiden Fällen dieselbe ist.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Erstversicherer will einen Bestand rückversichern, den er durch das kollektive Modell mit der Schadenzahl N und den Schadenhöhen $X_1, X_2, ...$ beschreibt. Er nimmt an, dass N die Poisson–Verteilung mit Erwartungswert 10 besitzt, dass

$$P[X_i = 50] = 0.8 \qquad P[X_i = 200] = 0.1 \qquad P[X_i = 600] = 0.1$$

gilt und dass seine Prämieneinnahme 1500 betragen wird.

– Ein Rückversicherer bietet an, für eine Rückversicherungsprämie von 500 bei jedem Schaden größer als 100 die Hälfte des Schadens zu erstatten.

– Der Erstversicherer hat auch die Option, seinen Bestand durch den Zukauf eines gleichartigen und vom ursprünglichen Bestand unabhängigen Bestand zu verdoppeln; damit verdoppelt sich die Prämieneinnahme.

(a) Zeigen Sie, dass im vorliegenden kollektiven Modell für den Gesamtschaden

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i$$

des Bestandes die Gleichung $\text{var}[S] = E[N]\, E[X_1^2]$ gilt.
(4 Punkte)

(b) Welche Entscheidung, Rückversicherung oder Zukauf, ist für den Erstversicherer optimal, gemessen am Variationskoeffizienten $\sqrt{\text{var}[G]}/E[G]$ seines Gewinnes $G := H - S$? Dabei bezeichnet H die jeweilige Prämieneinnahme und S den Gesamtschaden des Erstversicherers nach Rückversicherung oder mit Zukauf.
(8 Punkte)

(c) Warum könnte der Erstversicherer sich eher gegen einen Zukauf entscheiden?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Im kollektiven Modell gilt für die Varianz des Gesamtschadens S

$$\mathrm{var}[S] = E[N]\,\mathrm{var}[X_1] + \mathrm{var}[N]\,(E[X_1])^2$$

Da die Schadenzahl N im vorliegenden Fall eine Poisson–Verteilung besitzt, gilt $\mathrm{var}[N] = E[N]$, und daraus ergibt sich wegen $\mathrm{var}[X_1] = E[X_1^2] - (E[X_1])^2$

$$\mathrm{var}[S] = E[N]\,\mathrm{var}[X_1] + E[N]\,(E[X_1])^2 = E[N]\,E[X_1^2]$$

(b) • Mit Rückversicherung ergeben sich für den Erstversicherer die verbleibenden Schadenhöhen

$$X_{R,i} := 50\,\chi_{\{X_i=50\}} + 100\,\chi_{\{X_i=200\}} + 300\,\chi_{\{X_i=600\}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} E[X_{R,i}] &= 80 \\ E[X_{R,i}^2] &= 12000 \end{aligned}$$

Für den Gesamtschaden $S_R := \sum_{i=1}^N X_{R,i}$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} E[S_R] &= E[N]\,E[X_{R,i}] = 10 \times 80 = 800 \\ \mathrm{var}[S_R] &= E[N]\,E[X_{R,i}^2] = 10 \times 12000 = 120000 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Prämieneinnahme des Erstversicherers und der Rückversicherungsprämie ist der Gewinn durch

$$G_R := 1500 - 500 - S_R = 1000 - S_R$$

gegeben. Es gilt

$$E[G_R] = E[1000 - S_R] = 1000 - E[S_R] = 1000 - 800 = 200$$

und

$$\mathrm{var}[G_R] = \mathrm{var}[S_R] = 120000$$

und damit $\sqrt{\mathrm{var}[G_R]}/E[G_R] = 1.73$.

• Bei einer Verdoppelung des Bestandes durch Zukauf ergibt ist der Gesamtschaden des Erstversicherers durch

$$S_Z := S + S'$$

mit

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{und} \qquad S' := \sum_{i=1}^{N'} X_i'$$

gegeben, wobei N' eine Zufallsvariable ist, die dieselbe Verteilung wie N besitzt, und $X'_1, X'_2, \ldots$ Zufallsvariable sind, die dieselbe Verteilung wie $X_1, X_2, \ldots$ besitzen. Aus der Unabhängigkeitsannahme folgt, dass die Zufallsvariable $N + N'$ die Poisson–Verteilung mit Erwartungswert 20 besitzt und dass

$$S_Z = \sum_{i=1}^{N+N'} X_i$$

gilt. Da sich durch den Zukauf die Prämieneinnahme verdoppelt, ist der Gewinn durch

$$G_Z := 2 \times 1500 - S_Z = 3000 - S_Z$$

gegeben. Daraus ergibt sich wie vorher $\sqrt{\mathrm{var}[G_Z]}/E[G_Z] = 1.53$.
• Der kleinste Wert des Variationskoeffizienten ergibt sich daher beim Zukauf.

(c) Beim Vergleich werden die Acquisekosten für den zusätzlichen Bestand nicht berücksichtigt.