DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 30. Oktober 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 18 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte beachten Sie: Zwischen dem persönlichen Login zum Download der Prüfungsaufgaben und dem Abschluss des Uploads der Lösungen ist jeglicher Kontakt zu anderen Personen (mit Ausnahme des Support-Teams) bezüglich der Prüfungsaufgaben untersagt.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Modellierung und Versicherungsmathematische Funktion [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Versicherungstechnische Risiken in internen Unternehmensmodellen von Sachversicherern) [23 Punkte]

Der Sachversicherer „Haus & Hof“ verfügt über ein internes Unternehmensmodell unter Solvency II. Um eine frühzeitige Abschätzung der Risiko- und Solvenzsituation zum 31.12.2021 zu erhalten, führt das Unternehmen bereits Ende September 2021 einen vorgezogenen Lauf des internen Modells durch.

Basisinformationen:

- Grundlage dieses Modelllaufs bilden die geplanten Bestands-, Prämien- und Rückstellungsvolumen nach aktuellem Hochrechnungs- und Planungsstand.
- In den Modelllauf fliesst die aktuellste Kalibrierung des Prämienrisikos ein. Die Katastrophenschäden wurden aus einem Lauf der externen Modelle auf Basis des Cat-Exposures zur Jahresmitte generiert.
- Da die Rückversicherungserneuerung zum Zeitpunkt des Modelllaufs noch nicht abgeschlossen ist, basieren die Nettoergebnisse des kommenden Anfalljahres 2022 auf der aktuellen Rückversicherungsstruktur für das Anfalljahr 2021.
- Die relevanten Verteilungen für das Reserverisiko sind aus einer Skalierung der letztjährigen Verteilungen anhand der besten Schätzwerte für die Schadenrückstellungen aus der Hochrechnung hervorgegangen.
- Die Schadenzahlungen umfassen Zahlungen für Normalschäden, Großschäden und Katastrophenschäden.
- Zur Gewährleistung der Konsistenz zwischen Rückstellungsbewertung und Risikomessung entspricht das Simulationsmittel der zukünftigen Schadenzahlungen für Vorjahresschäden dem besten Schätzwert der Schadenrückstellungen.

Aus dem Lauf des internen Modells liegen die folgenden Simulationen aller maßgeblichen Größen für das Prämien- und Reserverisiko vor. Alle Ergebnisgrößen sind jeweils Netto nach Rückversicherung und in Mio. € angegeben:

Modellgröße	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
Verdiente Prämie Anfalljahr 2022	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300
Kosten Anfalljahr 2022	350	350	350	350	350
Schadenzahlungen in 2022					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2022	550	250	450	300	200
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022	1.100	900	1.000	800	1.200
Schadenzahlungen nach 2022					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2022	1.100	500	900	600	400
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022	1.300	1.500	1.400	1.700	1.600
geschätzte Schaden-zahlungen nach 2022 (Schätzung per 31.12.2022)					
Zahlungen für Neuschäden aus Anfalljahr 2022	900	600	800	650	550
Zahlungen für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022	1.400	1.500	1.450	1.600	1.550

Aufgaben:

(a) *[5 Punkte]* Wodurch unterscheiden sich die einjährige und ultimative Risikosicht in der Versicherungstechnik? Nennen Sie jeweils zwei Einsatzbereiche für Ergebnisse aus der einjährigen und ultimativen Risikosicht.

(b) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie aus den vorliegenden Simulationen die empirischen Verteilungen der relevanten Ergebnisgrößen zur Messung des Prämien- und Reserverisikos in der ultimativen und einjährigen Risikosicht.

(c) *[4 Punkte]* In welchen Szenarien kommt es innerhalb des Kalenderjahres 2022 zu einem versicherungstechnischen Verlust? Resultieren die Verluste in diesen Szenarien eher aus der Abwicklung der Vorjahresschäden oder aus dem Anfall von Neuschäden?

(d) *[4 Punkte]* Ihr Vorstand schlägt mit Verweis auf die hohe Qualität und Verlässlichkeit der Planzahlen vor, zur Beschleunigung der Jahresendprozesse zukünftig auf den Modelllauf zum 31.12. zu verzichten und stattdessen die Ergebnisse aus dem vorgezogenen Lauf unverändert zu übernehmen. Was entgegen Sie ihm? Und wie könnte ein Kompromissvorschlag aussehen?

Aufgabe 2 (Naturgefahrenmodellierung) [25 Punkte]

Der Versicherer „Haus & Hof“ zeichnet Wohngebäuderisiken in Deutschland. Den Modellierungsaktuaren liegt die folgende Event Loss Table (ELT) im Outputformat des Anbieters RMS vor. Die ELT wurde mit einem externen meteorologischen Modell für Sturmrisiken in Deutschland generiert. Monetäre Größen sind im Folgenden in der Einheit Mio. € angegeben.

EVENT ID	RATE	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE
4711	50,0%	200	135	65	5.000
4712	25,0%	100	30	20	40.000
4713	2,5%	1.000	50	50	10.000

Basisinformationen:

- Die Resimulation der ELT im internen Modell von „Haus & Hof“ umfasst fünf Simulationen. In einem vorgelagerten Simulationssschritt haben die Modellierungsaktuare bereits die Anzahl an Ereigniseintritten pro Simulationspfad bestimmt und den Einzelereignissen entsprechende EVENT IDs zugeordnet:

Simulation M	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	2	4711	4712
2	0		
3	0		
4	1	4711	
5	2	4712	4711

- Zusätzlich liegen zu den einzelnen Ereignissen die folgenden Realisierungen von $\Phi^{-1}(U)$ vor, die aus der Simulation einer auf dem Einheitsintervall $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U und der anschließenden Transformation mittels Φ^{-1}, der Inversen der Gauss'schen Phi-Funktion Φ, hervorgegangen sind:

Simulation M	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	2	1,08	0,33
2	0		
3	0		
4	1	-0,41	
5	2	-0,15	0,20

- Für die Resimulation im internen Modell unterstellen die Aktuare den Schadengraden pro Ereignis jeweils eine Logarithmische Normalverteilung. *Hinweise: Eine Zufallsgröße X heißt lognormalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ. Die Verteilungsfunktion F_X von X lautet*
$$F_X(z) = \Phi\left(\frac{\ln(z) - \mu}{\sigma}\right),\ z > 0.$$
Hierbei repräsentiert die Funktion Φ erneut die Gauss'sche Phi-Funktion. Ferner existieren sämtliche Momente von X und besitzen die Darstellung:
$$\mathbb{E}[X^n] = \exp\left(n \cdot \mu + \frac{n^2 \cdot \sigma^2}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgaben:

(a) *[3 Punkte]* Inwiefern ist die Wahl der Logarithmischen Normalverteilung für den Schadengrad konsistent zum statistischen Modell, das den ELTs des Anbieters RMS originär zugrundeliegt? Was sind mögliche Nachteile der getroffenen Verteilungswahl?

(b) *[11 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der vorliegenden Simulationen und den Informationen aus der ELT die empirische Verteilung des maximalen Ereignisschadens und des Jahresschadens. Berechnen Sie den *AAL* (Annual Aggregate Loss) als mittleren Jahresschaden aus den Simulationen. Runden Sie bitte alle Verteilungsparameter auf zwei Nachkommastellen und rechnen Sie bei momentären Größen bitte durchgehend mit vollen Mio. €-Beträgen.

(c) *[4 Punkte]* Berechnen Sie den *AAL* anhand der vorliegenden ELT analytisch und halten Sie diesen gegen den *AAL*, der in Aufgabenteil b) aus den Simulationen ermittelt worden ist. Was fällt auf? Weshalb kann es allgemein nützlich sein, den Simulationsergebnissen die zugehörigen analytisch berechneten Kenngrößen gegenüberzustellen? *Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, gehen Sie bitte von einem mittleren Jahresschaden von 160 Mio. € aus.*

(d) *[7 Punkte]* Die Modellierungsaktuare von „Haus & Hof“ werden von der internen Validierungseinheit des Unternehmens mit den Ergebnissen einer wissenschaftlichen Studie konfrontiert, wonach die Negative Binomialverteilung statistisch am besten zur empirischen Frequenzverteilung europäischer Winterstürme in den letzten 50 Jahren passt. Zudem legt die Studie nahe, dass Winterstürme in Europa durch das Auftreten von Serien mittelschwerer und schwerer Sturmereignisse innerhalb einer Sturmsaison (sog. Clustering-Effekt) geprägt sind.

Inwieweit vertragen sich diese Erkenntnisse mit den Annahmen des statistischen Modells, welches der obigen ELT zugrundeliegt? Wie könnten sich mit Blick auf die Resimulation im internen Modell mögliche Unzulänglichkeiten des statistischen Modells ggf. beheben oder umgehen lassen - und was würde dies bedeuten hinsichtlich

- Risikokapitalbedarf
- Ausgestaltung der Rückversicherung
- Pricing und Underwriting?

Aufgabe 3 (Risikoanalyse im Rahmen einer Produkteinführung)
[22 Punkte]

Sie arbeiten im Risikomanagement des Sachversicherers „DGI - Deutsche Gewerbe & Industrieversicherung", der sich auf die Zeichnung gewerblicher und industrieller Risiken von Firmen mit Sitz in Deutschland spezialisiert hat.

Basisinformationen:

Die DGI will in 2022 ein neues Produkt für Firmenkunden auf den Markt bringen, das diesen zum Teil weltweit tätigen Unternehmen Versicherungsschutz bei Cyberangriffen bietet. Sie werden vorgelagert zur Einführung des Cyber-Produkts um eine Stellungnahme aus Risikomanagement-Perspektive gebeten.

Folgendes ist Ihnen zum Cyber-Produkt bekannt:

- *Deckung:* Das Produkt soll sowohl eigene Forderungen (zum Beispiel bei Betriebsunterbrechung) als auch Forderungen von Dritten (z.B. bei Datendiebstahl) abdecken. Das maximale Zeichnungslimit einer einzelnen Police soll jährlich 100 Mio. € vor Rückversicherung betragen.

- *Geschäftsplan:* Im ersten Jahr nach Produkteinführung sollen zunächst 1.000 Verträge gezeichnet werden, der Bestand soll innerhalb von drei Jahren auf 5.000 Policen anwachsen.

- *Pricing:* Da die DGI weder über Daten noch eigene Erfahrungswerte zu Cyber-Deckungen verfügt, werden die Cyber-Policen in Zusammenarbeit mit einem Kooperationspartner entwickelt und tarifiert. Bei dem Kooperationspartner handelt es sich um einen weltweit tätigen Rückversicherer, der langjährige Erfahrungen im Bereich Cyber vorweisen kann.

- *Rückversicherung:* in den ersten drei Jahren ist zunächst nur proportionale Rückversicherung mit einer Abgabe von 50% vorgesehen. Als alleiniger Rückversicherer ist der Kooperationspartner angedacht.

- *Risikomessung:* Der Kooperationspartner stellt der DGI für das erste Jahr nach Produkteinführung die folgende AEP-Kurve zur Verfügung, die aus dem Lauf eines exposure-basierten Modells mit einem „Benchmark-Portfolio" erzeugt worden ist:

Wiederkehrperiode / Jährigkeit	Höhe der Cyberschäden (in Mio. €)
2	20
10	50
50	100
200	200
500	800

Das „Benchmark-Portfolio“ besteht aus einem hypothetischen Bestand von 1.000 Cyber-Verträgen, dem ein marktüblicher Branchenmix der Kunden und entsprechende Deckungssummen unterstellt wurden.

Ihnen liegen darüberhinaus folgende Informationen zur Solvenzsituation der DGI vor:

- Die Solvenzquote der DGI beträgt per 31.12.2020 200%, anrechenbaren Eigenmitteln in Höhe von 2.000 Mio. € steht hierbei ein Solvabilitätskapitalbedarf (SCR) von 1.000 Mio. € gegenüber.
- Die DGI verwendet zur Berechnung des SCRs ein aufsichtsrechtlich genehmigtes internes Modell, das der im Seminar skizzierten idealtypischen Struktur von DFA-Modellen im Schaden-Unfallbereich folgt.
- Die Klassifizierung der Risiken im internen Modell entspricht der Standardformel nach Solvency II.

Aufgaben:

(a) *[4 Punkte] Auswirkung auf Risikoprofil*: Benennen Sie anhand der vorliegenden Informationen vier verschiedene (versicherungstechnische / nicht-versicherungstechnische) Risiken im internen Modell der DGI, die von der Einführung des Cyber-Produkts betroffen sein könnten. Erläutern Sie die möglichen Auswirkungen auf die einzelnen Risiken jeweils kurz.

(b) *[6 Punkte] Abbildung im internen Modell*: Welche Gründe könnten dafürsprechen, Cyber als separates, eigenständiges Segment im internen Modell abzubilden? Nennen Sie zusätzlich drei Komponenten des DFA-Modells, die die DGI hierzu anpassen müsste, und erläutern Sie die erforderlichen Anpassungen jeweils kurz.

(c) *[5 Punkte] Modellierungsansatz:* Inwiefern erscheinen die vorliegende AEP-Kurve und ihr zugrundeliegender Modellierungsansatz zweckmäßig und ausreichend, das Risiko zukünftiger Schadenfälle aus Cyberdeckungen (Brutto vor und Netto nach Rückversicherung) im internen Unternehmensmodell abbilden zu können? Nennen Sie einen möglichen alternativen Modellierungsansatz für Cyberschäden und bewerten Sie auch dessen Eignung.

(d) *[7 Punkte] Risikomessung:* Gegeben seien die folgenden vier Realisierungen einer auf dem Einheitsintervall $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsgröße U_S, die im internen Modell vorsimuliert wurden:

Simulationspfad M	$U_S^{(M)}$
1	0,662
2	0,850
3	0,019
4	0,996

Erzeugen Sie unter Verwendung der AEP-Kurve aus den Basisinformationen die zugehörigen Cyberschäden pro Simulationspfad und schätzen Sie den erwarteten Jahresgesamtschaden aus der empirischen Verteilung.

Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Reservebericht und Reservierungsprozess) [21 Punkte]

Aufgrund eines personellen Wechsels übernehmen Sie erstmals die Durchführung des Reservierungsprozesses für ein Versicherungsunternehmen.

(a) *[2 Punkte]* Begründen Sie, warum Ihnen der Reservebericht der letzten Prozessdurchführung als eine wichtige Grundlage für Ihre Arbeit dienen kann.

(b) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie zwei relevante Gründe, warum der Reservebericht für Sie als alleinige Informationsquelle für die aktuelle Prozessdurchführung nicht ausreicht.

(c) *[15 Punkte]* Benennen Sie 5 weitere Informationsquellen, die Sie für die Durchführung des Reservierungsprozesses sinnvollerweise hinzuziehen sollten. Beschreiben Sie jeweils explizit

- die Informationsquelle,
- die Art der Information und
- warum Sie diese Information benötigen.

Aufgabe 5 (Ein gemischtes Modell aus ILR und CL) [18 Punkte]

Für ein Geschäftssegment bezeichne $S_{i,k}$ die Schadensumme aller Schäden des Anfalljahres i mit $i = 1, \dots n$, welche im Abwicklungsjahr k mit $k = 1, \dots, u$ neu gemeldet wurden zum Ende dieses Abwicklungsjahres k.

$T_{i,k}$ bezeichne den Zuwachs bzw. Rückgang des Anfalljahres i im Abwicklungsjahr k der Schadensumme aller bereits in früheren Abwicklungsjahren gemeldeten Schäden.

Weiter sei v_i ein Volumenmaß für das Anfalljahr i und es bezeichne $\mathcal{D}_{i,k}$ die σ-Algebra, die von $\{S_{i,1}, \dots, S_{i,k}, T_{i,1}, \dots, T_{i,k}\}$ erzeugt wird. Insbesondere gilt $T_{i,1} = 0$ und für die kumulierte Schadensumme $C_{i,k}$ gilt

$$C_{i,1} = S_{i,1} \quad \text{und} \quad C_{i,k} = C_{i,k-1} + S_{i,k} + T_{i,k} \quad \text{mit } k = 2, \dots, u.$$

Dabei sollen die folgenden Modellannahmen des „Mixed Model" gelten:

- **(MM1)** Die Anfalljahre $\{S_{i,1}, \dots, S_{i,u}, T_{i,1}, \dots, T_{i,u}\}$, $1 \le i \le n$ sind unabhängig.
- **(MM2)** Es gibt Parameter $m_k \in \mathbb{R}$, so dass für $1 \le i \le n$ und $1 \le k \le u$
$$\mathrm{E}(S_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i,k-1}) = m_k \cdot v_i.$$
- **(MM3)** Es gibt Parameter $h_k \in \mathbb{R}$, so dass für $1 \le i \le n$ und $2 \le k \le u$
$$\mathrm{E}(T_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i,k-1}) = h_k \cdot C_{i,k-1}.$$

(a) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass für $1 \le i \le n$ und $2 \le k \le u$ mit $f_k = h_k + 1$

$$\mathrm{E}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i,k-1}) = f_k \cdot C_{i,k-1} + m_k \cdot v_i$$

gilt.

(b) *[4 Punkte]* Setzen Sie die dem „Mixed Model" zugrundeliegenden Modellannahmen in Zusammenhang zum ILR- und zum CL-Modell und erläutern Sie die dem „Mixed Model" zugrundeliegende Motivation.

(c) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass für $1 \le k \le u$

$$\mathrm{E}(C_{i,u} \,|\, \mathcal{D}_{i,k}) = f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+1} \cdot C_{i,k} + \Big(f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+2} \cdot m_{k+1} + \ldots + f_u \cdot m_{u-1} + m_u\Big) \cdot v_i$$

gilt. Interpretieren Sie die Zerlegung in die beiden Summanden $f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+1} \cdot C_{i,k}$ und $(f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+2} \cdot m_{k+1} + \ldots + f_u \cdot m_{u-1} + m_u) \cdot v_i$ im Sachzusammenhang.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus Teilaufgabe (a).

(d) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass durch

$$\widehat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} v_i} \qquad \text{und} \qquad \widehat{h}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} T_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k-1}}$$

erwartungstreue Schätzer für m_k und h_k für $2 \leq k \leq n$ gegeben sind.

(e) *[2 Punkte]* Gehen Sie jetzt davon aus, dass Sie für die Schätzung der Parameter nur $\{C_{i,k} \mid i + k \leq n + 1\}$ als Beobachtungen zur Verfügung haben, nicht aber die Zuwächse $S_{i,k}$ und $T_{i,k}$ für $k \geq 2$. Es wird vorgeschlagen, in diesem Fall m_k und h_k für $2 \leq k \leq n-1$ durch Minimieren von

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \Big((h_k + 1) \cdot C_{i,k-1} + m_k \cdot v_i - C_{i,k} \Big)^2$$

zu schätzen um so das Verfahren zu „retten". Erläutern Sie einen wesentlichen Schwachpunkt dieses Vorschlags.

Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [34 Punkte]

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass der vorgegebene Versicherungszweig aus dem Bereich der Schaden- und Unfallversicherung die Voraussetzungen zur Bildung einer Schwankungsrückstellung unter HGB erfüllt und nicht aus dem Bereich der Hagel-, der Kredit- und Kautions-, sowie der Vertrauensschadenversicherung stammt.

Nehmen Sie außerdem vereinfachend an, dass „Brutto = Netto“ gilt, womit eine Differenzierung zwischen Netto und Brutto beispielsweise bei Schadenquoten oder Kostenquoten entfällt.

Die folgende Tabelle zeigt für die Geschäftsjahre $i = 1, \ldots, 15$ des Beobachtungszeitraums die verdienten Beiträge P_i, die zugehörigen Schadenquoten q_i sowie deren Quadrate q_i^2 (Geldbeträge sind in Mio. € angegeben). Zur Vereinfachung von Rechnungen sind in der letzten Zeile noch die jeweiligen Summen angegeben.

Geschäftsjahr i	P_i	q_i	q_i^2
1	69	76,8%	0,590
2	71	88,7%	0,787
3	75	84,0%	0,706
4	74	68,9%	0,475
5	73	83,6%	0,699
6	78	70,5%	0,497
7	80	96,3%	0,927
8	85	84,7%	0,717
9	84	70,2%	0,493
10	84	104,8%	1,098
11	88	68,2%	0,465
12	92	66,3%	0,440
13	93	97,8%	0,956
14	99	71,7%	0,514
15	98	77,6%	0,602
Summe $\sum_{i=1}^{15}$	1243	1210,1%	9,966

Im Bilanzjahr $i = 16$ betragen die verdienten Beiträge $P_{16} = 100$ und die Schadenquote $q_{16} = 81{,}0\%$. Die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war

$SR_{15} = 28{,}5$. Die Kostenquote beträgt 29,0%, sowohl für das Bilanzjahr, als auch für alle Geschäftsjahre des Beobachtungszeitraums.

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$ des Beobachtungszeitraums und die zugehörige Standardabweichung $\bar{\sigma}$.

Hinweis: Falls Ihnen die Berechnung der Standardabweichung nicht gelingt, so rechnen Sie mit dem (falschen) Ersatzergebnis $\bar{\sigma} = 10{,}0\%$ weiter.

(b) *[5 Punkte]* Berechnen Sie den Sollbetrag SB_{16} und die Schwankungsrückstellung SR_{16} des Bilanzjahres 16.

Eine wichtige Kenngröße ist die „Schadenquote nach Schwankung“, welche die Schäden des Geschäftsjahres inklusive der Veränderung des Schwankungsrückstellung in Bezug zu den verdienten Beiträgen setzt. Für das Bilanzjahr 16 lautet die explizite Formel

$$q_{16}^{nS} = q_{16} + \frac{SR_{16} - SR_{15}}{P_{16}}.$$

(c) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS} für das Geschäftsjahr 16.

(d) *[8 Punkte]* Begründen Sie, dass die Schadenquote nach Schwankung innerhalb gewisser Grenzen nicht von der tatsächlichen Schadenquote q_{16} des Geschäftsjahres abhängt. Geben Sie dabei das maximale Interval

$$[q_{16}^{\min}, q_{16}^{\max}]$$

an, so dass für jede Geschäftsjahresschadenquote $q \in [q_{16}^{\min}, q_{16}^{\max}]$ die Schadenquote nach Schwankung mit q_{16}^{nS} übereinstimmen würde. Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage für das Geschäftsjahresergebnis.

Aufgrund der sehr schlechten Ergebnisse soll das Geschäft des vorgegebenen Versicherungszweigs saniert werden. Die Geschäftsleitung möchte von Ihnen wissen, wie sich entsprechende Veränderungen auf die zukünftigen Schadenquoten nach Schwankung auswirken würden. Gehen Sie ab jetzt von folgenden (vereinfachten) Annahmen aus:

- Ab dem nächsten Geschäftsjahr 17 sinkt der Erwartungswert der Schadenquote deutlich auf ca. 70% ab und bleibt dann auf diesem Niveau.
- Die Unsicherheit (Standardabweichung) der Schadenquote des sanierten Bestandes sinkt deutlich auf nur noch ca. 2% ab.
- Die verdienten Beiträge der zukünftigen Geschäftsjahre bleiben bei ca. 100.
- Die Kostenquote bleibt unverändert bei 29,0%.

(e) *[3 Punkte]* Geben Sie ohne Rechnung eine Näherung für die Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS} für das Geschäftsjahr 17 an. Begründen Sie Ihre Einschätzung.

(f) *[12 Punkte]* Beantworten Sie die folgenden Fragen für eine Einschätzung der Situation im Geschäftsjahr 20:

i) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die durchschnittliche Schadenquote des jeweiligen Beobachtungszeitraums in den folgenden Geschäftsjahren entwickeln wird. Geben Sie eine Näherung für die erwartete durchschnittliche Schadenquote für das Geschäftsjahr 20 (d.h. Beobachtungszeitraum bis Geschäftsjahr 19) an.

Hinweis: Eine exakte Berechnung ist nicht verlangt.

ii) *[3 Punkte]* Erklären Sie qualitativ, wieso trotz der Annahme einer deutlich kleineren Standardabweichung der Geschäftsjahresschadenquoten, die gemessene Standardabweichung des jeweiligen Beobachtungszeitraums bis zum Geschäftsjahr 20 annähernd konstant bleiben wird.

Hinweis: Eine Berechnung ist nicht verlangt.

iii) *[5 Punkte]* Welche Schadenquote nach Schwankung q_{20}^{nS} können Sie für das Geschäftsjahr 20 erwarten? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 7 (Rechnungslegungssysteme) [12 Punkte]

Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (H) im Kontext eines deutschen Versicherungsunternehmens. Geben Sie jeweils an, auf welches der Rechnungslegungssysteme IFRS17, HGB oder Solvency II die Aussage am ehesten zutrifft. Begründungen sind nicht erforderlich.

(A) Die Grundsätze ordnungsmäßiger Buchführung bilden die Basis für die Anforderungen an die Datenqualität.

(B) Eine Servicemarge (Contractual Service Margin) dient zur Neutralisierung von Gewinnen aus zukünftigen Deckungsperioden.

(C) Es gibt keine versicherungstechnische Rückstellung, die explizit zur Deckung von Unsicherheiten bei der Schadenregulierung bereits eingetretener Schäden vorgesehen ist.

(D) Die Unternehmen müssen auf Anfrage der Aufsicht in der Lage sein, die Angemessenheit ihrer Daten nachzuweisen.

(E) Die Rechte und Pflichten aus Versicherungsverträgen sind ab Beginn der Risikoperiode bzw. Fälligkeit des ersten Beitrags (frühester Zeitpunkt) anzusetzen. Im Falle einer Verlustsituation gilt dies bereits bereits ab Vertragsschluss.

(F) Die Risikomarge dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht.

(G) Bei diesem Rechnungslegungssystem stehen die Informationsvermittlung und die Ausschüttungsbemessung im Mittelpunkt.

(H) Bei den versicherungstechnischen Rückstellungen werden anteilige Kosten der allgemeinen Verwaltung berücksichtigt.

Aufgabe 8 (Munich-Chain-Ladder) [25 Punkte]

Für die Anfalljahre $i = 1, \dots, n$ und die Abwicklungsjahre $k = 1, \dots, u$ bezeichne $C_{i,k}$ die entsprechenden (kumulierten) Zahlungen und $D_{i,k}$ die entsprechenden Schadenaufwände. Zum Zeitpunkt u seien dabei alle Schäden abgewickelt und bezahlt. Gehen Sie davon aus, dass die Modellannahmen des Munich-Chain-Ladder Modells für $C_{i,k}$ und $D_{i,k}$ gelten.

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung der Korrelationsparameter λ^C und λ^D.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass die folgende Aussage $(*)$ gilt:

$(*)$ Gilt für die Korrelationsparameter $\lambda^C = \lambda^D = 0$, so folgt für alle $i = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, u$, dass $\mathrm{Var}\left(\frac{C_{i,k}}{D_{i,k}}\right) = 0$ ist.

Hinweis: Berechnen Sie $E^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(C_{i,u})$ und $E^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(D_{i,u})$ und folgern Sie, dass der Quotient $\frac{C_{i,k}}{D_{i,k}}$ konstant ist. Dabei bezeichnet wie im Skript $\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}$ die σ-Algebra, die von $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}, D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$ erzeugt wird.

(c) *[2 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung von $(*)$ für das MCL-Modell mit den speziellen Parametern $\lambda^C = \lambda^D = 0$.

(d) *[2 Punkte]* Gehen Sie weiterhin davon aus, dass die Modellannahmen des MCL-Modells für $C_{i,k}$ und $D_{i,k}$ gelten und dass $\mathrm{Var}\left(\frac{C_{i,k}}{D_{i,k}}\right) \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, u-1$ gilt. Ist in diesem Fall für die Schätzer der Korrelationsparameter die Konstellation $\widehat{\lambda}^C \approx \widehat{\lambda}^D \approx 0$ möglich? Begründen Sie Ihre Aussage.

(e) *[4 Punkte]* Interpretieren Sie die folgenden beiden Konstellationen für die Schätzungen der Korrelationsparameter im Sachzusammenhang.

(I) $\widehat{\lambda}^C \approx 0\%$ und $\widehat{\lambda}^D \approx 50\%$ (II) $\widehat{\lambda}^C \approx 50\%$ und $\widehat{\lambda}^D \approx 0\%$

Was folgt aus der jeweiligen Konstellation für die Reservebewertung mittels des MCL-Verfahrens?

Für ein anderes Geschäftssegment bezeichne $N_{i,k}$ die (kumulierte) Anzahl der gemeldeten Schäden für das Anfalljahr $i = 1, \dots, n$ bis zum Ende des Abwicklungsjahres $k = 1, \dots, u$. Außerdem bezeichne $M_{i,k}$ die Anzahl der offenen Schäden am Ende des Abwicklungsjahres k für das Anfalljahres i.

(f) *[4 Punkte]* Übertragen Sie das MCL-Modell in sinnvoller Art und Weise auf diese Situation. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

(g) *[4 Punkte]* Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung der beiden Korrelationsparameter. Geben Sie explizit an, für welchen der beiden Korrelationsparameter Sie typischerweise eher eine kleinere und für welchen eher eine größere Korrelation erwarten würden und begründen Sie diese Aussage.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Versicherungstechnische Risiken in internen Unternehmensmodellen von Sachversicherern) [23 Punkte]

Aufgaben:

(a) *[5 Punkte]* In der einjährigen Risikosicht wird die Unsicherheit über den Eintritt und die Abwicklung von Schäden, d.h. die Volatität der zukünftigen Schadenzahlungen für neue und bereits angefallener Schäden und ihre Auswirkungen auf die ökonomischen Eigenmittel nur insoweit einbezogen, wie sie das nächste Kalenderjahr betrifft („Kalenderjahressicht"), während in der ultimativen Sicht die Volatilität der Zahlungen bis zur Endabwicklung der entsprechenden Anfalljahre, d.h. über den kompletten Abwicklungszeitraum, einbezogen wird („Anfalljahressicht").

Die *einjährige Risikosicht* ist die maßgebliche Risikosicht zur Bestimmung der Solvenzkapitalanforderung unter Solvency II, dementsprechend sind mögliche Einsatzbereiche:

- Messung des Risikokapitalbedarfs
- Bestimmung der Risikokapitalkosten

Einsatzbereiche für die *ultimative Risikosicht*:

- Wirkungsweise / Effektivität der Rückversicherung
- Beurteilung der Auskömmlichkeit der Schadenrückstellungen unter HGB
- Beurteilung der Auskömmlichkeit der Prämien, Profitabilität des Geschäfts

(b) *[10 Punkte]* Mit den Bezeichnungen

Größe	Bezeichnung
P_{2022}	Verdiente Prämie des Anfalljahres 2022
E_{2022}	Kosten des Anfalljahres 2022
$S_{PY,2022}$	Zahlungen im Kalenderjahr 2022 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022
$S_{PY,>2022}$	Zahlungen nach 2022 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022
$\hat{S}^{(2022)}_{PY,>2022}$	Per Ende 2022 geschätzte Zahlungen nach 2022 für Vorjahresschäden aus Anfalljahren vor 2022
$S_{2022,2022}$	Zahlungen im Kalenderjahr 2022 für Neuschäden des Anfalljahres 2022
$S_{2022,>2022}$	Zahlungen nach 2022 für Neuschäden des Anfalljahres 2022
$\hat{S}^{(2022)}_{2022,>2022}$	Per Ende 2022 geschätzte Zahlungen nach 2022 für Neuschäden des Anfalljahres 2022

lassen sich für die beiden Risikohorizonte die für das Prämien- und Reserverisiko maßgeblichen Größen definieren und berechnen.

Das *ultimative Anfalljahresergebnis* T_{2022} *des Jahres 2022* zur Messung des *ultimativen Prämienrisikos* besitzt die Darstellung:

$$T_{2022} = P_{2022} - E_{2022} - U_{2022}$$

mit

$$U_{2022} = S_{2022,2022} + S_{2022,>2022}$$

als *Ultimateschaden des Anfalljahres 2022*.

Das per Ende 2022 *geschätzte Anfalljahresergebnis* $\hat{T}^{(2022)}_{2022}$ *des Anfalljahres 2022* zur Messung des *einjährigen Prämienrisikos* besitzt wiederum die Darstellung

$$\hat{T}^{(2022)}_{2022} = P_{2022} - E_{2022} - \hat{U}^{(2022)}_{2022}$$

mit

$$\hat{U}^{(2022)}_{2022} = S_{2022,2022} + \hat{S}^{(2022)}_{2022,>2022}$$

als *Ultimateschätzung des Anfalljahres 2022 per Ende 2022*.

Das *ultimative Reserverisiko* per Ende 2021 ermittelt sich anhand der Abweichung der zukünftigen Schadenzahlungen für Vorjahresschäden vom besten Schätzwert der Schadenrückstellungen per Ende 2021:

$$R_{PY}^{(2021)} - \hat{R}_{PY}^{(2021)}$$

mit *Bedarfsreserve*

$$R_{PY}^{(2021)} = S_{PY,2022} + S_{PY,>2022}$$

und *Reserveschätzer*

$$\hat{R}_{PY}^{(2021)} = \overline{S}_{PY,2022} + \overline{S}_{PY,>2022} = 2.500$$

wobei diese Beziehung unmittelbar aus der Konsistenzanforderung folgt. Hierbei kennzeichnet $\overline{S}$ jeweils das Simulationsmittel der vorliegenden fünf Simulationen.

Das *einjährige Reserverisiko* bemisst sich anhand des negativen *ökonomischen Abwicklungsergebnisses* $-\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2021\to 2022)}$ des Kalenderjahres 2022 mit

$$\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2021\to 2022)} = \hat{R}_{PY}^{(2021)} - S_{PY,2022} - \hat{S}_{PY,>2022}^{(2022)}$$

Größe	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
T_{2022}	-700	200	-400	50	350
$\hat{T}_{2022}^{(2022)}$	-500	100	-300	0	200
$R_{PY}^{(2021)} - \hat{R}_{PY}^{(2021)}$	-100	-100	-100	0	300
$-\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2021\to 2022)}$	0	-100	-50	-100	250

(c) *[4 Punkte]* Das *einjährige versicherungstechnische Ergebnis* $\widehat{UW}_{2022}$ des Kalenderjahres 2022 ergibt sich aus der Summe des geschätzten Anfalljahresergebnisses $\hat{T}_{2022}^{(2022)}$ für das Anfalljahr 2022 per Ende 2022 und dem ökonomischen Abwicklungsergebnis $\widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2021\to 2022)}$ im Kalenderjahr 2022.

$$\widehat{UW}_{2022} = \hat{T}_{2022}^{(2022)} + \widehat{\mathrm{CDR}}_{PY}^{(2021\to 2022)}$$

Die Simulationen der beiden Größen werden pfadweise addiert.

Größe	Sim. 1	Sim. 2	Sim. 3	Sim. 4	Sim. 5
$\widehat{UW}_{2022}$	-500	200	-250	100	-50

In drei von fünf Szenarien (1, 3 und 5) kommt es zu einem versicherungstechnischen Verlust. In zwei dieser drei Szenarien (1 und 3) ist das negative Anfalljahresergebnis der Treiber, nur in einem Szenario ist dies auf einen ökonomischen Abwicklungsverlust zurückzuführen.

(d) *[4 Punkte]*

- Bei Verzicht auf eine Neukalibrierung und Modellauf zum Jahresende würden Entwicklungen und Erkenntnisse aus dem vierten Quartal unberücksichtigt bleiben und in den Risikoverteilungen und Ergebnisse nicht enthalten sein. Falls diese Entwicklungen weitestgehend dem geplanten Verlauf entsprechen und keine wesentlichen Abweichungen gegenüber der Planung darstellen, liefert der vorgezogene Lauf trotzdem eine valide Approximation zum Jahresende. Dies ist hingegen nicht mehr gewährleistet, falls es im vierten Quartal zu unvorhergesehenen signifikanten Änderungen im Bestand, wesentlichen Anpassungen an der Rückversicherungsstruktur oder dem Eintritt größerer Schadenereignisse kommt, die eine nachträgliche Anpassung der Modellkalibrierung erforderlich machen könnten.

- Aufgrund der enormen Bedeutung der Rückversicherung zur Risikominderung bei Schadenversicherern und als wichtiger Nachweis des unter Solvency II geforderten Verwendungstests für interne Modelle („Use Test“) sollte bestmöglich die neue Rückversicherungsstruktur verwendet werden.

- Ein Kompromissvorschlag könnte darin bestehen, dass am Jahresendlauf festgehalten wird, dieser aber nur dann in vereinfachter Form durchgeführt wird, wenn die tatsächliche Entwicklung im vierten Quartal nicht wesentlich von der Planung abweicht. Vereinfacht könnte exemplarisch bedeuten: es werden zunächst nur der Bestand und die Rückversicherungsstruktur aktualisiert, während die Schadenparameter zunächst beibehalten werden und nur dann angepasst werden, falls das letzte Quartal relevante neue Erkenntnisse in Bezug auf die Schadenvolatilität zu Tage fördert.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Naturgefahrenmodellierung) [25 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Die Lognormalverteilung ist im Gegensatz zur Betaverteilung, die der Resimulation bzw. dem statistischen Modell der ELT vom Modellanbieter standardmäßig zugrundegelegt wird, nicht auf das Einheitsintervall beschränkt. Die Lognormalverteilung besitzt eine durchgehend positive Trägermenge, ist aber nach oben unbeschränkt. Dadurch könnten sich bei der Resimulation ohne weitere Anpassung Ereignisschäden ergeben, die oberhalb des von dem Ereignis betroffenen Exposurewerts liegen. Dieses Probleme ließe sich durch Übergang zur bedingten (nach oben beim Wert 1 trunkierten) Verteilung umgehen, was aber wiederum einen höheren numerischen Aufwand bei der Parameterbestimmung mittels Momentenmethode nach sich ziehen würde.

(b) *[11 Punkte]* Prinzipiell sind zwei Lösungswege möglich, die im Ergebnis ggf. nur aufgrund von unterschiedlichen Rundungen bei den Zwischenschritten abweichen:

- Nach den Annahmen des statistischen Modells sind die individuellen Ereignisschadenhöhen X_{ij}, $j \in \{1, \ldots, N_i\}$ der einzelnen Szenarien i, $i \in \{4711, 4712, 4713\}$ unabhängig und identisch verteilt mit
  - Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{ij}]$ (= PERSPVALUE)
  - Standardabweichung $\sigma[X_{ij}]$ (= STDDEVI + STDDEVC)
- Erwartungswert und Varianz der Ereignisschadenhöhen werden in Erwartungswert $\mathbb{E}[z_{ij}]$ und Standardabweichung $\sigma[z_{ij}]$ des Schadengrads mittels Division durch den EXPVALUE (Exposure-Wert) umgerechnet.
- Für die Logarithmische Normalverteilung des Schadengrads z mit den beiden Parametern μ und σ gilt:
  - Erwartungswert: $\mathbb{E}[z] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$
  - Varianz: $\mathbb{V}[z] = \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right) \cdot \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\}$

  Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\mathbb{V}[z]/\mathbb{E}[z]^2 + 1\right)} = \sqrt{\ln\left(\mathrm{Vco}[z]^2 + 1\right)}, \quad \mu = \ln \mathbb{E}[z] - \sigma^2/2.$$

- Da das Ereignis 4713 in den Simulationen nicht enthalten ist, reicht die Bestimmung der Lognormalverteilungsparameter für die beiden Ereignisse 4711 und 4712 aus.

- Die Parameter μ_i und σ_i der Schadengrade für die beiden Szenarien $i, i \in \{4711, 4712\}$ lauten:

EVENT ID i	$\mathbb{E}[z_{ij}]$	$\sigma[z_{ij}]$	$\text{Vco}[z_{ij}]$	μ_i	σ_i
4711	0,04	0,04	1,0	-3,56	0,83
4712	0,0025	0,00125	0,5	-6,10	0,47

- Zur Generierung Lognormalverteilter Schadengrade pro Einzelereignis wird die Inversionsmethode angewendet mittels

$$z_k^{(M)} = F^{-1}\left(U_k^{(M)}\right) = \exp\left\{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(U_k^{(M)}\right)\right\}, \ 1 \le k \le N^{(M)}.$$

  Die Ereignisschäden ergeben sich abschließend durch Multiplikation der so berechneten Schadengrade mit den Exposure-Werten der jeweils betroffenen Szenarien und lauten zusammengenommen:

Simulation	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	2	348	105
2	0		
3	0		
4	1	101	
5	2	84	168

- Der maximale Ereignisschaden $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ und der Jahresschaden $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ lassen sich pfadweise durch Bestimmung des zeilenweisen Maximums und der Zeilensumme berechnen.

Simulation M	Maximaler Ereignisschaden $M_n^{(M)}$	Jahresschaden $S^{(M)}$
1	348	453
2	0	0
3	0	0
4	101	101
5	84	252

- Der *AAL* entspricht dem Simulationsmittel $\overline{S} = \frac{1}{\mathcal{M}} \cdot \sum_{M=1}^{\mathcal{M}} S^{(M)}$ der einzelnen Simulationswerte und ermittelt sich somit zu

$$\overline{S} = \frac{1}{5} \cdot (453 + 0 + 0 + 101 + 252) = \frac{806}{5} = 161.$$

Alternatives Vorgehen:

- Da es sich bei der Logarithmischen Normalverteilung um eine Skalenfamilie mit Skalenparameter $\exp\{\mu\}$ handelt und sich die Ereignisschadenhöhen und die Schadengrade jeweils nur um den Faktor EXPVALUE (Exposure-Wert) unterscheiden, kann die Lognormalverteilung prinzipiell auch direkt an die Ereignisschadenhöhen angepasst werden. Dies erspart die Umrechnung in Schadengrade und abschließende Rücktransformation in Ereignisschäden.

- Nach den Annahmen des statistischen Modells sind die individuellen Ereignisschadenhöhen X_{ij}, $j \in \{1, \ldots, N_i\}$ der einzelnen Szenarien $i, i \in \{4711, 4712, 4713\}$ unabhängig und identisch verteilt mit

  - Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{ij}]$ (= PERSPVALUE)

  - Standardabweichung $\sigma[X_{ij}]$ (= STDDEVI + STDDEVC)

- Für die Logarithmische Normalverteilung des Ereignisschadens X mit den beiden Parametern μ und σ gilt:

  - Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$

  - Varianz: $\mathbb{V}[X] = \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right) \cdot \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\}$

  Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\mathbb{V}[X]/\mathbb{E}[X]^2 + 1\right)} = \sqrt{\ln\left(\mathrm{Vco}[X]^2 + 1\right)}, \quad \mu = \ln \mathbb{E}[X] - \sigma^2/2.$$

- Die Parameter μ_i und σ_i der Ereignisschadenhöhen für die beiden Szenarien $i, i \in \{4711, 4712\}$ lauten:

EVENT ID i	$\sigma[X_{ij}]$	$\mathrm{Vco}[X_{ij}]$	μ_i	σ_i
4711	200	1,0	4,95	0,83
4712	50	0,5	4,49	0,47

Zur Generierung Lognormalverteilter Ereignisschäden ist die Inversionsmethode anzuwenden mittels

$$X_k^{(M)} = F^{-1}\left(U_k^{(M)}\right) = \exp\left\{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(U_k^{(M)}\right)\right\}, \; 1 \le k \le N^{(M)}.$$

Zusammengenommen lauten die simulierten Ereignisschäden:

Simulation	Anzahl Ereignisse	Ereignis 1	Ereignis 2
1	2	346	104
2	0		
3	0		
4	1	100	
5	2	83	167

Der maximale Ereignisschaden $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ und der Jahresschaden $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ lassen sich pfadweise durch Bestimmung des zeilenweisen Maximums und der Zeilensumme berechnen.

Simulation M	Maximaler Ereignisschaden $M_n^{(M)}$	Jahresschaden $S^{(M)}$
1	346	450
2	0	0
3	0	0
4	100	100
5	167	250

- Der *AAL* entspricht dem Simulationsmittel $\overline{S} = \frac{1}{\mathcal{M}} \cdot \sum_{M=1}^{\mathcal{M}} S^{(M)}$ der einzelnen Simulationswerte und ermittelt sich somit zu

$$\overline{S} = \frac{1}{5} \cdot (450 + 0 + 0 + 100 + 250) = \frac{800}{5} = 160.$$

(c) *[4 Punkte]* Der erwartete Jahresgesamtschaden pro Einzelszenario ermittelt sich als $\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mathbb{E}[X_{ij}]$, wobei λ_i die mittlere Frequenz (= RATE) bezeichnet. Der Erwartungswert des Jahresschadens S aller Szenarien ergibt sich über

Summation der Einzelerwartungswerte aller Szenarien:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i].$$

Damit ergibt für den *AAL*:

$$AAL = 50\% \cdot 200 + 25\% \cdot 100 + 2,5\% \cdot 1.000 = 100 + 25 + 25 = 150$$

Es ergibt sich eine Differenz von 10 Mio. €. Allerdings ist ein solcher Vergleich auf Basis von lediglich 5 Simulationen natürlich noch nicht aussagekräftig. Anhand einer Gegenüberstellung von Simulationsergebnissen mit analytisch ermittelten Kenngrößen wie Erwartungswert und Varianz lässt sich allgemein überprüfen, ob die Simulationsanzahl bereits ausreicht, um Konvergenz der Simulationsgrößen gegen die wahren Größen zu erreichen und stabile Ergebnisse zu erhalten. Größere Abweichungen selbst bei höherer Simulationsanzahl können wiederum auf Probleme bei der Resimulation der ELT im internen Modell hindeuten.

(d) *[7 Punkte]* Das zugrundeliegende statistische Modell unterstellt eine Poisson-Verteilung für die Häufigkeitsverteilung sowie unabhängig und identisch verteilte Ereignisschadenhöhen.

Die *Negative Binomialverteilung* weist hingegen eine Überdispersion auf, d.h. die Varianz ist stets größer als der Erwartungswert, während bei der Poisson-Verteilung Varianz und Erwartungswert übereinstimmen. Damit streut die Anzahl an Ereignisschäden unter einer Negativen Binomialverteilung stärker als bei einer Poisson-Verteilung und es besteht eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass eine größere Anzahl an Sturmereignissen innerhalb eines einzelnen Jahres auftritt.

Dass in *Sturmserien überwiegend schwere und mittelschwere Sturmereignisse* auftreten, spricht gegen die Annahme der Unabhängigkeit zwischen der Anzahl und der Höhe der Einzelereignisse sowie der globalen Unabhängigkeit aller Einzelereignisse, da es unter der Unabhängigkeitsannahme genauso wahrscheinlich sein müsste, dass auch kleinere Ereignisse in Sturmserien vertreten sind. Insgesamt vermag das statistische Modell der ELT diese beiden Effekte nicht abbilden.

Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht im Wechsel von einer ELT zu einer Year Loss Table (YLT), das als alternativer Output eines exposure-basierten Modells bereits vorsimulierte Ereignisse enthält.

Ökonomische Auswirkungen und Implikationen dieser beiden Effekte (die durch das interne Modell entsprechend in den Bruttoschäden abzubilden sind, falls zutreffend):

- *Rückversicherung*: es ist zu überprüfen, ob die Anzahl an Wiederauffüllungen für die Ereignisschadenexzedenten ausreichend ist - oder aber Haftungsstrecke für Stop-Loss-Deckungen des Jahresschadens aus Sturmschäden ausreichend ist oder ggf. erweitert werden muss.
- *Pricing*: Ggf. resultiert aus der Abbildung der beiden Effekte ein höherer Risikokapitalbedarf, der sich auch bei unverändertem *AAL* in den Risikokapitalkosten beim Pricing und damit einem höheren technischen Preis niederschlägt.
- *Underwriting*: Überprüfung der Limitauslastung für Konzentrationsrisiken und ggf. Ausbau der geografischen Diversifikation.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Risikoanalyse im Rahmen einer Produkteinführung) [22 Punkte]

(a) *[4 Punkte]* Im Bereich der *versicherungstechnischen Risiken* sollten insbesondere folgende Risiken genannt werden:

- *Prämienrisiko* aus der Risikotragung und dem damit verbundenem Schadenanfall von Cyberschäden im jeweils kommenden Jahr (relevant bereits am Jahresende vor Produkteinführung).
- *Reserverisiko* aus Schadenrückstellungen, die im Zusammenhang zu Risikotragung und Schadenanfall von Cyberschäden stehen. Relevant wird das Reserverisiko erstmalig am Ende des ersten Jahres nach Produkteinführung.
- *Katastrophenrisiko Nicht-Leben* (speziell Man-Made) aus möglichen Akkumulationsrisiken, bspw. durch großflächige Cyber-Attacken. Ggf. kann es sinnvoll sein, über das Prämienrisiko hinaus separate Katastrophenschäden innerhalb des Katastrophenrisikomoduls zu betrachten.
- Das Cyberprodukt deckt hingegen *keine biometrischen Risiken Leben oder Kranken* ab

Als weitere *nicht-versicherungstechnische Risiken* können genannt werden:

- *Ausfallrisiko*, speziell Rückversicherungsausfall: Hohe Abgabequote für Cyberdeckungen, das gesamte RV-Exposure ist lediglich bei einem Rückversicherer konzentriert.
- *Zinsrisiko* durch Diskontierung der in Zusammenhang mit Cyberschäden stehenden Verbindlichkeiten.
- Es werden zwar keine unmittelbaren Auswirkungen auf die übrigen Marktrisiken (wie Aktienrisiko, Immobilienrisiko, etc..) erwartet, allerdings generieren die Prämieneinnahmen einen Zufluss an liquiden Mitteln, zudem stehen den zukünftigen versicherungstechnischen Verbindlichkeiten aus Cyberschäden Kapitalanlagen zur Bedeckung gegenüber. Dadurch erhöht sich das Volumen an Kapitalanlagen und damit auch der Vermögensgegenstände, die Marktrisiken ausgesetzt sind.
- *Operationelles Risiko*: Neuartigkeit und Komplexität des Cyber-Produkts, fehlendes internes Know-How.

(b) *[6 Punkte]* Anhand der vorliegenden Informationen erscheint es sinnvoll, Cyber als eigenständiges Segment separat abzubilden und die zugehörigen Schäden explizit zu modellieren. Als Begründung lassen sich folgende Punkte anführen:

- *„Andersartigkeit" der Cyber-Deckungen ggü. dem bereits vorhandenen Bestand*: Cyberschäden unterscheiden sich hinsichtlich Schadenpotential, Schadencharakteristika sowie Abwicklungsverhalten sicherlich deutlich von dem übrigen Geschäft, das die DGI zeichnet.

- *Wesentlichkeit / Materialität*: Die verfügbaren Informationen deuten auf ein materielles versicherungstechnisches Risiko hin. Bei einer qualitativen Betrachtung ließe sich angesichts der hohen Deckungssummen das signifikante Akkumulations- und Katastrophenschadenpotential im Falle großflächiger Cyber-Attacken anführen. Durch den Verzicht auf nicht-proportionale Rückversicherung kann die DGI Extremereignisse nicht komplett zedieren und trägt auch Volatilitätsspitzen anteilig mit. Die AEP-Kurve des Benchmark-Portfolios erlaubt darüber hinaus eine (zumindest grobe) quantitative Abschätzung: der im 200-Jahresfall bei der DGI verbleibende Nettoschaden beträgt 100 Mio. € (= 200 Mio. € $\times$50%) und entspricht damit 10% des Risikokapitals bzw. 5% der vorhandenen anrechenbaren ökonomischen Eigenmittel.

- *Generelle Modellierbarkeit*: Mit der AEP-Kurve liegen Modellierungsdaten und ein entsprechender Modellierungsansatz für Neuschäden vor.

- *Verfügbarkeit eines separaten Rückversicherungsschutzes speziell für Cyberschäden*

Es ist allerdings zu beachten, dass die DGI über ein aufsichtsrechtlich genehmigtes Modell verfügt und die Einbindung eines neuen Segments in das bestehende Modell somit ggf. eine genehmigungspflichtige Modelländerung darstellt.

Bei den von einer möglichen Anpassung betroffenen Komponenten im DFA-Modell handelt es sich um:

- das *Bruttomodell*, da Cyber auch aufgrund des individuellen Rückversicherungsschutzes als neues Segment betrachten werden muss,

- das *Abwicklungsmodell* zum Ausrollen der zukünftigen Schadenzahlungen für Cyberschäden, Reserverisiko-Modell ab dem zweiten Jahr,

- das *Rückversicherungsmodell* muss um den separaten Quotenrückversicherungsvertrag für Cyberschäden und eine Nettoüberleitung für das Cybersegment ergänzt werden,

- der *versicherungstechnische Cashflow*, der um den Beitrag aus dem neuen Segment Cyber ergänzt werden muss.

- Abschließend noch das *Auswertungsmodell*, um den Ergebnisbeitrag und den Risikokapitalbedarf des neuen Segments „Cyber“ ermitteln zu können.

(c) *[5 Punkte]* Bei der vorliegenden AEP-Kurve handelt es sich um den Output eines externes Modells, der zugrundeliegende Modellierungsansatz ist nach den Basisinformationen ein exposure-basiertes Modell. Die Einwertung des Modellierungsansatzes lässt sich anhand verschiedener Aspekte vornehmen (zur Beantwortung der Aufgabe ist die Nennung und Erläuterung von zwei Aspekten ausreichend):

- Die AEP-Kurve bezieht sich offensichtlich bereits auf den *gesamten Schadenaufwand des Jahres* und deckt damit implizit alle Schadentypen (Basis-, Groß- und Katastrophenschäden) ab. Somit entfällt die Modellierung weiterer Schäden, allerdings ist keine Detailanalyse der Zusammensetzung des Jahresschadens, des Beitrags einzelner Großschäden bzw. der Relevanz von Kumulereignissen möglich.

- *Resimulation im internen Modell* aus AEP-Kurve ist technisch möglich (siehe auch Aufgabenteil d).

- *Exakte Abbildung der Rückversicherung* ist unter der aktuellen Rückversicherungsstruktur darstellbar, da lediglich Quoten-Rückversicherungsvertrag vorhanden ist. Alternativrechnungen mit abweichenden Rückversicherungskonstruktionen, insbesondere nicht-proportionaler Rückversicherung wie Kumulschadenexzedenten sind damit allerdings nicht oder nur eingeschränkt möglich.

- Anhand der AEP-Kurve lässt sich eine *komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugen*, es liegen Informationen zum Verlauf der Jahresschäden im ökonomisch relevanten Tailbereich hoher Wiederkehrperioden vor (insbesondere die zur Risikomessung maßgeblichen Wiederkehrperioden).

- Die *Repräsentativität des Benchmark-Portfolios* ist hingegen kritisch zu sehen und zu prüfen, insbesondere im Hinblick auf die Modellierung in Folgejahren angesichts des geplanten starken Bestandswachstums. Da die DGI noch keinen Bestand besitzt, scheint die aus dem Benchmark-Portfolio abgeleitete AEP-Kurve unter Berücksichtigung des aktuellen Informationsstandes allerdings noch die fundierteste und valideste Abschätzung des voraussichtlichen Schadenpotentials zu sein. So wird auf externes Know-How zurückgegriffen. Kurzfristig ließe sich ein pauschaler Zuschlag auf die Gesamtschadenverteilung anwenden, um der Unsicherheit über die Repräsentativität des Benchmark-Portfolios Rechnung zu tragen. Perspektivisch sollte anstelle des Benchmark-Portfolios ohnehin der tatsächliche

Bestand der DGI im exposure-basierten Modell abgebildet werden, und ist das aktuelle Vorgehen nur als Übergangslösung zu sehen.

Als mögliche alternative Modellierungsansätze für Cyberschäden lassen sich nennen (eine Nennung ausreichend):

- Die *OEP-Kurve* ermöglicht eine Abbildung einzelner Ereignisse. Wie bei der AEP-Kurve ist die DGI auch hier sicherlich zunächst auf externe Modellierungsdaten angewiesen.
- Analog verhält es sich mit der *Event Loss Table*.
- Eine *explizite mathematisch-statistische Modellierung* scheidet allerdings aufgrund der noch nicht vorhandenen (unternehmenseigenen) Datenhistorie zunächst noch komplett aus. Ungeachtet der Datensituation wäre eine eigenständige Kalibrierung durch die DGI aufgrund des derzeit noch fehlenden Know-Hows in jeder Hinsicht als herausfordernd einzustufen, so dass die Gesellschaft die mit diesem Ansatz verbundenen Vorteile in Form höherer Freiheitsgrade theoretisch auch erst auf lange Sicht nutzen könnte.
- Eine *implizite mathematisch-statistische Modellierung* dürfte speziell aufgrund der Materialität des Cyber-Segments (siehe Aufgabenteil b) und des geplanten weiteren Bestandswachstums nicht in Frage kommen.

(d) *[7 Punkte]* Zur Simulation des Jahresgesamtschadens S ist die verallgemeinerte Inverse F_S^{-1} pfadweise auf die Realisierungen $u_S^{(M)}$ anzuwenden. Um F_S^{-1} zu bestimmen, sind aus den aufgeführten Wiederkehrperioden $t_j, 1, .., 5$ zunächst die Quantilniveaus $q\left(t_j\right) = 1 - 1/t_j$ zu berechnen:

t_j	$q\left(t_j\right)$
2	$0{,}50 = 1 - 1/2$
20	$0{,}90 = 1 - 1/10$
50	$0{,}98 = 1 - 1/50$
200	$0{,}995 = 1 - 1/200$
500	$0{,}998 = 1 - 1/500$

Wir setzen dementsprechend vereinfacht:

$F_S^{-1}(q)$	q
0	$q < 0{,}50$
20	$0{,}50 \leq q < 0{,}90$
50	$0{,}90 \leq q < 0{,}98$
100	$0{,}98 \leq q < 0{,}995$
200	$0{,}995 \leq q < 0{,}998$
800	$0{,}998 \leq q$

Es handelt sich um eine Treppenfunktion, die zwischen den Stützstellen konstant verläuft. Die zugehörigen Realisierungen $S^{(M)}$ der jährlichen Cyberschäden S ergeben sich mittels $F_S^{-1}\left(U_S^{(M)}\right)$:

Simulationspfad M	$S^{(M)}$
1	20
2	20
3	0
4	200

Damit ergibt sich ein mittlerer Jahresschaden von

$$\bar{S} = \frac{1}{4} \cdot (20 + 20 + 0 + 200) = \frac{1}{4} \cdot 240 = 60.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reservebericht und Reservierungsprozess) [21 Punkte]

(a) *[2 Punkte]* Inhalt und Umfang des Reserveberichts sind zwar nicht starr festgelegt, er wird aber in jedem Fall umfangreiche Informationen enthalten, die für die Durchführung des Prozesses relevant sind, beispielsweise wesentliche Charakteristika des Schaden- bzw. Vertragsbestandes, Entwicklungen im Schadenumfeld oder eine Darstellung der im Vorjahr verwendeten aktuariellen Reserveprojektionen.

(b) *[4 Punkte]* Beispiele für Gründe sind:

- Informationsstand des Vorjahres: Der Reservebericht wurde für die letztjährige Prozessdurchführung erstellt und basiert daher im Wesentlichen auf dem Informationsstand des vorigen Geschäftsjahres. Daher sind eventuell relevante neuere Entwicklungen wie beispielsweise aktuelle Schadentrends oder Bestandsveränderungen nicht erfasst. Zur Durchführung des Reservierungsprozesses benötigen Sie aber aktuelle Informationen.

- Mehrere Perspektiven: Der Reservebericht wurde normalerweise von den im Vorjahr zuständigen Personen erstellt und dürfte daher deren Blickwinkel widerspiegeln. Insbesondere bei kritischen Themen, die beispielsweise keine eindeutige Vorgehensweise bedingen, ist es für Ihre Entscheidungsfindung wichtig, unterschiedliche Perspektiven zu betrachten.

- Umfang bzw. Ausführlichkeit des Reserveberichts: Um die Lesbarkeit des Reserveberichts für die verschiedenen Zielgruppen zu bewahren, wird der Reservebericht nicht alle Details enthalten, die Sie für die tatsächliche Durchführung des Reservierungsprozesses benötigen. Diese Aussage kann sich sowohl auf technische Details als auch auf inhaltliche Punkte beziehen.

(c) *[15 Punkte]* Mögliche Informationsquellen sind:

- Prozessbeschreibung: Hier werden zum Beispiel Zuständigkeiten und Verantwortlichkeiten oder auch unternehmensinterne Richtlinien zur Entscheidungsfindung dokumentiert. Die Prozessbeschreibung ist die Basis für die Durchführung des Prozesses.

- Schadenabteilung: Informationen über aktuelle Schadentrends. Beispielsweise können neue Schadenbilder oder sich ändernde Trends die Aussagekraft historischer Daten für Prognosen in die Zukunft beeinflussen oder sogar zunichte machen.

- Bestandsführungssysteme: Informationen über Änderungen beim aktuellen Bestand zum Beispiel im Vergleich zum Vorjahr. Auch hier gilt, dass

Änderungen des Bestands die Aussagekraft historischer Daten für Prognosen für das im Geschäftsjahr neu gezeichnete Geschäft beeinflussen oder sogar zunichte machen können.

- Schadensystem: Die Schadendreiecke inklusive der Daten des aktuellen Kalenderjahres stellen die Basis der Reserveberechnungen dar.
- Schaden- oder Rechtsabteilung: Aussagen zu relevanten laufenden Gerichtsverfahren könnten die Interpretation der gebuchten Einzelfallreserven stark beeinflussen.
- Tarifierungsabteilung: Informationen über etwaige Anpassungen bei den Tarifen. Beispielsweise würden Preisanpassungen über die a-priori Schätzer des B/F-Verfahrens sich unmittelbar auf die Einschätzung des im Geschäftsjahr neu gezeichneten Geschäfts durchschlagen.
- Externe Informationsquellen: Marktdaten, beispielsweise des GDV können zum „Benchmarking“ herangezogen werden. Inflationsindizes oder Zinsstrukturkurven von offiziellen Stellen sind an verschiedenen Stellen des Reserveprozesses notwendig.
- Risikomanagement: Informationen, für welche Portefeuilles im Risikomanagement aufgrund jüngster Entwicklungen erhöhte Unsicherheiten gesehen werden. Die entsprechenden Segmente bedürfen im Reservierungsprozess einer erhöhten Aufmerksamkeit um die Risiken adäquat zu berücksichtigen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Ein gemischtes Modell) [18 Punkte]

Das in der Aufgabe behandelte stochastische Modell basiert auf Ideen der Veröffentlichung Schnieper, R. (1991) Separating True IBNR and IBNER Claims. ASTIN Bulletin, 21, 111-127.

(a) *[2 Punkte]* Es gilt nach (MM2) und (MM3)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i,k-1}) &= \mathrm{E}(C_{i,k-1} + S_{i,k} + T_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i,k-1}) \\ &= C_{i,k-1} + m_k \cdot v_i + h_k \cdot C_{i,k-1} \\ &= f_k \cdot C_{i,k-1} + m_k \cdot v_i \end{aligned}$$

(b) *[4 Punkte]* Im ILR-Modell zeigen die Zuwächse keinen Bezug zu den zuvor eingetretenen Schäden, was gut zur Modellierung neu gemeldeter Schäden passt. Im CL-Modell hängen die Zuwächse stark (multiplikativ) von den zuvor eingetretenen Schäden ab, was zur Abwicklung bekannter Schäden passt. Das MM-Modell greift diese Sachverhalte auf, indem es die neu gemeldeten Schäden wie im ILR-Modell (MM2 entspricht dabei ILR2) und die Abwicklung zuvor gemeldeter Schäden wie im CL-Modell (MM3 entspricht dabei CL2) behandelt. Die Motivation des MM-Modells ist also die Kombination der Eigenschaften des ILR- und des CL-Modells indem versucht wird, die höhere Detailtiefe der vorhandenen Informationen über zusätzliche Parameter in die Modellbildung aufzunehmen.

Zusatzbemerkung: Die Unabhängigkeit der Anfalljahre wird bei allen drei Modellen angenommen. Eine Varianzbedingung wurde für das MM-Modell zur Vereinfachung nicht angegeben. Für eine etwaige Berechnung von Zufalls-, Schätz- und Prognosefehlern wäre eine entsprechende Erweiterung durch zusätzliche Modellannahmen nötig.

(c) *[6 Punkte]* Für $1 \leq k \leq u$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}(C_{i,u}) &= \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}\left(\mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,u-1}}(C_{i,u})\right) \\ &= \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}(f_u \cdot C_{i,u-1} + m_u \cdot v_i) \\ &= f_u \cdot \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}\left(\mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,u-2}}(C_{i,u-1})\right) + m_u \cdot v_i \\ &= f_u \cdot \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}(f_{u-1} \cdot C_{i,u-2} + m_{u-1} \cdot v_i) + m_u \cdot v_i \\ &= f_u \cdot f_{u-1} \cdot \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,k}}\left(\mathrm{E}^{\mathcal{D}_{i,u-3}}(C_{i,u-2})\right) + (f_u \cdot m_{u-1} + m_u) \cdot v_i \\ &= \ldots \\ &= f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+1} \cdot C_{i,k} + \Big(f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+2} \cdot m_{k+1} + \ldots + f_u \cdot m_{u-1} + m_u\Big) \cdot v_i \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt die weitere Abwicklung der zum Abwicklungszeitpunkt k bereits bekannten Schäden und damit durch

$$(f_u \cdot \ldots \cdot f_{k+1} - 1) \cdot C_{i,k}$$

die IBNER-Komponente. Der zweite Term berechnet hingegen die vom Volumenmaß abhängige IBNYR-Komponente, also die Schadenlast aller zu einem späteren Zeitpunkt als k gemeldeten Schäden, inklusive deren weiterer Abwicklung über Abwicklungsfaktoren.

Zusatzbemerkung: Für die obige Aussage ist es notwendig, dass Spätschäden im Mittel nach ihrem Meldejahr die gleiche Abwicklung zeigen, wie bereits früher gemeldete Schäden. Diese Präzisierung wurde aber für die Lösung nicht verlangt.

(d) *[4 Punkte]* Aus (MM2) folgt insbesondere $\mathrm{E}(S_{i,k}) = m_k \cdot v_i$ und damit

$$\mathrm{E}\left(\widehat{m}_k\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{E}(S_{i,k})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} v_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} m_k \cdot v_i}{\sum_{i=1}^{n-k+1} v_i} = m_k$$

Bezeichnet $\mathcal{D}_{k-1}$ die von $\mathcal{D}_{1,k-1}, \ldots, \mathcal{D}_{n,k-1}$ erzeugte Bedingung, so folgt aus (MM3) und (MM1) $\mathrm{E}^{\mathcal{D}_{k-1}}(T_{i,k}) = h_k \cdot C_{i,k-1}$ und damit

$$\mathrm{E}^{\mathcal{D}_{k-1}}\left(\widehat{h}_k\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{k-1}}(T_{i,k})}{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} h_k \cdot C_{i,k-1}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,k-1}} = h_k.$$

Insbesondere folgt $\mathrm{E}(\widehat{h}_k) = h_k$.

(e) *[2 Punkte]* Beispiele für Schwachpunkte sind:

- Überparametrisierung: Im Vergleich zum ILR- oder CL-Modell verwendet das Mixed Model die doppelte Anzahl an Parametern zur Modellierung der Erwartungswerte. Dies ist akzeptabel, sofern auch deutlich mehr Informationen (doppelt so viele Datenpunkte) zur Verfügung stehen. Ist dies nicht der Fall, wie in der Aufgabe angegeben, so droht eine Überparametrisierung.

- Es kann zwar das Verfahren „gerettet“ werden, aber eine Überprüfung der zugrundeliegenden Modellannahmen ist mangels Datenverfügbarkeit nicht sinnvoll möglich.

- Bei der Schätzung der Parameter durch Minimieren der quadratischen Abstände sind „unsinnige“ Werte nicht ausgeschlossen. So können sich beispielsweise auch negative Schätzwerte für die f_k ergeben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [34 Punkte]

(a) *[4 Punkte]* Es gilt

$$\bar{q} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} q_i \approx \frac{1210{,}1\%}{15} \approx 80{,}7\%$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i - \bar{q}\right)^2 \\
&= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i^2 - 2q_i\bar{q} + \bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 2\bar{q}\sum_{i=1}^{15} q_i + 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 15\bar{q}^2\right) \\
&\approx \frac{1}{14}\left(9{,}966 - 15\cdot(80{,}7\%)^2\right) \\
&\approx (12{,}1\%)^2,
\end{aligned}$$

womit sich $\bar{\sigma} \approx 12{,}1\%$ ergibt.

(b) *[5 Punkte]* Aufgrund der Vorgaben zum Versicherungszweig und da aufgrund der sehr hohen Schaden-Kostenquote von ca. 110% die Sonderregelungen bzgl. Grenzschadenquote und Sicherheitszuschlag nicht greifen, berechnet sich der Sollbetrag zu

$$SB_{16} = 4{,}5\cdot\bar{\sigma}\cdot P_{16} \approx 54{,}5.$$

Die erfolgsunabhängige Zuführung beträgt

$$3{,}5\%\cdot SB_{16} \approx 1{,}9.$$

Mit einer Geschäftsjahresschadenquote von $q_{16} = 81{,}0\%$ liegt ein (kleiner) Überschaden in Höhe von

$$-B = -(\bar{q} - q_{16})\cdot P_{16} = 0{,}3\%\cdot 100 = 0{,}3$$

vor, was zu einer Schwankungsrückstellung SR_{16} von

$$SR_{16} = SR_{15} + 3{,}5\%\cdot SB_{16} + B \approx 28{,}5 + 1{,}9 - 0{,}3 = 30{,}1$$

führt.

(c) *[2 Punkte]* Es ergibt sich

$$q_{16}^{nS} = q_{16} + \frac{SR_{16} - SR_{15}}{P_{16}} \approx 81{,}0\% + \frac{30{,}1 - 28{,}5}{100} = 82{,}6\%.$$

(d) *[8 Punkte]* Ergäbe sich im Geschäftsjahr eine durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$, so wäre die Veränderung der Schwankungsrückstellung gerade die erfolgsunabhängige Zuführung in Höhe von $3{,}5\% \cdot SB_{16} \approx 1{,}9$ und damit wäre

$$SR_{16} = SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16} \approx 28{,}5 + 1{,}9 = 30{,}4$$

und

$$q_{16}^{nS} = \bar{q} + \frac{3{,}5\% \cdot SB_{16}}{P_{16}} \approx 80{,}7\% + 1{,}9\% = 82{,}6\%.$$

Bei einer höheren bzw. niedrigeren Schadenquote läge ein Über- bzw. ein Unterschaden vor, der durch eine Entnahme bzw. eine Zuführung zur Schwankungsrückstellung ausgeglichen würde, solange die Schwankungsrückstellung nicht leer ($SR_{16} = 0$) bzw. voll ($SR_{16} = SB_{16}$) wäre. Damit ergibt sich

$$q_{16}^{\max} \approx \frac{80{,}7 + 30{,}4}{100} = 111{,}1\% \quad \text{und} \quad q_{16}^{\min} \approx \frac{80{,}7 - (54{,}5 - 30{,}4)}{100} = 56{,}6\%.$$

Bei einer durchschnittlichen Schadenquote von knapp 81% und eine Standardabweichung von ca. 12% ist eine Geschäftsjahresschadenquote, die nicht im Interval $[56{,}6\%, 111{,}1\%]$ liegt, eher unwahrscheinlich. Die Aussage bedeutet daher, dass das Geschäftsjahresergebnis des vorgegebenen Versicherungszweigs (natürlich vor Steuern etc.) mit einer Schaden-Kostenquote nach Schwankung von 111,6% verlustträchtig verläuft und das Ergebnis abgesehen von eher extremen Fällen nicht vom Schadenverlauf abhängt.

Zusatzbemerkung: Da im vorliegenden Beispiel $SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16} \leq SB_{16}$ ist, ergibt sich für die Schadenquote nach Schwankung

$$\begin{aligned} q_{16}^{nS} &= q_{16} + \frac{SR_{16} - SR_{15}}{P_{16}} \\ &= q_{16} + \frac{SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16} + (\bar{q} - q_{16}) \cdot P_{16} - SR_{15}}{P_{16}} \\ &= 3{,}5\% \cdot 4{,}5 \cdot \bar{\sigma} + \bar{q}, \end{aligned}$$

solange

$$0 \leq SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16} + (\bar{q} - q_{16}) \cdot P_{16} \leq SB_{16}$$

gilt. Insbesondere ist also unter den gegebenen Bedingungen die Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS} nur von den aus dem Beobachtungszeitraum berechneten Größen $\bar{\sigma}$ und $\bar{q}$ abhängig. Aus der Ungleichungskette ergeben sich die Formeln

$$q_{16}^{\max} = \bar{q} + \frac{SR_{15} + 3{,}5\% \cdot SB_{16}}{P_{16}} \quad \text{und} \quad q_{16}^{\min} = \bar{q} - \frac{SB_{16} - SR_{15} - 3{,}5\% \cdot SB_{16}}{P_{16}}$$

und die Länge des Intervalls $q_{16}^{\max} - q_{16}^{\min} = 4{,}5 \cdot \bar{\sigma}$.

(e) *[3 Punkte]* Da sich q_1 und q_{16} nur relativ wenig unterscheiden, ändern sich die durchschnittliche Schadenquote sowie die Standardabweichung des neuen Beobachtungszeitraums nur wenig. Damit verändert sich auch der Sollbetrag und daher die erfolgsunabhängige Zuführung kaum. Da der zu erwartende Unterschaden im Geschäftsjahr 17 durch eine Zuführung zur Schwankungsrückstellung ausgeglichen werden wird, liegt die Schadenquote nach Schwankung unverändert bei ungefähr

$$q_{17}^{nS} \approx q_{16}^{nS} \approx 83\%.$$

(f) *[12 Punkte]* Allgemein gilt aufgrund der getroffenen Annahmen, dass die Schadenquoten der Geschäftsjahre „relative nahe“ bei 70% liegen werden. Der Bereich $[66\%, 74\%]$ deckt bereits plus/minus zwei Standardfehler ab.

i) *[4 Punkte]* Die Schadenquoten der Geschäftsjahre 17 bis 19 werden nahe bei 70% liegen und damit im Schnitt gut 10% unterhalb der Schadenquoten der Geschäftsjahre 2 bis 4, die im Gegenzug aus dem Beobachtungszeitraum herausfallen. Daher wird die durchschnittliche Schadenquote über die Zeit absinken.

Im Geschäftsjahr 20 werden 3 von 15 Werten auf dem 70%-Niveau liegen. Daher wird der Durchschnitt (im Erwartungswert) von knapp 81% um $\frac{3}{15}$ von 10% auf ca. 79% sinken.

Zusatzbemerkung: Der nicht verlangte exakte Erwartungswert liegt bei 78,8% mit einem Standardfehler von 0,2%.

ii) *[3 Punkte]* Zwar werden die Geschäftsjahresschadenquoten der Jahre 17 bis 19 nur wenig um den Wert von 70% streuen, aber für die Berechnung der Standardabweichung des Beobachtungszeitraums ist der Mittelwert im Beobachtungszeitraum entscheidend. Dieser liegt bei ca. 80% (anfangs bei ca. 81%, in 20 bei ca. 79%). Damit werden die Realisierungen der Schadenquoten der Jahre 17 bis 19 über ihren quadratischen Abstand zum Mittelwert einen relevanten Beitrag zu der gemessenen Standardabweichung liefern und diese wird zunächst nicht sinken sondern annähernd konstant bleiben.

Zusatzbemerkung: Die gemessene Standardabweichung würde voraussichtlich bis im Geschäftsjahr 22 geringfügig ansteigen, danach absinken und im Geschäftsjahr 32 das Niveau von 2% erreichen.

iii) *[5 Punkte]* Mit der gemessenen Standardabweichung und den verdienten Beiträgen würde auch der Sollbetrag annähernd konstant bleiben und damit im relevanten Zeitraum einen Wert von ca. 55 haben. Da in den Geschäftsjahren 17 bis 19 jeweils ein Unterschaden in der Größenordnung von 10 vorliegen wird, erfolgt in diesen Jahren (zusätzlich zu erfolgsunabhängigen Zuführung von knapp 2) jeweils eine entsprechende Zuführung zur Schwankungsrückstellung, solange bis der Sollbetrag erreicht ist. Bei einem Startwert von $SR_{16} \approx 30{,}1$ wird der Sollbetrag im Geschäftsjahr 19 erreicht sein. Im Geschäftsjahr 20 erfolgt dann weder eine erfolgsunabhängige Zuführung, noch eine Zuführung wegen des zu erwartenden Unterschadens, womit sich eine erwartete Schadenquote nach Schwankung von

$$q_{20}^{nS} \approx 70\%$$

ergibt. Wegen der geringen Standardabweichung im Geschäftsjahr 20 kann somit eine Schadenquote nach Schwankung „nahe“ bei 70% erwartet werden.

Zusatzbemerkung: Zum Ende des Geschäftsjahres 19 wird die Schwankungsrückstellung dem Sollbetrag entsprechen, sofern nicht extreme Fälle eintreten (wie viel zu wenig Unterschaden in den Jahren 17 bis 19 oder ein Überschaden im Jahr 19, was ja mindestens ca. 4 bis 5 Standardabweichungen entsprechen würde). Der Sollbetrag für das Geschäftsjahr 20 kann sich nur geringfügig ändern, ebenfalls sofern keine extremen Fälle vorliegen. (Das Thema Grenzschadenquote und Sicherheitszuschlag spielt angesichts der gegebenen Werte weiterhin keine Rolle.) Daher ist der Treiber der Unsicherheit der Prognose die Genauigkeit, mit der sich die Geschäftsjahresschadenquote realisiert, also ein Standardfehler von 2%.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Rechnungslegung) [12 Punkte]

Die zutreffenden Antworten sind

(A) HGB

(B) IFRS17

(C) HGB

(D) Solvency II

(E) IFRS17

(F) IFRS17

(G) HGB

(H) Solvency II.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8 (Munich-Chain-Ladder) [25 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Da Zahlungen und Schadenaufwände beim Abwicklungszeitpunkt u übereinstimmen, müssen über- bzw. unterdurchschnittliche Auszahlungsstände und die darauf folgenden Abwicklungsfaktoren der beiden Datentypen Abhängigkeiten aufweisen. Die Korrelationsparameter λ^C und λ^D charakterisieren diesen Zusammenhang zwischen Zahlungen und Schadenaufwänden. So beschreibt λ^C die Abhängigkeit zwischen $\frac{D_{i,k}}{C_{i,k}}$ und $\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ in präziser Formulierung als Korrelationskoeffizient der entsprechenden Residuen und beschreibt so, ob die zukünftige Zahlungsabwicklung eher wenig oder eher stark vom Stand der Schadenaufwände abhängt. Aufgrund der Symmetrie der Modellannahmen gelten die entsprechenden Aussagen mit vertauschten Rollen für C und D auch für λ^D.

(b) *[6 Punkte]* Mit den üblichen Bezeichnungen aus dem Skript lautet die Modellannahme (MCL2)

$$\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}\left(\mathrm{Res}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C}}(C_{i,k+1})\right) = \lambda^C \cdot \mathrm{Res}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C}}(D_{i,k}).$$

Mit $\lambda^C = 0$ folgt

$$0 = \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}\left(\mathrm{Res}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C}}(C_{i,k+1})\right) = \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}\left(\frac{C_{i,k+1} - f_{k+1}\cdot C_{i,k}}{\sigma_{k+1}^C\sqrt{C_{i,k}}}\right)$$

und damit

$$\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(C_{i,k+1}) = f_{k+1}\cdot C_{i,k}.$$

Damit ergibt sich

$$\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(C_{i,u}) = \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}\,\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,u-1}^{C,D}}(C_{i,u}) = \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(f_u\cdot C_{i,u-1}) = \ldots = f_{k+1}\cdot\ldots\cdot f_u\cdot C_{i,k}$$

und analog

$$\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k}^{C,D}}(D_{i,u}) = g_{k+1}\cdot\ldots\cdot g_u\cdot D_{i,k}.$$

Da zum Zeitpunkt u alle Schäden abgewickelt und bezahlt sind, gilt $C_{i,u} = D_{i,u}$ und es folgt

$$\frac{C_{i,k}}{D_{i,k}} = \frac{g_{k+1}\cdot\ldots\cdot g_u}{f_{k+1}\cdot\ldots\cdot f_u},$$

also die Behauptung.

(c) *[2 Punkte]* Im MCL-Modell mit den speziellen Parametern $\lambda^C = \lambda^D = 0$ ist nach $(*)$ der Quotient $\frac{C_{i,k}}{D_{i,k}}$ konstant. Damit liegt (bis auf einen konstanten Faktor pro Abwicklungsjahr) faktisch nur ein Datentyp vor und die MCL-Modellannahmen (MCL1) und (MCL2) sind trivialerweise bereits durch die Forderung nach den CL-Modellannahmen erfüllt. Das MCL-Modell ist in diesem Fall „überflüssig“, sowohl für Zahlungen als auch Schadenaufwände gilt das CL-Modell.

Zusatzbemerkung: Auch in der Praxis ergibt die durch (∗) gegebene Situation nur in Ausnahmesituationen Sinn, z.B. falls keine Reserven gestellt werden, also $C_{i,k} = D_{i,k}$ ist.

(d) *[2 Punkte]* Die Konstellation $\widehat{\lambda}^C \approx \widehat{\lambda}^D \approx 0$ ist trotzdem möglich. Die Varianz der Schätzer der Korrelationsparameter hängt von verschiedenen Faktoren ab, wie z.B. der Zahl der verfügbaren Datenpunkte (gegeben durch n) oder davon wie volatil die zugrundeliegende Schadenabwicklung ist. Je höher die Varianz der Schätzer, desto leichter sind auch unrealistische Ergebnisse bei der Schätzung der Parameter möglich.

(e) *[4 Punkte]* Konstellation (I) bedeutet, dass der aktuelle Auszahlungsstand die zukünftigen Zahlungen nicht beeinflusst, die zukünftige Abwicklung der Schadenaufwände hingegen schon. Vereinfacht bedeutet dies, dass die Höhe der Einzelfallreserven kaum Einfluss auf die Zahlungen hat. Die MCL-Prognose wird in diesem Fall mit der CL-Prognose für das Zahlungsdreieck übereinstimmen.

Konstellation (II) beschreibt den Fall, dass der aktuelle Auszahlungsstand die zukünftigen Zahlungen stark beeinflusst, die zukünftige Abwicklung der Schadenaufwände hingegen kaum. Vereinfacht bedeutet dies, dass die Höhe der Einzelfallreserven einen starken Einfluss auf die Zahlungen hat, Veränderungen der Einschätzung der individuellen Schäden aber wenig von den bisherigen Auszahlungen abhängen. Die MCL-Prognose wird in diesem Fall mit der CL-Prognose für das Schadenaufwandsdreieck übereinstimmen.

In beiden Konstellationen ist es natürlich möglich, dass ein hoher Schätzfehler bei der Schätzung der Korrelationsparameter für die Werte verantwortlich ist.

Zusatzbemerkung: Natürlich bedeutet „unkorreliert“ nicht dasselbe wie „unabhängig“. Auf die völlige Exaktheit der Formulierungen wurde zugunsten einer besseren Lesbarkeit verzichtet.

(f) *[4 Punkte]* Mit der Bezeichnung $P_{i,k} = N_{i,k} - M_{i,k}$ für die geschlossenen Schäden lässt sich das MCL-Modell leicht auf diese Situation übertragen, wobei die Rolle der Zahlungen $C_{i,k}$ auf die Anzahl der geschlossenen Schadenfälle $P_{i,k}$ und die Rolle der Schadenaufwände $D_{i,k}$ auf die Anzahl der gemeldeten Schäden $N_{i,k}$ übergeht.

Begründung: Das CL-Modell ist grundsätzlich geeignet, um kumulierte Schadenanzahlen (gemeldet oder geschlossen) zu beschreiben. Im Einzelfall bleibt natürlich zu prüfen, ob die Modellvoraussetzungen erfüllt sind. Wie bei Zahlungen und Schadenaufwänden liegt der Quotient $P_{i,k}/N_{i,k}$ zwischen 0% und 100%, wird in der Regel über die Abwicklungsjahre hinweg ansteigen und liegt zum Zeitpunkt u bei 100%, weshalb eine Abhängigkeit der zukünftigen Abwicklung der Schadenanzahlen vom aktuellen Anteil geschlossener Schäden zwingend notwendig ist.

(g) *[4 Punkte]* Der Korrelationsparameter λ^P beschreibt, ob bzw. wie sehr die zukünftige Abwicklung der Anzahl der geschlossenen Schäden von der Gesamtzahl und damit von der Zahl der offenen Schäden abhängt. In der Regel sollte hier eine größere Korrelation vorliegen, da relativ viele bzw. wenige offene Schäden zu relativ vielen bzw. wenigen Schadenschließungen führen werden.

Der Korrelationsparameter λ^N beschreibt, ob bzw. wie sehr die zukünftige Abwicklung der Anzahl der gemeldeten Schäden von der Zahl der geschlossenen bzw. der Zahl der offenen Schäden abhängt. Auch hier sind natürlich Abhängigkeiten denkbar (keine oder viele offene Schäden könnten ein Hinweis auf ein „beendetes oder aktives Schadengeschehen" sein, was sogar eine negative Korrelation bedingen würde), in der Regel sollte hier aber wenig Korrelation vorliegen, da die Zahl der Spätmeldungen nicht von der Rate der Schadenschließungen abhängen wird.