Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A / Spezialwissen ERM 1

# Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 28. Mai 2021

*Hinweise:*

- Zwischen dem persönlichen Login zum Download der Prüfungsaufgaben und dem Abschluss des Uploads der Lösungen ist jeglicher Kontakt zu anderen Personen (mit Ausnahme des Support-Teams) bezüglich der Prüfungsaufgaben untersagt. Abgesehen davon gibt es bei dieser Prüfung keine Beschränkung bei der Verwendung von Hilfsmitteln.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

**Aufgabe 1. Risikomaße.** *[24 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Diskutieren Sie Vor- und Nachteile der Risikomaße Value at Risk, Expected Shortfall und Expektile im Vergleich aus axiomatischer Sicht.

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie das Expektil $e_\alpha(X)$ einer Pareto-verteilten Verlustvariablen mit der Dichte

$$f(x) = 2x^{-3} \cdot 1_{(1,\infty)}(x).$$

(c) *[12 Punkte]* Sei $X$ eine stetige Verlustvariable mit $\mathbb{E}|X| < \infty$. $F$ bezeichne die Verteilungsfunktion von $X$ und $e := e_\alpha(X)$ das $\alpha$-Expektil.

(i) *[5 Punkte]* Zeigen Sie $\frac{\mathbb{E}(X)-e}{\mathbb{E}(X-e)^+} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$ und folgern Sie

$$\mathbb{E}(X|X>e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right) \cdot e + \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))} \cdot \mathbb{E}(X).$$

*Hinweis.* Es bezeichnen $(x)^+ = \max(0,x)$ den Positivteil und $x^- = -\min(x,0)$ den Negativteil. Für alle $x, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x-z)^+ - (x-z)^- = x - z$.

(ii) *[7 Punkte]* Für Verlustvariablen $X$ mit $\mathbb{E}(X) = 0$ vereinfacht sich die Beziehung aus (i) zu

$$\mathbb{E}(X|X>e) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right) \cdot e,$$

wobei $\theta := F(e)$ gesetzt wird. Wir nehmen zusätzlich an, dass $F$ streng monoton wachsend ist, so dass $e = VaR_\theta(X)$ gilt.

($\alpha$) *[4 Punkte]* Geben Sie zwei verschiedene Schätzverfahren für den Expected Shortfall $ES_\theta(X)$ zum Niveau $\theta$ auf Basis einer Stichprobe vom Umfang $m$ aus der Verteilung von $X$ an.

($\beta$) *[3 Punkte]* Auf der Grundlage einer Zeitreihe von Beobachtungswerten $x_1, \ldots, x_n$ für ein hinreichend großes $n$, soll der Schätzer mit dem kleineren Scorewert

$$s_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}), \; i = 1, 2,$$

vorgezogen werden, wobei $m < n$ und die Scoring-Function $S$ gegeben ist durch

$$S(y,x) = \begin{cases} (1-\alpha)\cdot(y-x)^2; & x \le y \\ \alpha \cdot (y-x)^2 & ; \quad x > y. \end{cases}$$

Kommentieren Sie diesen Vorschlag aus axiomatischer Sicht.

**Aufgabe 2. Parameterrisiko.** *[21 Punkte]*

Die Verlustgröße $X$ sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$-verteilt mit **unbekanntem** $\mu \in \mathbb{R}$ und **bekanntem** $\sigma_0^2 \in \mathbb{R}^+$. Es sei $\alpha \in (0, 1)$.

(a) *[12 Punkte]* In einem Bayesianischen Ansatz werde der unbekannte Parameter $\mu$ als $\mathcal{N}(\theta, \tau^2)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ und $\tau^2 \in \mathbb{R}^+$ angenommen. Es liegen die Beobachtungswerte $x_1, \dots, x_n$ vor. In dieser Situation gilt:

- Die Randverteilung von $X$ ist $\mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2 + \tau^2)$.
- Die a posteriori Verteilung von $\mu$, gegeben $x_1$, ist $\mathcal{N}(\theta_1, \tau_1^2)$ mit

$$\tau_1^2 = \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad \theta_1 = \tau_1^2 \left[ \frac{x_1}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2} \right].$$

Leiten Sie aus diesen Informationen die Vorhersageverteilung von $X$, gegeben $x_1, \dots, x_n$ her und quantifizieren Sie das Parameterrisiko, das bei der Verwendung des Value at Risk zum Niveau $\alpha$ der Verteilung $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$ als Schätzwert für den Value at Risk von $X$ zum Niveau $\alpha$ entsteht.

(b) *[9 Punkte]* Der unbekannte Parameter werde durch den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ auf Basis einer unabhängigen Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ geschätzt. Geben Sie den Schätzer $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$ für das Risikomaß $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ an und bestimmen Sie das Residualrisiko, d.h. den $\mathrm{VaR}_\alpha$ der Residualposition $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X; \hat{\mu})$.

**Aufgabe 3. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle.** *[19 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Sei $S > T > 0$. $P(T, S)$ bezeichne den Preis eines Zerobonds mit Fälligkeit $S$ zur Zeit $T$. Im Gaußschen Zinsmodell mit konstanter Volatilität $\sigma$ hat $P(T, S)$ die Darstellung

$$P(T, S) = \frac{P(0, S)}{P(0, T)} \cdot Z,$$

wobei $Z \sim LN\left(-\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem $T$-Forward Maß und $Z \sim LN\left(\frac{1}{2}\tau, \tau\right)$ unter dem $S$-Forward Maß mit $\tau := \sigma^2(S-T)^2 T$ gilt. Die aktuelle Zinsstrukturkurve sei durch die Preise $P(0, t) = \exp(-0,02 \cdot t)$ der Zerobonds mit Fälligkeit $t$ gegeben. Bestimmen Sie den Preis zur Zeit $t = 0$ einer europäischen Call-Option mit Ausübungszeitpunkt 1 und Strike $K = 0,95$ auf einen Zerobond mit Fälligkeit 2. Gehen Sie von $\sigma = 0,1$ aus und verwenden Sie die Standardnormalverteilungsfunktion in der Darstellung Ihres Ergebnisses.

(b) *[9 Punkte]* Sei $F(t, T, S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt $t$ mit Ablauf $T \geq t$ und Fälligkeit $S > T$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^S(F(t, T, S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u, T, S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem $S$-forward-Maß $Q^S$ bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

**Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße.** *[25 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Illustrieren Sie anhand eines Praxisbeispiels die Bedeutung von low frequency high severity events im Bereich der Schadensversicherung, und erläutern Sie, warum diese Ereignisse Herausforderung für das aktuarielle Risikomanagement darstellen. Wie kann EVT beim Management derartiger Risiken helfen?

(b) *[10 Punkte]* In der folgenden Grafik 1 finden Sie simulierte Schadendaten(4000 Datenpunkte) und den zugehörigen mean excess plot. Erläutern Sie kurz, wie Sie mittels der peaks over threshold Methode den tail der Verteilung der Daten schätzen können. Welchen Wert würden Sie etwa für den Parameter $\xi$ erwarten: $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

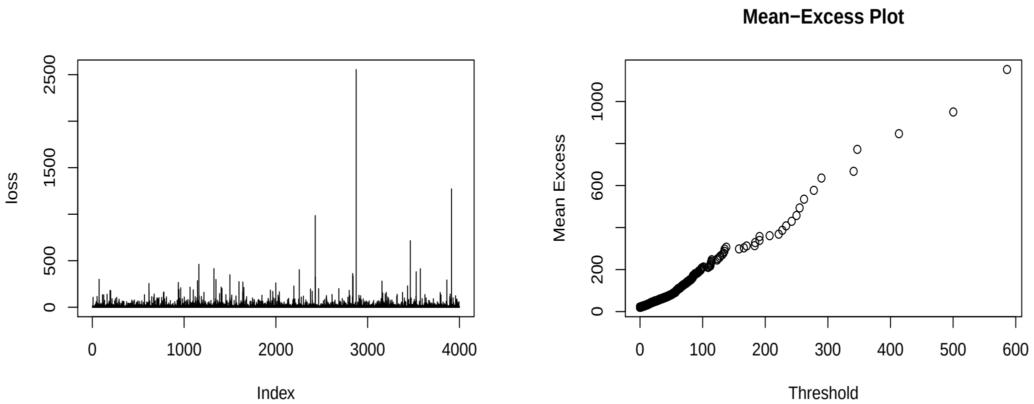


Abbildung 1: Links: loss data; rechts: zugehöriger mean excess plot.

(c) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Pareto-verteilte Zufallsvariable $X$ mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{b^\alpha}{(b+x)^\alpha}$.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ abfällt.

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie unter Verwendung allgemeiner Aussagen aus der EVT das asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}$ und diskutieren Sie das Ergebnis für die Spezialfälle $\alpha = 11$, $\alpha = 1.1$. Diskutieren Sie anhand dieser Ergebnisse kurz Vor- und Nachteile von VaR und ES bei der Risikomessung für heavy-tailed risks.

**Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation.** *[15 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit $d$ Geschäftseinheiten mit zugehörigem Verlust gegeben durch die Zufallsvariablen $L_i$, $1 \le i \le d$. Der Verlust des Gesamtunternehmens ist also $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Sei $\varrho$ ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß wie etwa $\mathrm{VaR}_\alpha$ oder $\mathrm{ES}_\alpha$ und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{AC}_1, \dots, \mathrm{AC}_d$ zu.

(a) *[6 Punkte]* Warum sind *RORAC Kompatibilität* und die Existenz eines *diversification benefit* ökonomisch wünschenswerte Eigenschaften des Euler Prinzips? Diskutieren Sie beide Punkte kurz.

(b) *[9 Punkte]* Die Zufallsvariablen $(L_1, \dots, L_d)$ seien multivariat normal verteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ und Kovarianzmatrix $\Sigma$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Euler Kapitalallokationen für $\varrho$ (die sogenannten expected shortfall contributions) durch den Ausdruck

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X})$$

gegeben sind, wobei $\varrho(X)$ das Risikomaß einer $N(0, 1)$ verteilten Zufallsvariable $X$ bezeichnet.

**Aufgabe 6. Copulas und Kreditrisiko.** *[20 Punkte]*

Aus der Analyse von Marktdaten sei bekannt, dass die Verteilung der Ausfallzeiten $\tau_1, \tau_2$ von zwei Firmen einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$ genügt, d.h. $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. Um die gemeinsame Verteilung zu beschreiben, nehmen wir an, dass der Zufallsvektor $(\tau_1, \tau_2)$ eine t Copula $C^t_{\nu,\rho}$ mit Parameter $\rho \in (0, 1]$, $\nu \geq 1$ hat.

(a) *[13 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige $N(0, 1)$-verteilte und $\chi^2_\nu$-verteilte Zufallsvariablen generieren kann. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Realisierung von $(\tau_1, \tau_2)$ generiert.

(b) *[7 Punkte]* Betrachten Sie einen kleinen Zeithorizont $T$ und nehmen Sie an, dass $\lambda_1 = \lambda_2$. Welchen Einfluss hat eine Reduzierung des Parameters $\nu$ qualitativ auf die Wahrscheinlichkeit $P\big((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T)\big)$ (das Ereignis bei dem beide Firmen vor dem Zeitpunkt $T$ ausfallen)? Wirkt sich eine Änderung von $\nu$ auch auf die Wahrscheinlichkeit $P(\tau_1 \leq T)$ aus? Begründen Sie Ihre Antworten.

**Aufgabe 7. Modellierung von Kreditportfolios.** *[26 Punkte]*

Im folgenden betrachten wir ein homogenes Portfolio von $d$ identischen Kreditnehmern. Dabei sei $d$ relativ groß, so dass einzelne Ausfälle keine große Auswirkung auf den Gesamtverlust haben. Wir modellieren die Ausfälle in diesem Portfolio durch ein austauschbares Bernoulli Mischmodell (exchangeable Bernoulli mixture) mit Mischvariable $Q$; die Dichte der Zufallsgröße $Q$ sei $g(q)$.

(a) *[6 Punkte]* Geben Sie für $k = 0$ und $k = 1$ eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau $k$ Firmen ausfallen.

(b) *[6 Punkte]* Für großes $d$ gilt für $M^d = \sum_{i=1}^{d} Y_i$ (Anzahl der Ausfälle in einem Portfolio mit $d$ Kreditnehmern) die Formel

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) \tag{1}$$

Erläutern Sie die Herleitung dieser Formel und begründen Sie anhand der Formel, warum in einem austauschbaren Bernoulli Mischmodell bei großem $d$ der tail von $Q$ der wesentliche Risikotreiber ist.

(c) *[14 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $Q$ eine probit-normal Verteilung hat mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, d.h.

$$Q = \Phi(\mu + \sigma Z), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung ist. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Q$ und, unter Verwendung von (1), den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$. Wie wirkt sich für $\alpha > 0.5$ ein höheres $\sigma$ auf $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ aus?

**Aufgabe 8. Zinsrisikomanagement.** *[30 Punkte]*

Es bezeichne $P(t,T)$ den Preis eines ausfallfreien Zerobonds mit Nominal 1 und Fälligkeit $T$ zum Zeitpunkt $t$. Ferner sei $r_G$ der Garantiezins, der sich durch Investition in den ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 realisieren lässt, d.h. es gelte $P(0,2) = (1+r_G)^{-2}$.

(a) *[16 Punkte]* Betrachten Sie die folgende Investitionsmöglichkeit zum Zeitpunkt 0: Ein ausfallfreier Bond der Laufzeit 2 sieht die reguläre Rückzahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt 2 vor und räumt dem Investor zudem ein Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 1 ein. Bei Ausübung des Kündigungsrechts wird anstelle der regulären Zahlung zum Zeitpunkt 2 der Betrag $K := (1+r_G)^{-1}$ zum Zeitpunkt 1 ausgezahlt.

(i) *[8 Punkte]* Ein finanzrationaler Investor verfolgt die Strategie, im Fall der Ausübung des Kündigungsrechts den erhaltenen Betrag in einen ausfallfreien Bond der Laufzeit 1 zu reinvestieren. Erklären Sie, dass diese Strategie zu dem Cashflow führt, der aus der Zahlung

$$c_1 = \left((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\right) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}$$

zum Zeitpunkt 1 und der Zahlung $c_2 = 1$ zum Zeitpunkt 2 besteht. Erläutern Sie die Wirkung dieser Investitionsstrategie im Vergleich zur Investition in einen ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 ohne Kündigungsrecht.

(ii) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert des Bonds mit Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 0 durch Replikation mit Hilfe eines geeigneten Portfolios, das aus Zerobonds, Optionen auf Zerobonds und Swaptions zusammengestellt werden kann.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Erlebensfallversicherung mit Stornooption für eine $x$-jährige Person, die die folgenden Zahlungen $c_i$ zum Zeitpunkt $i$ leistet:

$$\begin{aligned} c_1 &= K \cdot 1_{K>P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 1}, \\ c_2 &= 1_{K\leq P(1,2)} \cdot 1_{T\geq 2}, \end{aligned}$$

wobei $K$ den Rückkaufswert im Stornofall und $T$ die Restlebensdauer der versicherten Person bezeichnen. Wir setzen ${}_1p_x = \mathbb{P}(T \geq 1)$ und ${}_2p_x = \mathbb{P}(T \geq 2)$. Es bezeichnen $Q$ das risikoneutrale Maß und $r(t)$ die Short-Rate.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_Q\left(1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^2 r(s)\,ds\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{K\leq P(1,2)} \cdot \exp\left(-\int_0^1 r(s)\,ds\right)\right)$$

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert der Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt 0. Nehmen Sie dabei an, dass Biometrie und Finanzmarkt unabhängig sind. Verwenden Sie in der Darstellung des Ergebnisses Preise geeigneter Zerobonds und Optionen auf Zerobonds sowie die Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_1p_x$ und ${}_2p_x$, dass die versicherte Person ein bzw. zwei Jahre überlebt.

(c) *[4 Punkte]* Bildet man die Differenz des korrekten Ergebnisses aus b) ii) für $K = (1 + r_G)^{-1}$ und der mit den jeweiligen Erlebensfallwahrscheinlichkeiten multiplizierten Preise der in a) (ii) verwendeten Zerobonds und Optionen auf Zerobonds, so entsteht der Term

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)$$

Analysieren Sie, auf welche Weise versicherungstechnisches Risiko und Zinsrisiko interagieren.

# Lösungsvorschläge

## Aufgabe 1. Risikomaße.

(a) Der Expected Shortfall ist kohärent, aber nicht elizitierbar. Der Value at Risk ist nicht subadditiv, also nicht kohärent, aber elizitierbar. Expectile mit Niveau $\alpha \geq 0.5$ sind kohärent und elizitierbar. Fehlende Subadditivität steht der Abbildung von Diversifikationseffekten entgegen und kann zu falschen Steuerungsimpulsen führen. Elizitierbarkeit ermöglicht den transparenten Vergleich von Schätzverfahren im Backtesting anhand einer Scoring-Funktion.

(b) Wir berechnen zunächst die mittlere Über- und Unterschreitung einer Schwelle $y > 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-y)^+] &= \int_y^\infty (x-y)\cdot 2x^{-3}\,dx = \int_y^\infty 2x^{-2}\,dx - y\int_y^\infty 2x^{-3}\,dx \\
&= -2x^{-1}\Big|_y^\infty + yx^{-2}\Big|_y^\infty = 2y^{-1} - y^{-1} \\
&= y^{-1} \\
\mathbb{E}[(X-y)^-] &= \int_1^y (y-x)\cdot 2x^{-3}\,dx = y\int_1^y 2x^{-3}\,dx - \int_1^y 2x^{-2}\,dx \\
&= -yx^{-2}\Big|_1^y + 2x^{-1}\Big|_y^\infty = -y^{-1} + y + 2y^{-1} - 2 \\
&= y^{-1} + y - 2
\end{aligned}$$

Aus der Bestimmungsgleichung für das Expektil

$$\alpha\cdot\mathbb{E}[(X-y)^+] = (1-\alpha)\cdot\mathbb{E}[(X-y)^-]$$

erhalten wir damit die Gleichung

$$y^2 - 2y + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} = 0.$$

Wegen des Trägers $[1,\infty)$ der Verteilung ist die Lösung $1+\sqrt{1-\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} = 1 + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} =: e$ das $\alpha$-Expektil.

(c) (i) Mit dem Hinweis berechnen wir

$$\frac{\mathbb{E}(X)-e}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = \frac{\mathbb{E}[(X-e)^+]-\mathbb{E}[(X-e)^-]}{\mathbb{E}[(X-e)^+]} = 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|X>e) &= e+\mathbb{E}(X-e|X>e)\\
&= e+\frac{\mathbb{E}[(X-e)^+]}{1-F(e)}\\
&= e+\frac{(1-\alpha)(\mathbb{E}(X)-e)}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\\
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\right)\cdot e+\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-F(e))}\cdot\mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

(ii) ($\alpha$) Da die Verteilung stetig ist, folgt mit $\mathbb{E}(X)=0$ daraus

$$ES_\theta(X)=\mathbb{E}(X|X>VaR_\theta(X))=\mathbb{E}(X|X>e)=\left(1-\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)(1-\theta)}\right)\cdot e.$$

Somit bieten sich zwei Schätzverfahren an, der gewöhnliche ES-Schätzer $T_1$ und der Schätzer $T_2$ auf Basis des Expektils der empirischen Verteilung.

Bezeichnet $X_{(1)},\ldots,X_{(m)}$ die absteigend angeordnete Stichprobe, so lautet der gewöhnliche ES-Schätzer

$$T_1=\frac{1}{[(1-\theta)m]}\sum_{i=1}^{[(1-\theta)m]}X_{(i)},$$

wobei $[\cdot]$ den ganzzahligen Anteil bezeichnet.

Das $\alpha$-Expektil ist die Lösung $y$ der Gleichung

$$\alpha\cdot\mathbb{E}[(X-y)^+]-(1-\alpha)\cdot\mathbb{E}[(X-y)^-]=0.$$

Der gewöhnliche Schätzer für $e=VaR_\theta(X)$ ist der $[(1-\theta)m+1]$-größte Wert, d.h. $\tilde{T}_2:=X_{([(1-\theta)m+1])}$. Ein Schätzer $\hat{\alpha}$ für $\alpha$ auf Basis der empirischen Verteilung erhält man als Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\alpha\cdot(X_i-\tilde{T}_2)^+-(1-\alpha)\cdot(X_i-\tilde{T}_2)^-\right]=0.$$

Setze $T_2:=\left(1-\frac{1-\hat{\alpha}}{(1-2\hat{\alpha})(1-\theta)}\right)\cdot\tilde{T}_2$.

($\beta$) Der Vorschlag, den Schätzer $T_i$ mit dem kleineren Score-Wert

$$s_i:=\sum_{k=1}^{n-m-1}S(T_i[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+m}],x_{k+m+1}),\ i=1,2,$$

vorzuziehen, beruht auf der Scoring-Funktion $S$, die strikt konsistent für das $\alpha$-Expectil ist. Der Expected Shortfall ist jedoch nicht elizitierbar, so dass es keine strikt konsistente Scoring-Funktion zum Vergleich zweier verschiedener Testverfahren für den Expected Shortfall gibt.

**Aufgabe 2. Parameterrisiko.**

(a) Iterative Einbeziehung der Beobachtungswerte führt darauf, dass die a posteriori Verteilung von $\mu$, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, die Normalverteilung $\mathcal{N}(\theta_n, \tau_n^2)$ mit den Parametern

$$\tau_n^2 = \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau_{n-1}^2}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-1}$$

und

$$\theta_n = \tau_n^2 \left[\frac{x_n}{\sigma_0^2} + \frac{\theta_{n-1}}{\tau_{n-1}^2}\right] = \tau_n^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma_0^2} + \frac{\theta}{\tau^2}\right]$$

ist.

Die Randverteilung ist die Mischung der Beobachtungsverteilung über die a priori Verteilung des Parameters, während die Vorhersageverteilung die Mischung der Beobachtungsverteilung über die a posteriori Verteilung des Parameters ist. Aus der angegebenen Information über die Randverteilung lässt sich daher die Vorhersageverteilung entnehmen:

$$X \mid x_1, \ldots, x_n \sim \mathcal{N}\left(\theta_n, \sigma_0^2 + \tau_n^2\right)$$

Die Differenz des Value at Risk der Vorhersageverteilung, die die Unsicherheit über den Mittelwert mit einbezieht, und der Normalverteilung $\mathcal{N}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_0^2\right)$, in der der Punktschätzer für den Mittelwert verwendet wird, ist ein Maß für das Parameterrisiko:

$$\theta_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \left(\sqrt{\sigma_0^2 + \tau_n^2} - \sigma_0\right) \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

(b) Der Schätzer für den Value-at-Risk ist gegeben durch

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X;\hat{\mu}) = \hat{\mu} + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

und ist $\mathcal{N}\left(\mu + \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$-verteilt. Die Residualposition $X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X;\hat{\mu})$ ist $\mathcal{N}\left(-\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha), \sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$-verteilt. Ihr Value-at-Risk ist das Residualrisiko

$$\begin{aligned} RR(X) &= \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(X;\hat{\mu})\right) \\ &= -\sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \sigma_0 \cdot \Phi^{-1}(\alpha). \end{aligned}$$

**Aufgabe 3. Zinsrisiko und Zinsrisikomodelle.**

(a) Die Call-Option zahlt zur Zeit $T = 1$ den Betrag

$$C_1 = (P(1,2) - K)^+ = P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K} - K \cdot 1_{P(1,2)>K}$$

Wir berechnen den Preis $C_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$, indem wir den ersten Summanden unter dem $(S = 2)$-Forward-Maß $Q^{(2)}$ und den zweiten unter dem $(T = 1)$-forward Maß $Q^{(1)}$ bewerten:

$$\begin{aligned}
C_0 &= P(0,2) \cdot \mathbb{E}^{(2)}\left(\frac{1}{P(1,2)} \cdot P(1,2) \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \mathbb{E}^{(1)}\left(\frac{1}{P(1,1)} \cdot 1_{P(1,2)>K}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}(P(1,2) > K) - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}(P(1,2) > K) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(Z > K\frac{P(0,1)}{P(0,2)}\right) \\
&= P(0,2) \cdot Q^{(2)}\left(\frac{\ln(Z) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot Q^{(1)}\left(\frac{\ln(Z) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} > \frac{\ln(\exp(0,02)K) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&= P(0,2) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0,02 - \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&\quad - K \cdot P(0,1) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) + 0,02 + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&= \exp(-0,04) \cdot (1 - \Phi(-0,36293)) - 0,95 \cdot \exp(-0,02) \cdot (1 - \Phi(-0,26293)) \\
&= 0,05435.
\end{aligned}$$

*Anmerkung.* Das konkrete numerische Ergebnis war nicht Bestandteil der Aufgabenstellung. Gefragt war die Darstellung mit Hilfe von $\Phi$.

(b) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß $Q^S$. Daher gilt

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

Im Spezialfall $t = T$ nimmt diese Beziehung die Gestalt

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \leq u \leq T < S,$$

an, da $F(T,T,S) = L(T,S)$ gilt. Dies zeigt, dass zur Zeit $u \leq T$ die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ reflektiert.

**Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße.**

(a) Beispiele für high frequency/low severity events in der Schadenversicherung: Versicherung gegen Naturkatastrophen oder gegen Terrorattacken; Risiken aufgrund von Rechtsstreitigkeiten im operational risk etc.

High severity/low frequency events sind aus verschiedenen Gründen schwer zu managen: zum einen hat man meist mit Datenknappheit zu tun (seltenes Auftreten von Großschäden impliziert wenige Beobachtungen); zum anderen weist die Schadensverteilung eines Portfolios mit high frequency/low severity Risiken eine sehr hohe Variabilität auf, so dass Diversifikation der Verluste nur im Zeitablauf, d.h. über mehrere Bilanzperioden möglich ist. (In normalen Jahren werden die Prämieneinnahmen die Schäden übersteigen, in Katastrophenjahren sind die Schäden größer als die Prämien).

EVT kann einen wesentlichen Beitrag zur Schätzung der Ränder der Schadenshöhenverteilung und somit zum Umgang mit der Datenproblematik leisten.

(b) Zunächst wählt man eine hohe Schranke $u$, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x-u)$, wobei $F_u$ die excess distribution von $F$ bezüglich $u$ bezeichnet. Anschließend modelliert man $F_u$ durch eine GPD und fitted die Parameter $\xi$ und $\beta$ (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle $u$; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ und einen tail Schätzer durch die POT Methode. Bei den vorgegebenen Daten ist der mean excess Plot annähernd linear wachsendend mit einer positiven aber endlichen Steigung. Da die excess function der GPD (und somit die asymptotische Steigung des mean excess Plots bei ausreichend vielen Daten) eine Steigung von $\frac{\xi}{1-\xi}$ hat, deutet der mean excess Plot klar auf den Fall $0 < \xi < 1$ hin.

(c) (i) Es gilt

$$\overline{F}(x) = \frac{b^a}{(b+x)^a} = x^{-a}\frac{b^a}{b/x^a + 1},$$

und für $x \to \infty$ konvergiert dies gegen $x^{-a}b^a$.

(ii) Da die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung nach Aufgabenteil i) polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ abfällt, gilt asymptotisch

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)} = \frac{1}{1-\xi} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Wir erhalten also für $\alpha = 11$, dass für großes $\alpha$ $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 1.1\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. VaR und ES sind fast gleich. Für $\alpha = 1.1$ ergibt sich $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 11\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. es gibt einen drastischen Unterschied zwischen beiden Risikomaßen. Allgemein gilt, dass der Unterschied zwischen VaR und ES umso größer ist, je größer $\xi$ (bzw. je kleiner $\alpha = 1/\xi$) ist, d.h. je mehr Gewicht der tail von $X$ hat. Es folgt, dass speziell für heavy-tailed risks ($\xi$ relativ nahe an 1) VaR das tail Risiko unterschätzt. Auf der anderen Seite ist der tail parameter $\xi$ unter Umständen schwer zu schätzen, so dass Schätzungen für ES ein hohes Modellrisiko aufweisen.

**Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation**

(a) RORAC Kompatibilität bedeutet, dass der RORAC des Gesamtportfolios wächst, wenn das Gewicht einer subunit $L_i$, deren RORAC $-E(L_i)/\,\mathrm{AC}_i$ höher ist als der RORAC des Gesamtunternehmens, erhöht wird. In diesem Sinn gibt das Euler Prinzip also korrekte Signale für die Unternehmenssteuerung. Ein diversification benefit ist insbesondere relevant für subadditive Risikomaße, bei denen $\varrho(L) \le \sum_{i=1}^d \varrho(L_i)$. Der diversification benefit stellt sicher, dass jede business unit von der Subadditivität profitiert ($\mathrm{AC}_i \le \varrho(L_i)$); andernfalls gäbe es Anreize für Untereinheiten, das Unternehmen zu verlassen.

(b) Da $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ folgt, dass

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Da $\varrho$ positiv homogen ist, folgt dass

$$\mathrm{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X).$$

Daher erhalten wir für das Euler Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} r_{\mathrm{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

**Aufgabe 6. Copulas und Kreditrisiko.**

(a) Schritt 1: Konstruktion von $t^\nu_\rho$ verteilten Realisierungen $x_1, x_2$: Setze $w = \nu/y$ und $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$, wobei $z_1$, $z_2$ aus $\mathcal{N}(0,1)$ und $y$ aus $\xi^2_\nu$ gezogen werden.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Setze $(u_1, u_2) = (t_\nu(x_1), t_\nu(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda$ ist durch $u \mapsto = -\ln(1-u)/\lambda$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\tau_1, \tau_2) = \big(-\ln(1-u_1)/\lambda_1, -\ln(1-u_2)/\lambda_2\big)$$

die gewünschten Realisierungen.

(b) Eine Reduzierung von $\nu$ führt zu einer stärkeren tail dependence (in beiden tails). Das Ereignis $P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big)$ bedeutet, dass $\tau_1$ und $\tau_2$ und somit $u_1$ und $u_2$ sehr kleine Werte annehmen; diese Wahrscheinlichkeit steigt bei stärkerer tail dependence und somit bei einer Reduzierung von $\nu$. Das Ereignis $P(\tau_1 \le T)$ hängt nur von der Randverteilung von $\tau_1$ ab und ist somit unabhängig von $\nu$.

**Aufgabe 7. Modellierung von Kreditportfolios.**

(a) Es sei $M^d = \sum_{i=1}^d Y_i$ die Anzahl der Ausfälle. Dann gilt

$$P(M^d = 0) = \int_0^1 (1-q)^d g(q) dq; \quad P(M^d = 1) = d \int_0^1 q(1-q)^{d-1} g(q) dq.$$

(b) Gegeben $Q = q$ sind die Ausfallindikatoren $Y_i$ unabhängig mit Mittelwert $q$; nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt also, dass gegeben $Q = q$, $\lim_{m\to\infty} \frac{M^{(d)}}{d} = q$, oder $M^d \approx dQ$. Hieraus ergibt sich die Formel. Die Formel zeigt direkt, dass der tail der Verteilung der Anzahl an Ausfällen proportional zum tail von $Q$ ist, so dass der tail von $Q$ der wesentliche Risikotreiber ist.

(c) Es gilt für $q \in (0,1)$ dass

$$P(Q \le q) = P\Big(Z \le \frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\Phi^{-1}(q) - \mu}{\sigma}\Big).$$

Damit erhalten wir $q_\alpha(Q) = \Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big)$. (Dies kann man auch direkt herleiten, wenn man verwendet, dass $Q$ eine streng monotone Transformation von $Z$ ist.) Die Grenzwertformel gibt also

$$\mathrm{VaR}_\alpha(M^d) \approx d\Phi\big(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)\big).$$

Für $\alpha > 0.5$ ist $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(M^d)$ ist somit wachsend in $\sigma$.

**Aufgabe 8. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.**

(a) (i) Das Kündigungsrecht wird genau dann ausgeübt, wenn zum Zeitpunkt 1 $(1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ gilt. Dann erhält der Investor zum Zeitpunkt 1 den Betrag $(1+r_G)^{-1}$ und kauft einen Zerobond mit Laufzeit 1. Folglich ist

$$c_1 = \big((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)}.$$

Zum Zeitpunkt 2 erhält der Investor den Betrag 1, entweder als Auszahlung des ursprünglichen Bonds oder im Falle der Kündigung als Zahlung des zum Zeitpunkt 1 gekauften Zerobonds. Also gilt $c_2 = 1$.

Während die Investition in den Zerobond der Laufzeit 2 die jährliche Rendite $r_G$ sichert, ermöglicht das Kündigungsrecht, durch Reinvestition an einem steigenden Marktzins zu partizipieren. Die Bedingung $P(0,2) \cdot (1+r_G) = (1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ besagt, dass in der Periode $[1,2]$ der Marktzins höher als $r_G$ ausfällt.

(ii) Es ist $K = P(0,2)(1+r_G) = (1+r_G)^{-1}$. Der Cashflow des Bonds mit Kündigungsrecht besteht aus den Zahlungen $c_1 = K \cdot 1_{K > P(1,2)}$ und $c_2 = 1_{K \leq P(1,2)}$.

Das Kündigungsrecht ermöglicht es bei gestiegenem Marktzins, die Auszahlung 1 zum Zeitpunkt 2 durch Kauf des Zerobonds mit Laufzeit 1 zum Zeitpunkt 1 zu dem geringeren Preis $P(1,2) < K$ sicherzustellen und die Differenz $K - P(1,2) > 0$ zum Zeitpunkt 1 zu vereinnahmen. Dies motiviert die folgende Wahl des Replikationsportfolios.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Put-Option mit Fälligkeitszeitpunkt 1 und Strike $K$ auf den Zerobond mit Laufzeit 1. Der Wert dieses Portfolios beträgt

$$P(0,2) + \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K > P(1,2)$. Übe zum Zeitpunkt 1 die Put-Option aus und verkaufe den Zerobond mit der Restlaufzeit 1 zum Preis von $K$.
- 2. Fall: $K \leq P(1,2)$. Die Put-Option ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert $V$ des Cashflows $(c_1, c_2)$ zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

*Alternative.* Die Kündigungsoption ermöglicht die Partizipation an einem gestiegenen Marktzins. Dies kann durch eine Payer-Swaption abgebildet werden.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Payer-Swaption mit Nominal $K$, fixed leg $r_G$ und einzigem Zahlungstermin 2. D.h., zum Zeitpunkt 2 erfolgt eine Zahlung der Höhe $(L(1,2)-r_G)^+$. Der Wert des Portfolios beträgt

$$P(0,2)+K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K>P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1}>(1+L(1,2))^{-1}$ also $r_G<L(1,2)$. Zum Zeitpunkt 1 verkaufe $\frac{K}{P(1,2)}$ Einheiten des Zerobonds mit Laufzeit 1 (leer) und übe die Swaption aus. Dadurch entsteht eine Zahlung von $K$ zum Zeitpunkt 1 und eine Zahlung von

  $$1-\frac{K}{P(1,2)}+K\cdot(L(1,2)-r_G)=1-K(1+L(1,2))+K(L(1,2)+1-K^{-1})=0$$

  zum Zeitpunkt 2.

- 2. Fall: $K\le P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1}\le(1+L(1,2))^{-1}$ also $r_G\ge L(1,2)$. Die Swaption ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert $V$ des Cashflows $(c_1,c_2)$ zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

*Anmerkung.* Die beiden Replikationsportfolios haben tatsächlich denselben Wert, wie die folgende Rechnung außerhalb der Aufgabenstellung zeigt.

$$\begin{aligned}
&K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot L(1,2)+K-1)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot(1+L(1,2))\cdot P(1,2)-P(1,2))^+\right)\\
&\quad=\ \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K-P(1,2))^+\right)
\end{aligned}$$

(b) (i) Durch Bedingen auf $\mathcal{F}_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\mid \mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds)\mid \mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Auf Grund der Unabhängigkeit von Finanzmarkt und Biometrie ergibt sich der Wert $V$ der Versicherungsleistungen zu

$$\begin{aligned}
V &= {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K> P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\overset{(i)}{=} {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\leq P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K> P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))\cdot 1_{\{K> P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K> P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot P(0,2) + {}_1p_x\cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))^+\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K> P(1,2)\}}\cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(c) Der dritte Summand unter b) ii) berücksichtigt, dass in dem Fall, dass der Tod im 2. Jahr eintritt, der vorgezogene Zahlungstermin bei Ausübung der Stornooption eine Erlebensfallleistung überhaupt erst ermöglicht.

Der Wert der Stornooption hängt von dem kombinierten Einfluss von Biometrie und Zins ab. Liegt der Zins in Periode $[1,2]$ über $r_G$, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Auszahlung des Vertrags ${}_1p_x$. Anderenfalls beträgt die Auszahlungswahrscheinlichkeit ${}_2p_x$, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die

Versicherungssumme in einer reinen Erlebensfallversicherung ohne Stornooption ausgezahlt wird. Die Höhe der zusätzlichen Auszahlung zum Zeitpunkt 1 hängt vom Zinsniveau ab.