Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A / Spezialwissen ERM 1

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 28. Mai 2021

Hinweise:

- Zwischen dem persönlichen Login zum Download der Prüfungsaufgaben und dem Abschluss des Uploads der Lösungen ist jeglicher Kontakt zu anderen Personen (mit Ausnahme des Support-Teams) bezüglich der Prüfungsaufgaben untersagt. Abgesehen davon gibt es bei dieser Prüfung keine Beschränkung bei der Verwendung von Hilfsmitteln.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße. *[24 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie Vor- und Nachteile der Risikomaße Value at Risk, Expected Shortfall und Expektile im Vergleich aus axiomatischer Sicht.

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie das Expektil $e_\alpha(X)$ einer Pareto-verteilten Verlustvariablen mit der Dichte

$$f(x) = 2x^{-3} \cdot 1_{(1,\infty)}(x).$$

(c) *[12 Punkte]* Sei X eine stetige Verlustvariable mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. F bezeichne die Verteilungsfunktion von X und $e := e_\alpha(X)$ das α-Expektil.

(i) *[5 Punkte]* Zeigen Sie $\frac{\mathbb{E}(X)-e}{\mathbb{E}(X-e)^+} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$ und folgern Sie

$$\mathbb{E}(X|X > e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right) \cdot e + \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))} \cdot \mathbb{E}(X).$$

Hinweis. Es bezeichnen $(x)^+ = \max(0, x)$ den Positivteil und $x^- = -\min(x, 0)$ den Negativteil. Für alle $x, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x-z)^+ - (x-z)^- = x - z$.

(ii) *[7 Punkte]* Für Verlustvariablen X mit $\mathbb{E}(X) = 0$ vereinfacht sich die Beziehung aus (i) zu

$$\mathbb{E}(X|X > e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right) \cdot e,$$

wobei $\theta := F(e)$ gesetzt wird. Wir nehmen zusätzlich an, dass F streng monoton wachsend ist, so dass $e = VaR_\theta(X)$ gilt.

(α) *[4 Punkte]* Geben Sie zwei verschiedene Schätzverfahren für den Expected Shortfall $ES_\theta(X)$ zum Niveau θ auf Basis einer Stichprobe vom Umfang m aus der Verteilung von X an.

(β) *[3 Punkte]* Auf der Grundlage einer Zeitreihe von Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ für ein hinreichend großes n, soll der Schätzer mit dem kleineren Scorewert

$$s_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}), \; i = 1, 2,$$

vorgezogen werden, wobei $m < n$ und die Scoring-Function S gegeben ist durch

$$S(y, x) = \begin{cases} (1-\alpha) \cdot (y-x)^2; & x \le y \\ \alpha \cdot (y-x)^2 & ; \quad x > y. \end{cases}$$

Kommentieren Sie diesen Vorschlag aus axiomatischer Sicht.

Aufgabe 2. Parameterrisiko. *[21 Punkte]*

Die Verlustgröße X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$-verteilt mit **unbekanntem** $\mu \in \mathbb{R}$ und **bekanntem** $\sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$. Es sei $\alpha \in (0, 1)$.

(a) *[12 Punkte]* In einem Bayesianischen Ansatz werde der unbekannte Parameter μ als $\mathcal{N}(\theta, \tau^2)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ und $\tau^2 \in \mathbb{R}^+$ angenommen. Es liegen die Beobachtungswerte $x_1, \dots, x_n$ vor. In dieser Situation gilt:

- Die Randverteilung von X ist $\mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2 + \tau^2)$.
- Die a posteriori Verteilung von μ, gegeben x_1, ist $\mathcal{N}(\theta_1, \tau_1^2)$ mit

$$\tau_1^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad \theta_1 = \tau_1^2\left[\frac{x_1}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2}\right].$$

Leiten Sie aus diesen Informationen die Vorhersageverteilung von X, gegeben $x_1, \dots, x_n$ her und quantifizieren Sie das Parameterrisiko, das bei der Verwendung des Value at Risk zum Niveau α der Verteilung $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$ als Schätzwert für den Value at Risk von X zum Niveau α entsteht.

(b) *[9 Punkte]* Der unbekannte Parameter werde durch den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ auf Basis einer unabhängigen Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ geschätzt. Geben Sie den Schätzer $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$ für das Risikomaß $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ an und bestimmen Sie das Residualrisiko, d.h. den VaR_α der Residualposition $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$.

Aufgabe 3. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle. *[19 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Sei $S > T > 0$. $P(T,S)$ bezeichne den Preis eines Zerobonds mit Fälligkeit S zur Zeit T. Im Gaußschen Zinsmodell mit konstanter Volatilität σ hat $P(T,S)$ die Darstellung

$$P(T,S) = \frac{P(0,S)}{P(0,T)} \cdot Z,$$

wobei $Z \sim LN\left(-\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem T-Forward Maß und $Z \sim LN\left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem S-Forward Maß mit $\tau := \sigma^2(S-T)^2 T$ gilt. Die aktuelle Zinsstrukturkurve sei durch die Preise $P(0,t) = \exp(-0,02 \cdot t)$ der Zerobonds mit Fälligkeit t gegeben. Bestimmen Sie den Preis zur Zeit $t = 0$ einer europäischen Call-Option mit Ausübungszeitpunkt 1 und Strike $K = 0,95$ auf einen Zerobond mit Fälligkeit 2. Gehen Sie von $\sigma = 0,1$ aus und verwenden Sie die Standardnormalverteilungsfunktion in der Darstellung Ihres Ergebnisses.

(b) *[9 Punkte]* Sei $F(t,T,S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T \geq t$ und Fälligkeit $S > T$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem S-forward-Maß Q^S bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße. *[25 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Illustrieren Sie anhand eines Praxisbeispiels die Bedeutung von low frequency high severity events im Bereich der Schadensversicherung, und erläutern Sie, warum diese Ereignisse Herausforderung für das aktuarielle Risikomanagement darstellen. Wie kann EVT beim Management derartiger Risiken helfen?

(b) *[10 Punkte]* In der folgenden Grafik 1 finden Sie simulierte Schadendaten(4000 Datenpunkte) und den zugehörigen mean excess plot. Erläutern Sie kurz, wie Sie mittels der peaks over threshold Methode den tail der Verteilung der Daten schätzen können. Welchen Wert würden Sie etwa für den Parameter ξ erwarten: $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

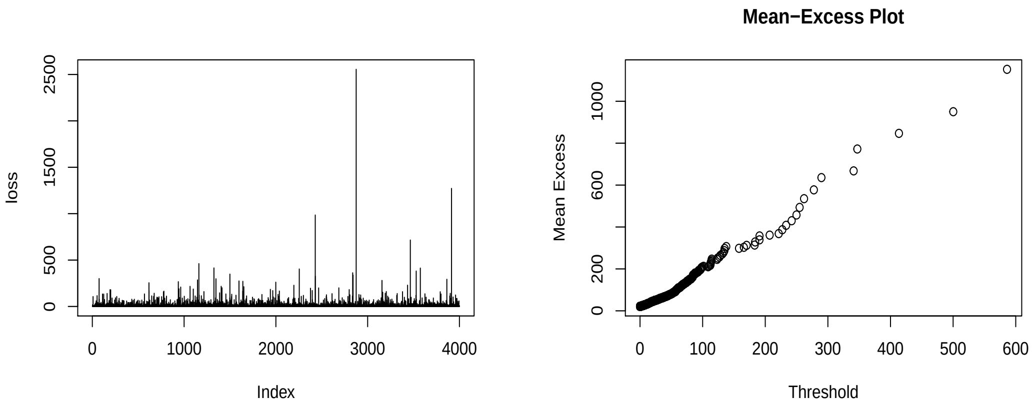

Abbildung 1: Links: loss data; rechts: zugehöriger mean excess plot.

(c) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Pareto-verteilte Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{b^\alpha}{(b+x)^\alpha}$.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ abfällt.

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie unter Verwendung allgemeiner Aussagen aus der EVT das asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}$ und diskutieren Sie das Ergebnis für die Spezialfälle $\alpha = 11$, $\alpha = 1.1$. Diskutieren Sie anhand dieser Ergebnisse kurz Vor- und Nachteile von VaR und ES bei der Risikomessung für heavy-tailed risks.

Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation. *[15 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftseinheiten mit zugehörigem Verlust gegeben durch die Zufallsvariablen L_i, $1 \leq i \leq d$. Der Verlust des Gesamtunternehmens ist also $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Sei ϱ ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß wie etwa VaR_α oder ES_α und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ zu.

(a) *[6 Punkte]* Warum sind *RORAC Kompatibilität* und die Existenz eines *diversification benefit* ökonomisch wünschenswerte Eigenschaften des Euler Prinzips? Diskutieren Sie beide Punkte kurz.

(b) *[9 Punkte]* Die Zufallsvariablen $(L_1, \ldots, L_d)$ seien multivariat normal verteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ und Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Euler Kapitalallokationen für ϱ (die sogenannten expected shortfall contributions) durch den Ausdruck

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X})$$

gegeben sind, wobei $\varrho(X)$ das Risikomaß einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariable X bezeichnet.

Aufgabe 6. Copulas und Kreditrisiko. *[20 Punkte]*

Aus der Analyse von Marktdaten sei bekannt, dass die Verteilung der Ausfallzeiten τ_1, τ_2 von zwei Firmen einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ genügt, d.h. $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. Um die gemeinsame Verteilung zu beschreiben, nehmen wir an, dass der Zufallsvektor (τ_1, τ_2) eine t Copula $C^t_{\nu,\rho}$ mit Parameter $\rho \in (0, 1]$, $\nu \geq 1$ hat.

(a) *[13 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige $N(0, 1)$-verteilte und χ^2_ν-verteilte Zufallsvariablen generieren kann. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Realisierung von (τ_1, τ_2) generiert.

(b) *[7 Punkte]* Betrachten Sie einen kleinen Zeithorizont T und nehmen Sie an, dass $\lambda_1 = \lambda_2$. Welchen Einfluss hat eine Reduzierung des Parameters ν qualitativ auf die Wahrscheinlichkeit $P\big((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T)\big)$ (das Ereignis bei dem beide Firmen vor dem Zeitpunkt T ausfallen)? Wirkt sich eine Änderung von ν auch auf die Wahrscheinlichkeit $P(\tau_1 \leq T)$ aus? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7. Modellierung von Kreditportfolios. *[26 Punkte]*

Im folgenden betrachten wir ein homogenes Portfolio von d identischen Kreditnehmern. Dabei sei d relativ groß, so dass einzelne Ausfälle keine große Auswirkung auf den Gesamtverlust haben. Wir modellieren die Ausfälle in diesem Portfolio durch ein austauschbares Bernoulli Mischmodell (exchangeable Bernoulli mixture) mit Mischvariable Q; die Dichte der Zufallsgröße Q sei $g(q)$.

(a) *[6 Punkte]* Geben Sie für $k = 0$ und $k = 1$ eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k Firmen ausfallen.

(b) *[6 Punkte]* Für großes d gilt für $M^d = \sum_{i=1}^{d} Y_i$ (Anzahl der Ausfälle in einem Portfolio mit d Kreditnehmern) die Formel

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{1}$$

Erläutern Sie die Herleitung dieser Formel und begründen Sie anhand der Formel, warum in einem austauschbaren Bernoulli Mischmodell bei großem d der tail von Q der wesentliche Risikotreiber ist.

(c) *[14 Punkte]* Nehmen Sie an, dass Q eine probit-normal Verteilung hat mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, d.h.

$$Q = \Phi(\mu + \sigma Z), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Q und, unter Verwendung von (1), den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$. Wie wirkt sich für $\alpha > 0.5$ ein höheres σ auf $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ aus?

Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement. *[30 Punkte]*

Es bezeichne $P(t,T)$ den Preis eines ausfallfreien Zerobonds mit Nominal 1 und Fälligkeit T zum Zeitpunkt t. Ferner sei r_G der Garantiezins, der sich durch Investition in den ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 realisieren lässt, d.h. es gelte $P(0,2) = (1+r_G)^{-2}$.

(a) *[16 Punkte]* Betrachten Sie die folgende Investitionsmöglichkeit zum Zeitpunkt 0: Ein ausfallfreier Bond der Laufzeit 2 sieht die reguläre Rückzahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt 2 vor und räumt dem Investor zudem ein Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 1 ein. Bei Ausübung des Kündigungsrechts wird anstelle der regulären Zahlung zum Zeitpunkt 2 der Betrag $K := (1+r_G)^{-1}$ zum Zeitpunkt 1 ausgezahlt.

(i) *[8 Punkte]* Ein finanzrationaler Investor verfolgt die Strategie, im Fall der Ausübung des Kündigungsrechts den erhaltenen Betrag in einen ausfallfreien Bond der Laufzeit 1 zu reinvestieren. Erklären Sie, dass diese Strategie zu dem Cashflow führt, der aus der Zahlung

$$c_1 = \left((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\right) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}$$

zum Zeitpunkt 1 und der Zahlung $c_2 = 1$ zum Zeitpunkt 2 besteht. Erläutern Sie die Wirkung dieser Investitionsstrategie im Vergleich zur Investition in einen ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 ohne Kündigungsrecht.

(ii) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert des Bonds mit Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 0 durch Replikation mit Hilfe eines geeigneten Portfolios, das aus Zerobonds, Optionen auf Zerobonds und Swaptions zusammengestellt werden kann.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Erlebensfallversicherung mit Stornooption für eine x-jährige Person, die die folgenden Zahlungen c_i zum Zeitpunkt i leistet:

$$\begin{aligned} c_1 &= K \cdot 1_{K>P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 1}, \\ c_2 &= 1_{K\leq P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 2}, \end{aligned}$$

wobei K den Rückkaufswert im Stornofall und T die Restlebensdauer der versicherten Person bezeichnen. Wir setzen ${}_1p_x = \mathbb{P}(T \geq 1)$ und ${}_2p_x = \mathbb{P}(T \geq 2)$. Es bezeichnen Q das risikoneutrale Maß und $r(t)$ die Short-Rate.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_Q\left(1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^2 r(s)\,ds\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^1 r(s)\,ds\right)\right)$$

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert der Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt 0. Nehmen Sie dabei an, dass Biometrie und Finanzmarkt unabhängig sind. Verwenden Sie in der Darstellung des Ergebnisses Preise geeigneter Zerobonds und Optionen auf Zerobonds sowie die Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_1p_x$ und ${}_2p_x$, dass die versicherte Person ein bzw. zwei Jahre überlebt.

(c) *[4 Punkte]* Bildet man die Differenz des korrekten Ergebnisses aus b) ii) für $K = (1 + r_G)^{-1}$ und der mit den jeweiligen Erlebensfallwahrscheinlichkeiten multiplizierten Preise der in a) (ii) verwendeten Zerobonds und Optionen auf Zerobonds, so entsteht der Term

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\, ds)\right)$$

Analysieren Sie, auf welche Weise versicherungstechnisches Risiko und Zinsrisiko interagieren.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße.

(a) Der Expected Shortfall ist kohärent, aber nicht elizitierbar. Der Value at Risk ist nicht subadditiv, also nicht kohärent, aber elizitierbar. Expectile mit Niveau $\alpha \geq 0.5$ sind kohärent und elizitierbar. Fehlende Subadditivität steht der Abbildung von Diversifikationseffekten entgegen und kann zu falschen Steuerungsimpulsen führen. Elizitierbarkeit ermöglicht den transparenten Vergleich von Schätzverfahren im Backtesting anhand einer Scoring-Funktion.

(b) Wir berechnen zunächst die mittlere Über- und Unterschreitung einer Schwelle $y > 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-y)^+] &= \int_y^\infty (x-y)\cdot 2x^{-3}\,dx = \int_y^\infty 2x^{-2}\,dx - y\int_y^\infty 2x^{-3}\,dx \\
&= -2x^{-1}\Big|_y^\infty + yx^{-2}\Big|_y^\infty = 2y^{-1} - y^{-1} \\
&= y^{-1} \\
\mathbb{E}[(X-y)^-] &= \int_1^y (y-x)\cdot 2x^{-3}\,dx = y\int_1^y 2x^{-3}\,dx - \int_1^y 2x^{-2}\,dx \\
&= -yx^{-2}\Big|_1^y + 2x^{-1}\Big|_y^\infty = -y^{-1} + y + 2y^{-1} - 2 \\
&= y^{-1} + y - 2
\end{aligned}$$

Aus der Bestimmungsgleichung für das Expektil

$$\alpha\cdot\mathbb{E}[(X-y)^+] = (1-\alpha)\cdot\mathbb{E}[(X-y)^-]$$

erhalten wir damit die Gleichung

$$y^2 - 2y + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} = 0.$$

Wegen des Trägers $[1,\infty)$ der Verteilung ist die Lösung $1+\sqrt{1-\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} = 1+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} =: e$ das α-Expektil.

(c) (i) Mit dem Hinweis berechnen wir

$$\frac{\mathbb{E}(X)-e}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = \frac{\mathbb{E}[(X-e)^+]-\mathbb{E}[(X-e)^-]}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = 1-\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|X>e) &= e+\mathbb{E}(X-e|X>e)\\ &= e+\frac{\mathbb{E}[(X-e)^+]}{1-F(e)}\\ &= e+\frac{(1-\alpha)(\mathbb{E}(X)-e)}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\\ &= \left(1-\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right)\cdot e+\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\cdot\mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

(ii) (α) Da die Verteilung stetig ist, folgt mit $\mathbb{E}(X)=0$ daraus

$$ES_\theta(X)=\mathbb{E}(X|X>VaR_\theta(X))=\mathbb{E}(X|X>e)=\left(1-\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right)\cdot e.$$

Somit bieten sich zwei Schätzverfahren an, der gewöhnliche ES-Schätzer T_1 und der Schätzer T_2 auf Basis des Expektils der empirischen Verteilung.

Bezeichnet $X_{(1)},\dots,X_{(m)}$ die absteigend angeordnete Stichprobe, so lautet der gewöhnliche ES-Schätzer

$$T_1=\frac{1}{[(1-\theta)m]}\sum_{i=1}^{[(1-\theta)m]}X_{(i)},$$

wobei $[\cdot]$ den ganzzahligen Anteil bezeichnet.

Das α-Expektil ist die Lösung y der Gleichung

$$\alpha\cdot\mathbb{E}[(X-y)^+]-(1-\alpha)\cdot\mathbb{E}[(X-y)^-]=0.$$

Der gewöhnliche Schätzer für $e=VaR_\theta(X)$ ist der $[(1-\theta)m+1]$-größte Wert, d.h. $\tilde{T}_2:=X_{([(1-\theta)m+1])}$. Ein Schätzer $\hat{\alpha}$ für α auf Basis der empirischen Verteilung erhält man als Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\alpha\cdot(X_i-\tilde{T}_2)^+-(1-\alpha)\cdot(X_i-\tilde{T}_2)^-\right]=0.$$

Setze $T_2:=\left(1-\frac{1-\hat{\alpha}}{(1-2\hat{\alpha})(1-\theta)}\right)\cdot\tilde{T}_2$.

(β) Der Vorschlag, den Schätzer T_i mit dem kleineren Score-Wert

$$s_i:=\sum_{k=1}^{n-m-1}S(T_i[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+m}],x_{k+m+1}),\ i=1,2,$$

vorzuziehen, beruht auf der Scoring-Funktion S, die strikt konsistent für das α-Expectil ist. Der Expected Shortfall ist jedoch nicht elizitierbar, so dass es keine strikt konsistente Scoring-Funktion zum Vergleich zweier verschiedener Testverfahren für den Expected Shortfall gibt.

Aufgabe 2. Parameterrisiko.

(a) Iterative Einbeziehung der Beobachtungswerte führt darauf, dass die a posteriori Verteilung von μ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, die Normalverteilung $\mathcal{N}(\theta_n, \tau_n^2)$ mit den Parametern

$$\tau_n^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau_{n-1}^2}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}$$

und

$$\theta_n = \tau_n^2 \left[\frac{x_n}{\sigma_0^2} + \frac{\theta_{n-1}}{\tau_{n-1}^2}\right] = \tau_n^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2}\right]$$

ist.

Die Randverteilung ist die Mischung der Beobachtungsverteilung über die a priori Verteilung des Parameters, während die Vorhersageverteilung die Mischung der Beobachtungsverteilung über die a posteriori Verteilung des Parameters ist. Aus der angegebenen Information über die Randverteilung lässt sich daher die Vorhersageverteilung entnehmen:

$$X \mid x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}\left(\theta_n, \sigma_0^2 + \tau_n^2\right)$$

Die Differenz des Value at Risk der Vorhersageverteilung, die die Unsicherheit über den Mittelwert mit einbezieht, und der Normalverteilung $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$, in der der Punktschätzer für den Mittelwert verwendet wird, ist ein Maß für das Parameterrisiko:

$$\theta_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \left(\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_n^2} - \sigma_0\right) \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

(b) Der Schätzer für den Value-at-Risk ist gegeben durch

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu}) = \hat{\mu} + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

und ist $\mathcal{N}\left(\mu + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$-verteilt. Die Residualposition $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$ ist $\mathcal{N}\left(-\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$-verteilt. Ihr Value-at-Risk ist das Residualrisiko

$$\begin{aligned} RR(X) &= \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})\right) \\ &= -\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zinsrisiko und Zinsrisikomodelle.

(a) Die Call-Option zahlt zur Zeit $T = 1$ den Betrag

$$C_1 = (P(1,2) - K)^+ = P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} - K \cdot 1_{P(1,2)>K}$$

Wir berechnen den Preis C_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, indem wir den ersten Summanden unter dem $(S = 2)$-Forward-Maß $Q^{(2)}$ und den zweiten unter dem $(T = 1)$-forward Maß $Q^{(1)}$ bewerten:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P(0,2) \cdot \mathbb{E}^{(2)}\left(\frac{1}{P(1,2)} \cdot P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \mathbb{E}^{(1)}\left(\frac{1}{P(1,1)} \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}(P(1,2) > K) - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}(P(1,2) > K) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(\frac{\ln(Z) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(\frac{\ln(Z) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&= P(0,2) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0,02 - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0,02 + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&= \exp(-0,04) \cdot (1 - \Phi(-0,36293)) - 0,95 \cdot \exp(-0,02) \cdot (1 - \Phi(-0,26293)) \\
&= 0,05435.
\end{aligned}$$

Anmerkung. Das konkrete numerische Ergebnis war nicht Bestandteil der Aufgabenstellung. Gefragt war die Darstellung mit Hilfe von Φ.

(b) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß Q^S. Daher gilt

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

Im Spezialfall $t = T$ nimmt diese Beziehung die Gestalt

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq T < S,$$

an, da $F(T,T,S) = L(T,S)$ gilt. Dies zeigt, dass zur Zeit $u \leq T$ die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ reflektiert.

Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße.

(a) Beispiele für high frequency/low severity events in der Schadenversicherung: Versicherung gegen Naturkatastrophen oder gegen Terrorattacken; Risiken aufgrund von Rechtsstreitigkeiten im operational risk etc.

High severity/low frequency events sind aus verschiedenen Gründen schwer zu managen: zum einen hat man meist mit Datenknappheit zu tun (seltenes Auftreten von Großschäden impliziert wenige Beobachtungen); zum anderen weist die Schadensverteilung eines Portfolios mit high frequency/low severity Risiken eine sehr hohe Variabilität auf, so dass Diversifikation der Verluste nur im Zeitablauf, d.h. über mehrere Bilanzperioden möglich ist. (In normalen Jahren werden die Prämieneinnahmen die Schäden übersteigen, in Katastrophenjahren sind die Schäden größer als die Prämien).

EVT kann einen wesentlichen Beitrag zur Schätzung der Ränder der Schadenshöhenverteilung und somit zum Umgang mit der Datenproblematik leisten.

(b) Zunächst wählt man eine hohe Schranke u, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Anschließend modelliert man F_u durch eine GPD und fitted die Parameter ξ und β (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle u; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ und einen tail Schätzer durch die POT Methode. Bei den vorgegebenen Daten ist der mean excess Plot annähernd linear wachsendend mit einer positiven aber endlichen Steigung. Da die excess function der GPD (und somit die asymptotische Steigung des mean excess Plots bei ausreichend vielen Daten) eine Steigung von $\frac{\xi}{1-\xi}$ hat, deutet der mean excess Plot klar auf den Fall $0 < \xi < 1$ hin.

(c) (i) Es gilt

$$\overline{F}(x) = \frac{b^a}{(b+x)^a} = x^{-a}\frac{b^a}{b/x^a+1},$$

und für $x \to \infty$ konvergiert dies gegen $x^{-a}b^a$.

(ii) Da die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung nach Aufgabenteil i) polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ abfällt, gilt asymptotisch

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)} = \frac{1}{1-\xi} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Wir erhalten also für $\alpha = 11$, dass für großes α $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 1.1\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. VaR und ES sind fast gleich. Für $\alpha = 1.1$ ergibt sich $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 11\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. es gibt einen drastischen Unterschied zwischen beiden Risikomaßen. Allgemein gilt, dass der Unterschied zwischen VaR und ES umso größer ist, je größer ξ (bzw. je kleiner $\alpha = 1/\xi$) ist, d.h. je mehr Gewicht der tail von X hat. Es folgt, dass speziell für heavy-tailed risks (ξ relativ nahe an 1) VaR das tail Risiko unterschätzt. Auf der anderen Seite ist der tail parameter ξ unter Umständen schwer zu schätzen, so dass Schätzungen für ES ein hohes Modellrisiko aufweisen.

Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation

(a) RORAC Kompatibilität bedeutet, dass der RORAC des Gesamtportfolios wächst, wenn das Gewicht einer subunit L_i, deren RORAC $-E(L_i)/\,\mathrm{AC}_i$ höher ist als der RORAC des Gesamtunternehmens, erhöht wird. In diesem Sinn gibt das Euler Prinzip also korrekte Signale für die Unternehmenssteuerung. Ein diversification benefit ist insbesondere relevant für subadditive Risikomaße, bei denen $\varrho(L) \leq \sum_{i=1}^d \varrho(L_i)$. Der diversification benefit stellt sicher, dass jede business unit von der Subadditivität profitiert ($\mathrm{AC}_i \leq \varrho(L_i)$); andernfalls gäbe es Anreize für Untereinheiten, das Unternehmen zu verlassen.

(b) Da $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ folgt, dass

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Da ϱ positiv homogen ist, folgt dass

$$\mathrm{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X).$$

Daher erhalten wir für das Euler Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} r_{\mathrm{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X) \frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X) \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

Aufgabe 6. Copulas und Kreditrisiko.

(a) Schritt 1: Konstruktion von t_ρ^ν verteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $w = \nu/y$ und $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$, wobei z_1, z_2 aus $\mathcal{N}(0,1)$ und y aus ξ_ν^2 gezogen werden.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Setze $(u_1, u_2) = (t_\nu(x_1), t_\nu(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist durch $u \mapsto = -\ln(1-u)/\lambda$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\tau_1, \tau_2) = \big(-\ln(1-u_1)/\lambda_1, -\ln(1-u_2)/\lambda_2\big)$$

die gewünschten Realisierungen.

(b) Eine Reduzierung von ν führt zu einer stärkeren tail dependence (in beiden tails). Das Ereignis $P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big)$ bedeutet, dass τ_1 und τ_2 und somit u_1 und u_2 sehr kleine Werte annehmen; diese Wahrscheinlichkeit steigt bei stärkerer tail dependence und somit bei einer Reduzierung von ν. Das Ereignis $P(\tau_1 \le T)$ hängt nur von der Randverteilung von τ_1 ab und ist somit unabhängig von ν.

Aufgabe 7. Modellierung von Kreditportfolios.

(a) Es sei $M^d = \sum_{i=1}^d Y_i$ die Anzahl der Ausfälle. Dann gilt

$$P(M^d = 0) = \int_0^1 (1-q)^d g(q) dq; \quad P(M^d = 1) = d \int_0^1 q(1-q)^{d-1} g(q) dq.$$

(b) Gegeben $Q = q$ sind die Ausfallindikatoren Y_i unabhängig mit Mittelwert q; nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt also, dass gegeben $Q = q$, $\lim_{m\to\infty} \frac{M^{(d)}}{d} = q$, oder $M^d \approx dQ$. Hieraus ergibt sich die Formel. Die Formel zeigt direkt, dass der tail der Verteilung der Anzahl an Ausfällen proportional zum tail von Q ist, so dass der tail von Q der wesentliche Risikotreiber ist.

(c) Es gilt für $q \in (0,1)$ dass

$$P(Q \le q) = P\Big(Z \le \frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big).$$

Damit erhalten wir $q_\alpha(Q) = \Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big)$. (Dies kann man auch direkt herleiten, wenn man verwendet, dass Q eine streng monotone Transformation von Z ist.) Die Grenzwertformel gibt also

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big).$$

Für $\alpha > 0.5$ ist $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ ist somit wachsend in σ.

Aufgabe 8. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) (i) Das Kündigungsrecht wird genau dann ausgeübt, wenn zum Zeitpunkt 1 $(1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ gilt. Dann erhält der Investor zum Zeitpunkt 1 den Betrag $(1+r_G)^{-1}$ und kauft einen Zerobond mit Laufzeit 1. Folglich ist

$$c_1 = \big((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)}.$$

Zum Zeitpunkt 2 erhält der Investor den Betrag 1, entweder als Auszahlung des ursprünglichen Bonds oder im Falle der Kündigung als Zahlung des zum Zeitpunkt 1 gekauften Zerobonds. Also gilt $c_2 = 1$.

Während die Investition in den Zerobond der Laufzeit 2 die jährliche Rendite r_G sichert, ermöglicht das Kündigungsrecht, durch Reinvestition an einem steigenden Marktzins zu partizipieren. Die Bedingung $P(0,2) \cdot (1 + r_G) = (1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ besagt, dass in der Periode $[1,2]$ der Marktzins höher als r_G ausfällt.

(ii) Es ist $K = P(0,2)(1+r_G) = (1+r_G)^{-1}$. Der Cashflow des Bonds mit Kündigungsrecht besteht aus den Zahlungen $c_1 = K \cdot 1_{K>P(1,2)}$ und $c_2 = 1_{K \le P(1,2)}$.

Das Kündigungsrecht ermöglicht es bei gestiegenem Marktzins, die Auszahlung 1 zum Zeitpunkt 2 durch Kauf des Zerobonds mit Laufzeit 1 zum Zeitpunkt 1 zu dem geringeren Preis $P(1,2) < K$ sicherzustellen und die Differenz $K - P(1,2) > 0$ zum Zeitpunkt 1 zu vereinnahmen. Dies motiviert die folgende Wahl des Replikationsportfolios.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Put-Option mit Fälligkeitszeitpunkt 1 und Strike K auf den Zerobond mit Laufzeit 1. Der Wert dieses Portfolios beträgt

$$P(0,2) + \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\, ds)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K > P(1,2)$. Übe zum Zeitpunkt 1 die Put-Option aus und verkaufe den Zerobond mit der Restlaufzeit 1 zum Preis von K.
- 2. Fall: $K \le P(1,2)$. Die Put-Option ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert V des Cashflows (c_1, c_2) zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

Alternative. Die Kündigungsoption ermöglicht die Partizipation an einem gestiegenen Marktzins. Dies kann durch eine Payer-Swaption abgebildet werden.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Payer-Swaption mit Nominal K, fixed leg r_G und einzigem Zahlungstermin 2. D.h., zum Zeitpunkt 2 erfolgt eine Zahlung der Höhe $(L(1,2)-r_G)^+$. Der Wert des Portfolios beträgt

$$P(0,2)+K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K>P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1}>(1+L(1,2))^{-1}$ also $r_G<L(1,2)$. Zum Zeitpunkt 1 verkaufe $\frac{K}{P(1,2)}$ Einheiten des Zerobonds mit Laufzeit 1 (leer) und übe die Swaption aus. Dadurch entsteht eine Zahlung von K zum Zeitpunkt 1 und eine Zahlung von

  $$1-\frac{K}{P(1,2)}+K\cdot(L(1,2)-r_G)=1-K(1+L(1,2))+K(L(1,2)+1-K^{-1})=0$$

  zum Zeitpunkt 2.

- 2. Fall: $K\leq P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1}\leq(1+L(1,2))^{-1}$ also $r_G\geq L(1,2)$. Die Swaption ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert V des Cashflows (c_1,c_2) zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

Anmerkung. Die beiden Replikationsportfolios haben tatsächlich denselben Wert, wie die folgende Rechnung außerhalb der Aufgabenstellung zeigt.

$$\begin{aligned}
&K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot L(1,2)+K-1)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot(1+L(1,2))\cdot P(1,2)-P(1,2))^+\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K-P(1,2))^+\right)
\end{aligned}$$

(b) (i) Durch Bedingen auf $\mathcal{F}_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\mid \mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds)\mid \mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Auf Grund der Unabhängigkeit von Finanzmarkt und Biometrie ergibt sich der Wert V der Versicherungsleistungen zu

$$\begin{aligned}
V &= {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\overset{(i)}{=} {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot P(0,2)+{}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))^+\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(c) Der dritte Summand unter b) ii) berücksichtigt, dass in dem Fall, dass der Tod im 2. Jahr eintritt, der vorgezogene Zahlungstermin bei Ausübung der Stornooption eine Erlebensfallleistung überhaupt erst ermöglicht.

Der Wert der Stornooption hängt von dem kombinierten Einfluss von Biometrie und Zins ab. Liegt der Zins in Periode $[1,2]$ über r_G, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Auszahlung des Vertrags ${}_1p_x$. Anderenfalls beträgt die Auszahlungswahrscheinlichkeit ${}_2p_x$, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die

Versicherungssumme in einer reinen Erlebensfallversicherung ohne Stornooption ausgezahlt wird. Die Höhe der zusätzlichen Auszahlung zum Zeitpunkt 1 hängt vom Zinsniveau ab.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.1
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

28 May 2021

Please note:

- In the period between your personal login for downloading the exam questions and the upload of your solutions, you are not allowed to contact other people (except the support team) with respect to the exam questions. Apart from that, there are no restrictions on permitted materials.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 10 pages.
- All answers have to be be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures. *[24 points]*

(a) *[4 points]* Discuss pros and cons of the risk measures Value at Risk, Expected Shortfall and Expectile compared with each other, taking the point of view of axiomatics.

(b) *[8 points]* Determine the expectile $e_\alpha(X)$ of a loss variable following the Pareto-distribution with the density

$$f(x) = 2x^{-3} \cdot 1_{(1,\infty)}(x).$$

(c) *[12 points]* Let X be a continuous loss variable with $\mathbb{E}|X| < \infty$. Let F denote the cumulative distribution function of X and $e := e_\alpha(X)$ the α-expectile.

(i) *[5 points]* Show that $\frac{\mathbb{E}(X)-e}{\mathbb{E}(X-e)^+} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$ and deduce that

$$\mathbb{E}(X|X>e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right) \cdot e + \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))} \cdot \mathbb{E}(X).$$

Hint. The positive part is denoted by $(x)^+ = \max(0,x)$ and the negative part by $x^- = -\min(x,0)$. For all $x, z \in \mathbb{R}$ it holds that $(x-z)^+ - (x-z)^- = x - z$.

(ii) *[7 points]* If the loss variable X satisfies $\mathbb{E}(X) = 0$ the relation under (i) takes the easier form

$$\mathbb{E}(X|X>e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right) \cdot e,$$

where $\theta := F(e)$. We additionally assume that F is strictly increasing such that $e = VaR_\theta(X)$ holds.

(α) *[4 points]* State two different estimators T_i, $i = 1,2$, for the Expected Shortfall $ES_\theta(X)$ at the confidence level of θ based on a random sample of size m from the distribution of X.

(β) *[3 points]* Given a time series of observed values $x_1, \ldots, x_n$ for some sufficiently large n, you are told to prefer the estimator with the lower score

$$s_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}), \; i = 1,2,$$

where $m < n$ and the scoring function S is given by

$$S(y,x) = \begin{cases} (1-\alpha)\cdot(y-x)^2; & x \le y \\ \alpha \cdot (y-x)^2 \quad ; & x > y. \end{cases}$$

Comment on this proposal, taking the point of view of axiomatics.

Question 2. Parameter Risk. *[21 points]* Suppose that the loss variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ follows a normal distribution with **unknown** $\mu \in \mathbb{R}$ and **known** $\sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$. Let $\alpha \in (0, 1)$.

(a) *[12 points]* Adopting a Bayesian approach, the unknown parameter μ is assumed to follow the normal distribution $\mathcal{N}(\theta, \tau^2)$ with $\theta \in \mathbb{R}$ and $\tau^2 \in \mathbb{R}^+$. You are given the observed values $x_1, \ldots, x_n$. In this setting, the following properties hold.

- The marginal distribution of X is $\mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2 + \tau^2)$.
- The posterior distribution of μ, given x_1, is $\mathcal{N}(\theta_1, \tau_1^2)$ with

$$\tau_1^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1} \quad \text{and} \quad \theta_1 = \tau_1^2 \left[\frac{x_1}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2}\right].$$

Using these properties deduce the predictive distribution of X, given $x_1, \ldots, x_n$. Quantify the parameter risk when the Value at Risk at the confidence level of α of $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$ is taken as an estimator for the Value at Risk of X at the confidence level of α.

(b) *[9 points]* Assume that the unknown parameter is estimated by the maximum-likelihood estimator $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ based on the iid sample $X_1, \ldots, X_n$. State the estimator $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$ for the risk measure $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ and determine the residual risk, i.e. the VaR_α of the residual position $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$.

Question 3. Interest Rate Risk and Term Structure Models. *[19 points]*

(a) *[10 points]* Let $S > T > 0$ and $P(T,S)$ denote the price of a zero bond with maturity S at time T. In the Gaussian interest rate model with constant volatility σ, we are given the representation

$$P(T,S) = \frac{P(0,S)}{P(0,T)} \cdot Z,$$

where $Z \sim LN\left(-\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ holds under the T-forward measure and $Z \sim LN\left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ under the S-forward measure with $\tau := \sigma^2(S-T)^2 T$. Assume that the present term structure is given by the prices $P(0,t) = \exp(-0.02 \cdot t)$ of zero bonds with maturity t. Determine the price at time $t = 0$ of a European call option with expiration date 1 and strike $K = 0.95$ on a zero bond with maturity 2. Assume that $\sigma = 0.1$ and use the cumulative normal distribution function Φ when stating your result.

(b) *[9 points]* Let $F(t,T,S)$ be the simply-compounded forward rate at time t with expiry time $T \geq t$ and maturity $S > T$. Prove

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

where $\mathbb{E}^S$ denotes the expected value under the S-forward measure Q^S. Discuss this result in the special case $t = T$.

Question 4. Extreme Value Theory (EVT) and Risk Measures. *[25 points]*

(a) *[5 points]* Use an example from practice to illustrate the relevance of *low frequency/high severity events* in non-life insurance and explain the challenges posed by such events for actuarial risk management. How can EVT help in managing these risks?

(b) *[10 points]* In Figure 1 below simulated claim data (4000 data points) and the corresponding mean excess plot are displayed. Discuss how the peaks over threshold (POT) method can be used to estimate the tail of the distribution of the claim data. Which value would you expect for the estimated value of the parameter ξ: $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Give a short justification for your choice.

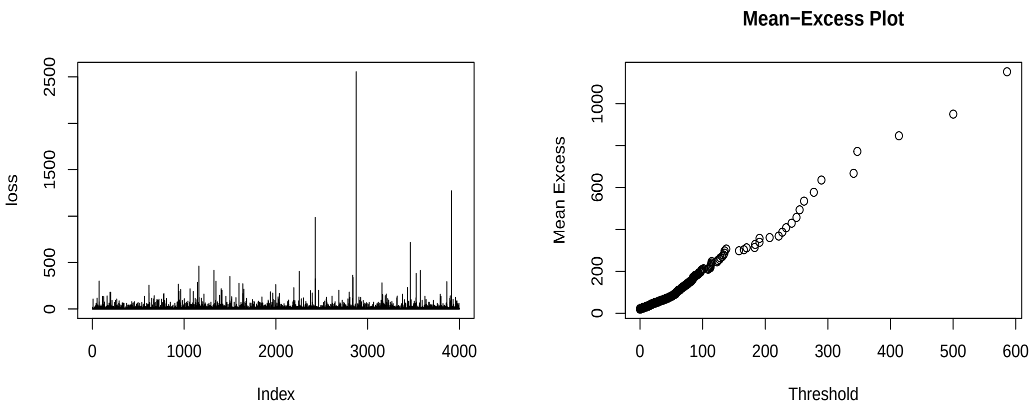

Figure 1: Left: loss data; right: corresponding mean excess plot.

(c) *[10 points]* Consider a random variable X which has a Pareto distribution with distribution function $F(x) = 1 - \frac{b^\alpha}{(b+x)^\alpha}$.

(i) *[4 points]* Demonstrate that the survival function of X decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$.

(ii) *[6 points]* Use general results from EVT to determine the asymptotic ratio $\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}$. Compute this asymptotic ratio for the special cases $\alpha = 11$, $\alpha = 1.1$ and use the result to discuss pros and cons of VaR and ES for measuring the risk of heavy-tailed losses.

Question 5. Risk Measures and Capital Allocation. *[15 points]*

Consider an insurance company with d business units and associated loss given by the random variables L_i, $1 \leq i \leq d$. The company-wide loss is thus $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Consider a translation invariant and positive homogeneous risk measure ϱ such as VaR_α or ES_α and denote by $\varrho(L)$ the risk capital for the entire company. In this context a capital allocation principle allocates the economic capital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ to the individual business units.

(a) *[6 points]* Why are *RORAC compatibility* and the existence of a *diversification benefit* reasonable economic properties of the Euler capital allocation principle? Briefly discuss both points.

(b) *[9 points]* Assume that $(L_1, \ldots, L_d)$ are multivariate normal with mean $\mu = 0$ and covariance matrix Σ. Show that in this case the Euler capital allocations for ϱ are given by the expression

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X}),$$

where $\varrho(\tilde{X})$ denotes the risk measure for a random variable $\tilde{X} \sim N(0, 1)$.

Question 6. Copulas and Credit Risk *[20 points]*

Suppose that an analysis of market data shows that the distribution of the default times τ_1, τ_2 of two firms is exponentially distributed with parameter $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, that is $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. In order to model the joint distribution we assume that the random vector (τ_1, τ_2) has a t copula $C^t_{\nu,\rho}$ with parameters $\rho \in (0, 1]$, $\nu \geq 1$.

(a) *[13 points]* Assume that you have a random number generator at your disposal that is able to generate independent $N(0, 1)$-distributed and χ^2_ν-distributed random variables. Develop an algorithm for generating a realisation of (τ_1, τ_2).

(b) *[7 points]* Consider a short time horizon T and assume that $\lambda_1 = \lambda_2$. What is the (qualitative) impact of a reduction in the parameter ν on the probability $P\big((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T)\big)$ (the event where both firms default prior to T)? Does a change in ν affect also the probability $P(\tau_1 \leq T)$? Justify your answers.

Question 7. Credit Portfolio Modeling *[26 points]*

In the sequel we consider a homogeneous portfolio of d identical obligors. We assume that d is fairly large so that individual defaults do not have a large impact on the overall credit loss. We model the defaults in this portfolio by an exchangeable Bernoulli mixture model with mixing variable Q; the density of Q is denoted by $g(q)$.

(a) *[6 points]* Give for $k = 0$ and $k = 1$ a formula for the probability that exactly k firms default.

(b) *[6 points]* Denote by $M^d = \sum_{i=1}^d Y_i$ the number of defaults in a portfolio of size d. For large d it holds that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{1}$$

Explain the key steps in the derivation of (1) and use the formula to justify why the tail of Q is the main risk driver in an exchangeable Bernoulli mixture model with large d.

(c) *[14 points]* Assume that Q has a probit-normal distribution with parameters $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, that is

$$Q = \Phi(\mu + \sigma Z), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

Φ the distribution function (df) of $N(0,1)$. Compute the df of Q and, using (1), the Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$. How does an increase in σ affect $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ (for $\alpha > 0.5$)?

Question 8. Interest Rate Risk Management. *[30 points]* Let $P(t,T)$ denote the price of a default free zero bond with nominal 1 and maturity T at time t. Further let r_G be the guaranteed interest rate that can be earned by investing in the default free zero bond with maturity 2, i.e. assume that $P(0,2) = (1+r_G)^{-2}$.

(a) *[16 points]* Consider the following investment opportunity at time 0: A callable default free bond with maturity 2 regularly pays 1 unit of currency at time 2 and, in addition, grants the investor the right to call the bond at time 1. If the investor opts to exercise this right then the surrender value $K := (1+r_G)^{-1}$ is paid at time 1 instead of the regular payment of 1 at time 2.

(i) *[8 points]* In case of the exercise of the surrender option, a rational investor decides to reinvest the surrender value in a default free zero bond with duration 1. Explain why this strategy leads to the cash-flow consisting of the payment

$$c_1 = \big((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}$$

at time 1 and the payment $c_2 = 1$ at time 2. Explain the effect of this investment strategy in comparison with the investment in a default free zero bond due at time 2 without surrender option.

(ii) *[8 points]* Determine the value of the callable bond at time 0 by replication. The replicating portfolio may consist of zero bonds, options on zero bonds and swaptions.

(b) *[10 points]* Consider a pure endowment policy with surrender option for a x-year old person giving rise to the following payments c_i due at time i:

$$\begin{aligned} c_1 &= K \cdot 1_{K>P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 1}, \\ c_2 &= 1_{K\leq P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 2}, \end{aligned}$$

where K denotes the surrender value and T the remaining life time of the insured person. We set ${}_1p_x = \mathbb{P}(T \geq 1)$ and ${}_2p_x = \mathbb{P}(T\geq 2)$. Let Q denote the risk neutral measure and $r(t)$ the short-rate.

(i) *[4 points]* Show that the following equality holds:

$$\mathbb{E}_Q\left(1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^2 r(s)\,ds\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^1 r(s)\,ds\right)\right)$$

(ii) *[6 points]* Determine the value of the insurance benefits at time 0 assuming that insurance risk and financial risk are independent. Represent your result using prices of suitable zero bonds and options on zero bonds as well as the probabilities of survival ${}_1p_x$ and ${}_2p_x$ that the insured person survives one and two years, respectively.

(c) *[4 points]* Multiplying the prices of the zero bonds and options on zero bonds used in part a) (ii) by the appropriate survival probabilities and then subtracting them from the correct result under b) ii) for $K = (1 + r_G)^{-1}$ yields

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\, ds)\right)$$

Analyze the interplay between the effects of insurance risk and interest rate risk.

Proposal for Solution

Question 1. Risk Measures.

(a) The Expected Shortfall is coherent, but not elicitable. The Value at Risk is not subadditive and therefore not coherent, but elicitable. Expectiles with level $\alpha \geq 0.5$ are coherent and elicitable. The lack of subadditivity precludes diversification effects and therefore may lead to wrong incentives. Elicitability allows to transparently compare different estimators through a scoring function when back-testing.

(b) We first compute the mean lower and upper deviations from a threshold $y > 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-y)^+] &= \int_y^\infty (x-y)\cdot 2x^{-3}\,dx = \int_y^\infty 2x^{-2}\,dx - y\int_y^\infty 2x^{-3}\,dx \\
&= -2x^{-1}\Big|_y^\infty + yx^{-2}\Big|_y^\infty = 2y^{-1} - y^{-1} \\
&= y^{-1} \\
\mathbb{E}[(X-y)^-] &= \int_1^y (y-x)\cdot 2x^{-3}\,dx = y\int_1^y 2x^{-3}\,dx - \int_1^y 2x^{-2}\,dx \\
&= -yx^{-2}\Big|_1^y + 2x^{-1}\Big|_y^\infty = -y^{-1} + y + 2y^{-1} - 2 \\
&= y^{-1} + y - 2
\end{aligned}$$

Using the defining equation of the expectile

$$\alpha \cdot \mathbb{E}[(X-y)^+] = (1-\alpha)\cdot \mathbb{E}[(X-y)^-],$$

we thus obtain

$$y^2 - 2y + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} = 0.$$

Because the support of the distribution is $[1,\infty)$ the solution $1 + \sqrt{1 - \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} = 1 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} =: e$ is the α-expectile.

(c) (i) Using the hint, we compute

$$\frac{\mathbb{E}(X) - e}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = \frac{\mathbb{E}[(X-e)^+] - \mathbb{E}[(X-e)^-]}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

It follows that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|X>e) &= e + \mathbb{E}(X-e|X>e) \\
&= e + \frac{\mathbb{E}[(X-e)^+]}{1-F(e)} \\
&= e + \frac{(1-\alpha)(\mathbb{E}(X)-e)}{(1-2\alpha)(1-F(e))} \\
&= \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right)\cdot e + \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\cdot \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

(ii) (α) Since the distribution is continuous and $\mathbb{E}(X) = 0$ we conclude

$$ES_\theta(X) = \mathbb{E}(X|X > VaR_\theta(X)) = \mathbb{E}(X|X > e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right) \cdot e.$$

Thus, two different estimators present themselves: the usual ES estimator T_1 and the estimator T_2 based on the α-expectile of the empirical distribution.

Let $X_{(1)}, \ldots, X_{(m)}$ denote the sample in descending order. Then the usual ES estimator is given by

$$T_1 = \frac{1}{[(1-\theta)m]} \sum_{i=1}^{[(1-\theta)m]} X_{(i)},$$

where $[\cdot]$ denotes the integer part.

The α-expectile e is the solution of the equation

$$\alpha \cdot \mathbb{E}[(X-e)^+] - (1-\alpha) \cdot \mathbb{E}[(X-e)^-] = 0.$$

The usual estimator for $e = VaR_\theta(X)$ is given by the $[(1-\theta)m+1]$-largest value, i.e. $\tilde{T}_2 := X_{([(1-\theta)m+1])}$. An estimator $\hat{\alpha}$ for α based on the empirical distribution is obtained by solving the equation

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha \cdot (X_i - \tilde{T}_2)^+ - (1-\alpha) \cdot (X_i - \tilde{T}_2)^-\right] = 0.$$

Set $T_2 := \left(1 - \frac{1-\hat{\alpha}}{(1-2\hat{\alpha})(1-\theta)}\right) \cdot \tilde{T}_2$.

(β) The proposal to prefer the estimator T_i with the lower score

$$s_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}), \ i = 1, 2,$$

relies on the scoring function S which is strictly consistent for the α-expectile. However, the Expected Shortfall is not elicitable and therefore does not admit for a strictly consistent scoring function needed for comparing different procedures of estimation.

Question 2. Risk Measures and Management.

(a) Iterating the Bayesian analysis with each observation, we observe that the posterior distribution of μ, given $x_1, \ldots, x_n$, is the normal distribution $\mathcal{N}(\theta_n, \tau_n^2)$ with the parameters

$$\tau_n^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau_{n-1}^2}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}$$

and

$$\theta_n = \tau_n^2 \left[\frac{x_n}{\sigma_0^2} + \frac{\theta_{n-1}}{\tau_{n-1}^2} \right] = \tau_n^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2} \right].$$

The marginal distribution is the mixture of the sample distribution over the prior distribution of the parameter, whereas the predictive distribution is the mixture of the sample distribution over the posterior distribution of the parameter. Using the given information on the marginal distribution we thus deduce the predictive distribution:

$$X \mid x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}\left(\theta_n, \sigma_0^2 + \tau_n^2\right)$$

The difference of the Value at Risk of the predictive distribution that takes into account the uncertainty about the mean and the Value of Risk of the normal distribution $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$, that relies on the point estimator for the mean can be viewed of as a measure of parameter risk:

$$\theta_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \left(\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_n^2} - \sigma_0\right) \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

(b) The estimator for the Value-at-Risk is given by

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu}) = \hat{\mu} + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

and follows the normal distribution $\mathcal{N}\left(\mu + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$. The residual position $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$ is $\mathcal{N}\left(-\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$-distributed. Its Value-at-Risk measures the residual risk.

$$\begin{aligned} RR(X) &= \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})\right) \\ &= -\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Question 3. Interest Rate Risk and Term Structure Models.

(a) At time $T = 1$, the call option pays the amount

$$C_1 = (P(1,2) - K)^+ = P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} - K \cdot 1_{P(1,2)>K}.$$

When calculating the price C_0 at time $t = 0$, we valuate the first summand under the $(S = 2)$-forward measure $Q^{(2)}$ and the second one under the $(T = 1)$-forward measure $Q^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P(0,2)\cdot\mathbb{E}^{(2)}\left(\frac{1}{P(1,2)}\cdot P(1,2)\cdot 1_{P(1,2)>K}\right)\\
&\quad -K\cdot P(0,1)\cdot\mathbb{E}^{(1)}\left(\frac{1}{P(1,1)}\cdot 1_{P(1,2)>K}\right)\\
&= P(0,2)\cdot Q^{(2)}(P(1,2)>K)-P(0,1)\cdot Q^{(1)}(P(1,2)>K)\\
&= P(0,2)\cdot Q^{(2)}\left(Z>K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right)-P(0,1)\cdot Q^{(1)}\left(Z>K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right)\\
&= P(0,2)\cdot Q^{(2)}\left(\frac{\ln(Z)-\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}>\frac{\ln(\exp(0,02)K)-\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&\quad -K\cdot P(0,1)\cdot Q^{(1)}\left(\frac{\ln(Z)+\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}>\frac{\ln(\exp(0,02)K)+\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&= P(0,2)\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(K)+0.02-\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\\
&\quad -K\cdot P(0,1)\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{\ln(K)+0.02+\frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right)\\
&= \exp(-0.04)\cdot(1-\Phi(-0.36293))-0.95\cdot\exp(-0.02)\cdot(1-\Phi(-0.26293))\\
&= 0.05435.
\end{aligned}$$

Remark. The concrete numerical result is not part of the exercise. The representation based on Φ is expected.

(b) Since zero coupon bonds are tradable assets, so is the quantity

$$F(t,T,S)P(t,S)=\frac{1}{S-T}(P(t,T)-P(t,S)).$$

Consequently, its discounted price process

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)}=F(t,T,S)$$

is a martingale under the forward measure Q^S. Therefore, it holds that

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S)\mid\mathcal{F}_u)=F(u,T,S),\quad 0\le u\le t\le T<S.$$

In the special $t=T$, this relation takes the form

$$\mathbb{E}^S(L(T,S)\mid\mathcal{F}_u)=F(u,T,S),\quad 0\le u\le T<S.$$

because of $F(T,T,S)=L(T,S)$. This shows that, at time $u\le S$, the forward rate $F(u,T,S)$ reflects the available market information on the spot rate of the future period $[T,S]$.

Question 4. Extreme Value Theory (EVT) and Risk Measures.

(a) Examples for high frequency/low severity events in non-life insurance include insurance against natural catastrophes or terrorist attacks. (many other answers possible)

High severity/low frequency events are hard to manage for several reasons: on the one hand data are typically scarce; on the other hand the loss distribution of a portfolio with high frequency/low severity risks displays a high variability, so that diversification of losses is possible only over several accounting periods (In a normal year premia will exceed claims in catastrophic years claims exceed premia).

EVT can be very helpful in estimating the tails of the claim size distribution and hence for handling the scarce-data problem.

(b) First you choose a high threshold u, for instance the 95% quantile of the data. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, where F_u represents the excess distribution of F with respect to the threshold u. Next one models F_u by a GPD and one fits ξ and β to the observed threshold exceedances (eg via maximum likelihood); this leads to the estimates $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ and via the POT approach to an estimate for the tail of the losses. For the given data the mean excess plot is growing more or less linearly with a positive but finite slope. As the excess function of the GPD (and hence the asymptotic slope of the mean excess plot given sufficient data) has a slope of $\frac{\xi}{1-\xi}$, the mean excess plot clearly points to the case $0 < \xi < 1$.

(c) (i) It holds that

$$\overline{F}(x) = \frac{b^a}{(b+x)^a} = x^{-a}\frac{b^a}{b/x^a+1},$$

and for $x \to \infty$ this converges to $x^{-a}b^a$.

(ii) Since the survival function of the Pareto-distribution decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{a}$ (see i), it holds asymptotically that

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)} = \frac{1}{1-\xi} = \frac{a}{a-1}.$$

Hence we get for $a = 11$, that for α large, $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 1.1\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, that is VaR and ES are nearly identical. For $a = 1.1$ we get $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 11\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, so that there is a substantial difference between the two risk measures. In general terms, the difference between VaR and ES is larger for larger values of ξ (heavier tail) or equivalently for smaller values of $a = 1/\xi$. It follows that in particular for heavy-tailed risks (ξ close to 1), VaR underestimates tail risk. On the other hand, for very heavy tailed risks ξ might be difficult to estimate, so that estimates of ES can be subject to high model and parameter risk.

Question 5. Risk Measures and Capital Allocation.

(a) RORAC compatibility implies that the RORAC of the overall portfolio increases if one increases the weight of a subunit L_i, whose RORAC $-E(L_i)/\,\mathrm{AC}_i$ exceeds the RORAC of the entire company. In this sense the Euler principle gives appropriate signals for investment and portfolio decisions.

The existence of a diversification benefit is particularly relevant for subadditive risk measures where $\varrho(L) \leq \sum_{i=1}^{d} \varrho(L_i)$. The diversification benefit ensures that all business units profit from the subadditivity ($\mathrm{AC}_i \leq \varrho(L_i)$); otherwise there would be (theoretical) incentives for subunits to leave the company.

(b) As $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ we get that

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

with $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Since ϱ is positively homogeneous, it follows that

$$\mathrm{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X)\,.$$

Hence we get for the Euler principle

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} r_{\mathrm{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

Question 6. Copulas and Credit Risk

(a) One could use the folowing algorithm

Step 1: Generate $x_1, x_2 \sim t_\rho^\nu$: Let $w = \nu/y$ and $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$, where z_1, z_2 are drawn from $\mathcal{N}(0,1)$ and y is drawn from ξ_ν^2.
Step 2: Generate $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Put $(u_1, u_2) = (t_\nu(x_1), t_\nu(x_2))$.
Step 3: The quantile function of the exponential distribution with parameter λ is given by $u \mapsto -\ln(1-u)/\lambda$. According to part 2 of Sklar's theorem,

$$(\tau_1, \tau_2) = \big(-\ln(1-u_1)/\lambda_1, -\ln(1-u_2)/\lambda_2\big)$$

are the desired realisations.

(b) A lower value of ν leads to a higher tail dependence (in both tails). The event $\{\tau_1 \leq T\} \cap \{\tau_2 \leq T\}$ is realized iff τ_1 and τ_2 (and hence u_1 and u_2) take on very small values simultaneously; hence the probability of this event t increases with a stronger tail dependence and hence for a lower ν. The probability $P(\tau_1 \leq T)$ depends only on the marginal distribution of τ_1 so that it is independent of the copula parameter ν.

Question 7. Credit Portfolio Modeling

(a) Denote by $M^d = \sum_{i=1}^{d} Y_i$ the number of defaults. Then

$$P(M^d = 0) = \int_0^1 (1-q)^d g(q)dq; \quad P(M^d = 1) = d\int_0^1 q(1-q)^{d-1} g(q)dq.$$

(b) Given $Q = q$, the default indicators Y_i, $1 \leq i \leq d$ are independent with mean q; according to the law of large numbers it follows that given $Q = q$, $\lim_{m\to\infty} \frac{M^{(d)}}{d} = q$, or $M^d \approx dQ$. The formula immediately follows from this relation. The formula shows that the tail of the distribution of M^d is proportional to the tail of Q so that the latter is the main risk driver.

(c) It holds for $q \in (0,1)$ that

$$P(Q \leq q) = P\Big(Z \leq \frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big).$$

This gives $q_\alpha(Q) = \Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big)$. (This relation can be derived directly, using that Q is a strictly increasing function of Z.) Hence

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big).$$

For $\alpha > 0.5$ one has $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$, and $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ increases in σ.

Question 8. Interest Rate Risk Management.

(a) (i) The option to call the bond is exercised if and only if $(1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ holds at time 1. In this case the investor receives the amount $(1+r_G)^{-1}$ at time 1 and buys a zero bond with duration 1. Thus, the resulting payment at time 1 is given by

$$c_1 = \big((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)}.$$

At time 2 the investor receives the amount 1, either from the payment of the original bond or in the case of surrender from the payment of the bond purchased at time 1. Therefore, we have $c_2 = 1$.

While the investment in the zero bond with maturity 2 gives rise to the annual yield r_G the option to call the bond allows to benefit from rising interest rates in the market by reinvesting at time 1. The condition $P(0,2)\cdot(1+r_G) = (1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ says that in the period $[1,2]$, the interest rate of the market turns out to be higher than r_G.

(ii) We have $K = P(0,2)(1+r_G) = (1+r_G)^{-1}$. The cash-flow of the callable bond consists of the payments $c_1 = K \cdot 1_{K>P(1,2)}$ and $c_2 = 1_{K\leq P(1,2)}$.

When interest rates are rising in the market then the surrender option permits to ensure the payment of 1 at time 2 by buying a zero bond with duration 1 at time 1 for the lower price $P(1,2) < K$ and to earn $K-P(1,2) > 0$ at time 1. This motivates the following choice of the replicating portfolio.

At time 0, buy a zero bond with maturity 2 and a put option with maturity 1 and strike K on the zero bond with maturity 2. The value of this portfolio is given by

$$P(0,2) + \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).$$

We show that the portfolio is replicating the cash-flow.

- Case 1: $K > P(1,2)$. At time 1, exercise the put option and sell the zero bond with remaining duration of 1 for the price K.
- Case 2: $K \leq P(1,2)$. The put option is out of the money. The zero bond pays the amount 1 at time 2.

Therefore, the value V of the cash-flow (c_1, c_2) at time 0 is indeed equal to the value of the replicating portfolio.

Alternative. The surrender option allows to benefit from rising interest rates in the market. This feature is captured by a payer-swaption.

At time 0 buy a zero bond with maturity 2 and a payer-swaption with nominal K, fixed leg r_G and a single payment date 2. I.e., at time 2 the payer-swation pays $(L(1,2) - r_G)^+$. The value of the portfolio is given by

$$P(0,2) + K \cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (L(1,2) - r_G)^+ \cdot P(1,2)\right).$$

We show that the portfolio is replicating the cash-flow.

- Case 1: $K > P(1,2)$. In this case we have $(1+r_G)^{-1} > (1+L(1,2))^{-1}$, thus $r_G < L(1,2)$. At time 1 sell $\frac{K}{P(1,2)}$ shares of the zero bond with duration 1 (short selling) and exercise the swaption. Thus, the amount K is paid at time 1 and the amount

  $$1 - \frac{K}{P(1,2)} + K \cdot (L(1,2) - r_G) = 1 - K(1 + L(1,2)) + K(L(1,2) + 1 - K^{-1}) = 0$$

  is paid at time 2.

- Case 2: $K \leq P(1,2)$. Then, we have $(1+r_G)^{-1} \leq (1+L(1,2))^{-1}$, thus $r_G \geq L(1,2)$. The swaption is out of the money. The zero bond pays 1 at time 2.

Therefore, the value V of the cash-flow (c_1, c_2) at time 0 is indeed equal to the value of the replicating portfolio.

Remark. The two replicating portfolios have indeed the same value as is shown below. Note that only one replicating strategy is required in the exam question.

$$
\begin{aligned}
& K \cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (L(1,2) - r_G)^+ \cdot P(1,2)\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (K \cdot L(1,2) + K - 1)^+ \cdot P(1,2)\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (K \cdot (1 + L(1,2)) \cdot P(1,2) - P(1,2))^+\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (K - P(1,2))^+\right)
\end{aligned}
$$

(b) (i) By conditioning on $\mathcal{F}_1$ we obtain

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds) \mid \mathcal{F}_1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds) \mid \mathcal{F}_1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}
$$

(ii) Since insurance risk and financial risk are assumed to be independent, the value V of the insurance benefits is given by

$$\begin{aligned}
V &= {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \le P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(K \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\overset{(i)}{=} {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K \le P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(K \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&= {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2)) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + ({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&= {}_2p_x \cdot P(0,2) + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + ({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(c) The third summand under b) ii) takes into account that in the case that the insured person dies in the second year an endowment benefit can only arise through the exercise of the surrender option at time 1.

The value of the surrender option depends on the combined effects of insurance and financial risk. If the interest rate in period $[1,2]$ is greater than r_G, the probability of a payment is equal to ${}_1p_x$. Otherwise, the probability of a payment is equal to ${}_2p_x$ and thus equal to the probability that the insured sum is paid by a pure endowment policy without surrender option. The amount of the additional payment at time 1 depends on the level of interest rates.