



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

## **Finanzmathematik und Investment II**

gemäß Prüfungsordnung 4  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 29. Oktober 2021

### *Hinweise:*

- Die Klausur ist als *Open-Book-Klausur* konzipiert. Als weiteres Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

### *Mitglieder der Prüfungskommission:*

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,  
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,  
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

**Aufgabe 1.** [Portfoliotheorie und -management] [20 Punkte]

Betrachten Sie ein Zweiperioden-Modell für den Zeitraum  $[0, 2]$  mit einem risikobehafteten Wertpapier mit der zufälligen Einperiodenrendite  $R_i$  in Periode  $i = 1, 2$  und einer risikofreien Anlage mit der konstanten Einperiodenrendite  $r$ . Mit  $W_t$  bezeichnen wir das Vermögen eines Investors zum Zeitpunkt  $t = 0, 1, 2$ , mit  $\pi_t$ ,  $t = 0, 1$ , den Geldbetrag, der zum Zeitpunkt  $t$  in das risikobehaftete Wertpapier investiert ist.

Nehmen Sie an, dass der Investor mit gegebenem Anfangsvermögen  $W_0 > 0$  seine nicht-antizipierenden Investitionsentscheidungen zu den Zeitpunkten  $t \in \{0, 1\}$  mit dem Ziel trifft,

$$U_t := \mathbb{E}_t[W_2] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_t(W_2)$$

zu maximieren, wobei  $\gamma$  eine positive Konstante ist. Dabei stellen  $\mathbb{E}_t[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$  den bedingten Erwartungswert und  $\text{Var}_t(\cdot) = \text{Var}(\cdot | \mathcal{F}_t)$  die bedingte Varianz, gegeben die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  der Information des Finanzmarkts bis zur Zeit  $t$  dar. Gehen Sie davon aus, dass es keine Volumenbeschränkungen in den Anlagen gibt und dass  $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}$  und  $\text{Var}_0 = \text{Var}$  gilt.

(a) [4 Punkte] Zeigen Sie:  $U_0 = \mathbb{E}[U_1] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(\mathbb{E}_1[W_2])$ .

*Hinweis:* Es gilt die Rechenregel  $\text{Var}(X) = \text{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]) + \mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{F}_t)]$ .

(b) [12 Punkte] Auf Basis der Beziehung aus (a) leitet der Investor die folgende Strategie per Rückwärtsrekursion ab.

1.  $\pi_1$  wird so bestimmt, dass  $U_1$  zum Zeitpunkt 1 maximal wird.
2. Gegeben das optimale  $\pi_1$ , wird  $\pi_0$  so bestimmt, dass  $U_0$  zum Zeitpunkt 0 maximiert wird.

(i) [4 Punkte] Erläutern Sie diese Strategie, indem Sie sie insbesondere von der *Buy-and-Hold-Strategie* und der *Strategie der sukzessiven Einperioden-Entscheidungen* nach dem Erwartungswert-Varianz-Kriterium abgrenzen.

(ii) [8 Punkte] Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{\gamma \cdot \text{Var}_1(R_2)} \cdot \mathbb{E}_1[R_2 - r], \\ \pi_0 &= \frac{1}{(1+r)\gamma \cdot \text{Var}(R_1)} (\mathbb{E}[R_1 - r] - \text{Cov}(R_1, \pi_1(R_2 - r))). \end{aligned}$$

*Hinweis:* Für  $\mathcal{F}_t$ -messbares  $X$  gilt  $\text{Var}(X + Y | \mathcal{F}_t) = \text{Var}(Y | \mathcal{F}_t)$  und  $\text{Var}(X \cdot Y | \mathcal{F}_t) = X^2 \cdot \text{Var}(Y | \mathcal{F}_t)$ .

(c) [4 Punkte] Interpretieren Sie die Rolle des Abzugsterms in der Darstellung von  $\pi_0$  unter (b) (ii) für das Verhalten des Zweiperioden-Investors.

*Lösungsskizze:*

(a) Durch Bedingen auf die Information zur Zeit  $t = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{E}[W_2] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(W_2) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}_1[W_2]] - \frac{\gamma}{2} \mathbb{E}(\text{Var}_1(W_2)) - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(\mathbb{E}_1[W_2]) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_1[W_2] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_1(W_2)\right] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(\mathbb{E}_1[W_2]) \\ &= \mathbb{E}[U_1] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(\mathbb{E}_1[W_2]). \end{aligned}$$

(b) (i) Bei der Bestimmung des optimalen Portfolios zur Zeit 0 berücksichtigt der Investor, dass er zum Zeitpunkt 1 sein Portfolio umschichten kann und er die Reallokation zur Maximierung von  $U_1$  gemäß dem EV-Kriterium nutzen wird.

Bei der Buy-and-Hold-Strategie hingegen besteht keine Möglichkeit zur Reallokation, sodass die Auswahl des optimalen Portfolios gemäß dem EV-Kriterium für eine Periode der Dauer 2 vorgenommen wird.

Bei der sukzessiven Einperioden-Optimierung spielt die Investitionsentscheidung zum Zeitpunkt 1 keine Rolle für die Investitionsentscheidung zum Zeitpunkt 0. Es handelt sich um eine myopische Investitionsentscheidung.

(ii) Die Wertentwicklung des Portfolios in der 2. Periode ist gegeben durch

$$W_2 = (1+r)W_1 + \pi_1(R_2 - r),$$

sodass gemäß den angegebenen Rechenregeln

$$U_1 = \mathbb{E}_1[W_2] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_1(W_2) = (1+r)W_1 + \pi_1 \mathbb{E}_1[R_2 - r] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_1(R_2) \pi_1^2$$

gilt. Wie im Markowitz-Einperioden-Modell liefert Nullsetzen der Ableitung von  $U_1$  nach  $\pi_1$

$$\mathbb{E}_1[R_2 - r] - \gamma \text{Var}_1(R_2) \pi_1 = 0$$

das optimale Portfolio  $\pi_1 = \frac{1}{\gamma \text{Var}_1(R_2)} \cdot \mathbb{E}_1[R_2 - r]$ .

Mit dem so gewählten  $\pi_1$  ergibt sich die Wertentwicklung in  $[0, 2]$  zu

$$W_2 = (1+r)^2 W_0 + (1+r) \pi_0 (R_1 - r) + \pi_1 (R_2 - r).$$

Die Maximierung von

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{E}[W_2] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}(W_2) \\ &= (1+r)^2 W_0 + \mathbb{E}[\pi_1 (R_2 - r)] + (1+r) \pi_0 \cdot \mathbb{E}[R_1 - r] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \left( (1+r)^2 \text{Var}(R_1) \pi_0^2 + 2(1+r) \pi_0 \text{Cov}(R_1, \pi_1 (R_2 - r)) + \text{Var}(\pi_1 (R_2 - r)) \right) \end{aligned}$$



ist bei gegebenem  $\pi_1$  äquivalent zur Maximierung von

$$(1+r)\pi_0 \cdot \mathbb{E}[R_1 - r] - \frac{\gamma}{2} \left( (1+r)^2 \text{Var}(R_1)\pi_0^2 + 2(1+r)\pi_0 \text{Cov}(R_1, \pi_1(R_2 - r)) \right).$$

Nullsetzen der Ableitung nach  $\pi_0$

$$(1+r)\mathbb{E}[R_1 - r] - \gamma \left( (1+r)^2 \text{Var}(R_1)\pi_0 + (1+r)\text{Cov}(R_1, \pi_1(R_2 - r)) \right) = 0$$

liefert den optimalen Betrag

$$\pi_0 = \frac{1}{\gamma(1+r)\text{Var}(R_1)} \left( \mathbb{E}[R_1 - r] - \text{Cov}(R_1, \pi_1(R_2 - r)) \right).$$

- (c) Sind die beiden Periodenrenditen positiv korreliert, so führt dies zu einer Erhöhung der Volatilität der Zweiperioden-Rendite mit dem Effekt, dass die Investition in die risikobehaftete Anlage weniger attraktiv wird.



**Aufgabe 2.** [Portfoliotheorie und -management: Kapitalanlagekonzepte im Aktienbereich und Sicherungsstrategien für Portfolios] [20 Punkte]

(a) [17 Punkte] (Kapitalanlagekonzepte im Aktienbereich)

- (i) [4 Punkte] Wie können Sie die Faktoren *Value-Growth Premium*, *Momentum Premium* und *Size Premium* in einem vordefinierten Aktienuniversum implementieren? Welche Aktien kaufen und welche verkaufen Sie jeweils? Wie können Sie die oben genannten Strategien implementieren, wenn Leerverkäufe nicht zulässig sind?
- (ii) [4 Punkte] Welche Überzeugung vertreten Sie, wenn Sie eine *Momentum-Strategie* umsetzen? Wann kann diese Strategie kurzfristig zu erheblichen Verlusten führen? Geben Sie zwei Gründe an, die dafür verantwortlich sein können, dass die Strategie auch langfristig nicht zu einer Überrendite führt.
- (iii) [9 Punkte] Ein institutioneller Investor hält die Aktien A1, A2 und A3 in seinem Portfolio.

	Varianz	Kurs	Stücke
<b>Aktie A1</b>	16	45	450
<b>Aktie A2</b>	25	100	205
<b>Aktie A3</b>	36	35	550

Korrelationen	A1	A2	A3
<b>A1</b>	1,00	-0,05	0,30
<b>A2</b>	-0,05	1,00	0,70
<b>A3</b>	0,30	0,70	1,00

Er möchte eine *Low-Volatility-Strategie* in diesem Aktienportfolio implementieren.

Für welche Investmentgewichte entscheidet er sich und wieviel Stücke werden von Aktie A1, A2 und A3 gehalten, wenn Leerverkäufe nicht zulässig sind? Was muss der Investor bei der Ermittlung von Volatilitäten und Korrelationen im Gegensatz zur strategischen Portfoliooptimierung beachten?

(b) [3 Punkte] (Sicherungsstrategien für Portfolios)

*Multiple Choice: Es darf in jeder Teilaufgabe nur eine der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten ausgewählt werden. Bei Nennung der richtigen Alternative erhalten Sie jeweils 0,5 Punkte, ansonsten null Punkte.*

- Wie verändert sich ceteris paribus das Aktienexposure einer CPPI-Strategie bei steigendem risikofreiem Zins?  
A. Höher B. Niedriger C. Bleibt gleich
- Dynamische Sicherungsstrategien verhindern im Gegensatz zu statischen Sicherungsstrategien einen Cashlock.  
A. Richtig B. Falsch



3. Fällt der Aktienmarkt stetig, entwickelt sich die CPPI-Strategie besser als die Buy-and-Hold-Strategie.  
A. Richtig B. Falsch
4. Die Wahl welcher Parameter gibt Auskunft über die Risikobereitschaft eines CPPI-Investors.  
A. Floor B. Cushion C. Beide
5. Leerverkäufe in der risikolosen Anlage sind per Konstruktion möglich.  
A. Nur bei CPPI B. Nur bei VPPI C. Sowohl bei CPPI und VPPI
6. Ein fix definierter Value-at-Risk, der durch die Mischung aus Aktien- und Bondinvestment eingehalten wird, ist ein Beispiel für eine VPPI-Strategie.  
A. Richtig B. Falsch

*Lösungsskizze:*

- (a) (i) • *Value-Growth Premium:* Value Aktien werden gekauft, Growth Aktien werden verkauft
- *Momentum Premium:* Aktien im Aufwärtstrend werden gekauft, Aktien im Abwärtstrend werden verkauft
- *Size Premium:* Aktien mit geringer Marktkapitalisierung werden gekauft, Aktien mit hoher Marktkapitalisierung werden verkauft

Wenn Leerverkäufe nicht zulässig sind, werden die Aktien entsprechend über- und untergewichtet.

- (ii) Sie sind überzeugt davon, dass Preissteigerungen zunächst adäquat sind und Marktteilnehmer im Anschluss die positive Wirkung der Nachricht überschätzen oder preistreibende Nachrichten von den Marktteilnehmern zuerst unterschätzt und im Anschluss nach oben korrigiert werden.

Durch Einflussnahme der Politik (staatliche Hilfspakete, Strafzahlungen) kann eine Momentum-Strategie kurzfristig erhebliche Verluste einfahren.

Die Beobachtung, dass eine Momentum-Strategie in der Historie Erfolg hatte, könnte durch Data Mining entstanden sein. Weiter können Anomalien langfristig durch Handelsaktivitäten verschwinden.

- (iii) A1 und A2 sind negativ korreliert, A3 hat zu beiden übrigen Wertpapieren eine positive Korrelation und würde deshalb leerverkauft werden. Da dies nicht erlaubt ist, reduziert sich das Problem auf den 2-Wertpapier-Fall. Minimiert wird die Portfoliovolatilität  $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ . Mit der Nebenbedingung  $x_1 + x_2 = 1$  ergeben sich die Investmentgewichte zu

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} = 0,60 \quad \text{und} \quad x_2 = 0,40,$$



anhand derer der aktuelle Portfoliowert in Höhe von 60.000 realloziert wird. Der Investor hält in seiner Strategie also  $36.000/45 = 800$  Stücke A1 und  $24.000/100 = 240$  Stücke A2. Aktie A3 wird komplett verkauft.

Die Korrelationen und Volatilitäten werden in der strategischen Portfoliooptimierung auf Grundlage einer langen Historie an Marktdaten berechnet. Eine Faktorstrategie reagiert auf kurzfristige Änderungen von Korrelationen und Volatilitäten und wählt jene Aktien ins Portfolio, die aktuell eine geringe Vola/Korrelation aufweisen. Man benötigt hier also nur eine kurze Historie an Marktdaten / implizite Volatilitäten.

(b) Richtig sind folgende Antworten:

1.A. 2.B. 3.A. 4.C. 5.C. 6.A.



**Aufgabe 3.** [Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]

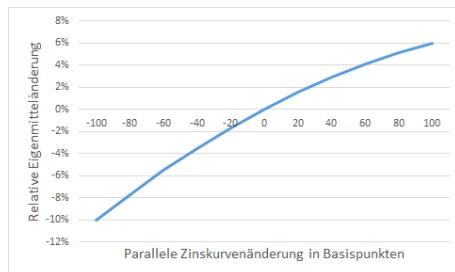
(a) [8 Punkte] Sie möchten die Eigenmittel Ihres Versicherungsunternehmens bezüglich paralleler Verschiebungen der Zinskurve hedgen. Dabei stehen Ihnen die folgenden Typen von Finanztiteln zum Kauf zur Verfügung:

- 1) Payer Swap
- 2) Receiver Swap
- 3) Plain Vanilla Bond
- 4) CMS-Floater mit Floor und Multiplikator
- 5) CMS-Floater mit Cap
- 6) Callable Bond
- 7) Puttable Bond

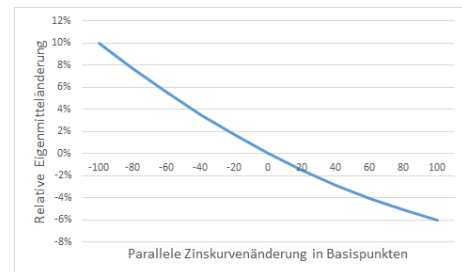
Wählen Sie zu jeder nachfolgenden Funktion, die die Eigenmitteländerung bezüglich einer parallelen Zinskurvenänderung beschreibt, den oben genannten Finanztitel, der besonders gut für das Hedging geeignet ist. Begründen Sie jeweils *kurz* Ihre Entscheidung.

*Hinweis:* Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Passiva nicht auf Änderungen der Aktiva reagieren.

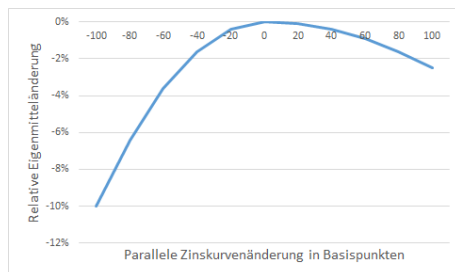
(i) [2 Punkte]



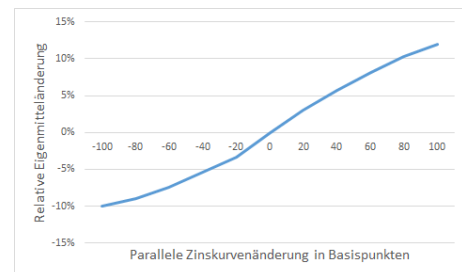
(ii) [2 Punkte]



(iii) [2 Punkte]



(iv) [2 Punkte]



(b) [12 Punkte] Sie werden mit der Durchführung eines *Asset-Liability-Matchings* beauftragt. Dabei gelten für den heutigen Marktwert der festverzinslichen Kapitalanlagen (Assets) und der Passivseite (Liabilities) in Mio. €:

$$f_{\text{Assets}}(0) = 1.000$$
$$f_{\text{Liabilities}}(0) = 800$$





Durch ein Curve Fitting kennen Sie die Marktwerte der festverzinslichen Kapitalanlagen (Assets)  $f_{\text{Assets}}(z)$  sowie der Passivseite (Liabilities)  $f_{\text{Liabilities}}(z)$  (jeweils in Mio. €) bezüglich paralleler Zinskurvenänderungen  $z \in [-0,02; 0,02]$  der heutigen Basiszinskurve in funktionaler Form:

$$\begin{aligned}f_{\text{Assets}}(z) &= 250.000z^2 - 17.500z + 1.000, \\f_{\text{Liabilities}}(z) &= 750.000z^2 - 22.500z + 800.\end{aligned}$$

Hierbei ist beispielsweise  $f.(0,01)$  als Marktwert nach einem Parallelshift von +1% der heutigen Basiszinskurve zu lesen.

- (i) [4 Punkte] Berechnen Sie die Funktionen der absoluten und relativen effektiven Durationen der Assets und Liabilities in Abhängigkeit eines Parallelshifts der Zinskurve  $z$ . Bestimmen Sie anschließend die absolute effektive Duration für die Assets und Liabilities bezüglich der heutigen Basiszinskurve.
- (ii) [2 Punkte] Neben den festverzinslichen Kapitalanlagen haben Sie noch 300 Mio. € Cash, das eine effektive Duration von 0 besitzt. Sie können Ihr existierendes Kapitalanlageportfolio in der gleichen Struktur durch Zukauf am Markt beliebig erweitern. Berechnen Sie, wieviel Cash Sie investieren müssen, um auf diese Weise ein perfektes Durationsmatching für die momentane Situation zu erhalten.
- (iii) [4 Punkte] Berechnen Sie die exakte und die durch den Durationsansatz approximierte Änderung der Eigenmittel für eine parallele Zinskurvenänderung von -1% für das Versicherungsunternehmen nach der Kapitalanlageänderung aus (ii). Gehen Sie dabei vereinfachend davon aus, dass sich die Eigenmittel aus der Differenz der Marktwerte von Assets und Liabilities ergeben.
- (iv) [2 Punkte] Nennen Sie zwei Gründe, warum im Allgemeinen ein Durationsmatching mittels effektiver Durationen nicht ausreicht, um das Zinsrisiko komplett zu eliminieren.

*Lösungsskizze:*

- (a) Es müssen Finanzprodukte gefunden werden, die grob einen an der x-Achse gespiegelten Verlauf der Eigenmitteländerung erzeugen.
  - (i) Hedging mit 3) Plain Vanilla Bond: typischer konvexer Marktwertverlauf
  - (ii) Hedging mit 1) Payer Swap: etwas gekrümmter als linear steigend, da für steigende Zinssätze der Diskonteffekt größer wird



- (iii) Hedging mit 4) CMS mit Floor und Multiplikator: Linker Bereich Floor ähnlich Plain Vanilla Bond, rechter Bereich leicht steigend, wenn Multiplikator geeignet gewählt ist
- (iv) Hedging mit 6) Callable Bond: Verlauf ähnlich Plain Vanilla Bond, nur linker Bereich krümmt sich leicht entgegengesetzt
- (b) (i) Die absoluten sowie relativen effektiven Durationen sind ausgehend von den Marktwertfunktionen definiert durch

$$\text{Dur}_{\cdot, \text{abs}}(z) := -\frac{d}{dz}f_{\cdot}(z), \quad \text{Dur}_{\cdot, \text{rel}}(z) := \frac{\text{Dur}_{\cdot, \text{abs}}(z)}{f_{\cdot}(0)}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{Dur}_{\text{Assets,abs}}(z) &= -500.000z + 17.500 \\ \text{Dur}_{\text{Assets,rel}}(z) &= \text{Dur}_{\text{Assets,abs}}(z)/1000 = -500z + 17,5 \\ \text{Dur}_{\text{Liabilities,abs}}(z) &= -1.500.000z + 22.500 \\ \text{Dur}_{\text{Liabilities,rel}}(z) &= \text{Dur}_{\text{Liabilities,abs}}(z)/800 = -1.875z + 28,125 \\ \text{Dur}_{\text{Assets,abs}}(0) &= 17.500 \\ \text{Dur}_{\text{Liabilities,abs}}(0) &= 22.500 \end{aligned}$$

- (ii) Zu bestimmen ist das Vielfache  $x$  des Marktwerts der Assets, sodass die effektiven absoluten Durationen von Assets und Liabilities identisch sind:

$$\begin{aligned} \text{Dur}_{\text{Assets,abs}}(0) \cdot x &= \text{Dur}_{\text{Liabilities,abs}}(0) \Leftrightarrow 17.500x = 22.500 \\ &\Leftrightarrow x \approx 1,2857. \end{aligned}$$

Sie müssten also  $1.000 \cdot (x-1) \approx 285,7$  Mio. € von Ihrem Cash investieren.

- (iii) • *Durationsansatz*: Änderung = 0, da Durationsmatching  
• *Exakter Ansatz*:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Eigenmittel} &= (f_{\text{Assets}}(-1\%) - f_{\text{Assets}}(0)) \cdot 1,2857 \\ &\quad - (f_{\text{Liabilities}}(-1\%) - f_{\text{Liabilities}}(0)) \\ &= (1.200 - 1.000) \cdot 1,2857 - (1.100 - 800) \\ &\approx -42,86 \end{aligned}$$

D. h. der tatsächliche Verlust an Eigenmitteln beträgt 42,86 Mio. €, da das Durationsmatching nur lokal das Zinsänderungsrisiko minimiert.

- (iv) *Gründe*:

1. Durationen stellen nur lineare Sensitivitäten dar.



2. In der Aufgabe wird ein Durationsmatching mittels effektiver Durationen und nicht mittels effektiver Key-Rate-Durationen betrachtet. Effektive Durationen approximieren nur parallele Zinsbewegungen, andere Zinskurvenbewegungen werden nicht betrachtet. Es besteht jedoch das Risiko, dass sich die Zinskurve nicht nur parallel bewegt.

**Aufgabe 4. [ESG – Szenariokonstruktion] [30 Punkte]**

Nach den Erfahrungen im Zuge der Corona-Pandemie soll in Ihrem Versicherungsunternehmen im Rahmen der *unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung* (ORSA) ein Risikoszenario betrachtet werden, das sich an den beobachteten Marktstressen im März 2020 orientiert. Sie wirken daran mit, den ökonomischen Szenariogenerator (ESG) aufzustellen, mit dem das Eigenkapital in einem solchen Szenario abgeschätzt werden soll. Der verantwortliche Risikomanager wendet sich dabei an Sie mit folgenden Fragen:

- (a) [5 Punkte] Für das Zinsmodell soll die Annahme gelten, dass langfristig ein mittleres Zinsniveau existiert und dass die Volatilität des Modells über den Projektionshorizont konstant ist. Begründen Sie, welche Art von Modell Sie vorschlagen würden. Stellen Sie das entsprechende Modell mathematisch dar und erläutern Sie die Bedeutung der Modellparameter.
- (b) [10 Punkte] Für das Aktienmodell ist die Wahl auf eine *Geometrische Brownsche Bewegung* gefallen.
- (i) [4 Punkte] Wie würden Sie die jährlichen Änderungen parametrisieren? Gehen Sie dabei auch auf alternative Parametrisierungsmöglichkeiten ein und erläutern Sie Ihre Wahl.
- (ii) [6 Punkte] Hinsichtlich der Modellparameter „Volatilität“ und „Drift“ ist geplant, diese anhand von historischen Daten zu schätzen. Nehmen Sie dazu Stellung und begründen Sie, welches Verfahren Sie zur Parametrisierung vorschlagen würden.
- (c) [15 Punkte] Eine weiterführende Überlegung ist, auch Anleienspreads stochastisch zu simulieren.
- (i) [3 Punkte] Die aktuelle Idee besteht in der Projektion der jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Welche zusätzlichen Größe(n) müssen bei dieser Vorgehensweise zusätzlich spezifiziert werden? Welche Vereinfachung wird in einem solchen Modell getroffen?
- (ii) [12 Punkte] Als Rechenbeispiel stellen Sie dar, wie der Spread sich in einem Pfad eines solchen Szenarios berechnet. Zeigen Sie dies am Beispiel einer heute 10-jährigen Anleihe ohne Kuponzahlung zum Projektionszeitpunkt  $t=4$  auf einem Pfad, auf dem sich eine jährliche Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,5% realisiert hat. Dabei habe die äquivalente risikofreie Nullkuponanleihe auf diesem Pfad in  $t = 4$  einen Preis von 98,22 € bei einem Nominalwert von 100 €. Außerdem sei der erwartete Zahlungsausfall bei Ausfall des Emittenten 60% des Nominals. Gehen Sie davon aus, dass die Anleihe zum Zeitpunkt  $t=4$  noch nicht ausgefallen ist und dass bei einem Ausfall die Recovery-Zahlung zur Fälligkeit in  $t = 10$  gezahlt wird.
- Hinweis:* Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf die 4. Nachkommastelle.

*Lösungsskizze:*

Die Ermittlung der Eigenmittel ist eine Bewertungsfrage, sodass im Szenariogenerator risikoneutrale Szenarien erzeugt werden müssen.

- (a) *Zinsmodell:* Ein geeigneter Ausgangspunkt der Zinsmodellierung ist der Short-Rate-Prozess  $(r_t)_{t \geq 0}$ . Die Bedingung des langfristigen Mittelwertes wird durch einen *Mean-Reversion-Effekt* abgebildet. Die Annahme konstanter Volatilität grenzt das Modell auf einen (verallgemeinerten) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für die Short Rate ein (z. B. Vasicek-Modell oder Hull-White-Modell), dessen allgemeine Form mit Konstanten  $\alpha, \sigma > 0$  und einer deterministischen Funktion  $t \rightarrow \theta_t$  der Zeit

$$dr_t = \alpha(\theta_t - r_t) dt + \sigma dW_t$$

lautet. Treiber des Zufalls ist ein Wiener-Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  unter dem geeignet zu kalibrierenden risikoneutralen Maß. Hierbei sind  $\theta_t$  der zeitabhängige Mean-Reversion-Level und  $\alpha$  die Geschwindigkeit der Annäherung an  $\theta_t$  bzw. die Stärke des Konvergenzterms im Vergleich zum diffusiven Term. Die Stärke des diffusiven Terms wird durch den Volatilitätsparameter  $\sigma$  bestimmt.

- (b) *Aktienmodell:*

- (i) Eine Geometrische Brownsche Bewegung  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , ist ein lognormales Modell. Daher ist die Betrachtung von Log>Returns angemessen:

$$\text{LogRet}(t) = \ln\left(\frac{S(t + \Delta)}{S(t)}\right).$$

Alternative wäre eine Parametrisierung durch shifted Log>Returns

$$\text{Shifted LogRet}(t) = \ln\left(\frac{S(t + \Delta) + \delta}{S(t) + \delta}\right)$$

denkbar. Da dies aber zu negativen Aktienwerten (bei positivem Shift) oder einer unteren Grenze für Aktienwerte oberhalb von Null (negativer Shift) führen würde, ist eine solche Parametrisierung nicht angemessen. Parametrisierungen als (shifted) Returns oder Differenzen sind in einem lognormalen Modell nicht geeignet, da zusätzliches Logarithmieren notwendig wäre.

- (ii) Eine Kalibrierung des Drifts ist im risikoneutralen Kontext nicht möglich, da der Drift des Aktienmodells nicht frei gewählt werden kann. Er ist durch die Forderung nach Arbitragefreiheit an die mittlere Zinsentwicklung gekoppelt.

Für die Kalibrierung der Volatilität wird im risikoneutralen Kontext üblicherweise nicht die historische Aktienvolatilität genutzt, sondern die implizite



Volatilität von Aktienoptionen. Diese stellt das aktuell erwartete Level von Fluktuationen dar, welches insbesondere für die Bewertung im aktuellen Marktumfeld maßgeblich ist.

(c) *Spreadmodell:*

- (i) Als zusätzliche Größe muss noch eine Recovery-Rate definiert werden, die den erwarteten Anteil des Nominals bestimmt, der bei Ausfall noch zurückgezahlt wird. Die Vereinfachung des Modells besteht darin, dass Ratingmigrationen in einem solchen einfachen Modell ausgeschlossen sind.
- (ii) Im Rechenbeispiel beträgt zum Projektionszeitpunkt die Laufzeit der Anleihe noch 6 Jahre. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit über die Restlaufzeit gegeben als

$$p_6^{\text{surv}} = (1 - 0,015)^6 = 0,9133,$$

die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt  $p_6^{\text{default}} = 1 - p_6^{\text{surv}} = 0,0867$ . Aus den gegebenen Größen errechnet sich so der Preis der Anleihe zum Projektionszeitpunkt pro 100 € Nominal als

$$P = 98,22 \cdot (0,9133 + 0,4 \cdot 0,0867) = 93,11.$$

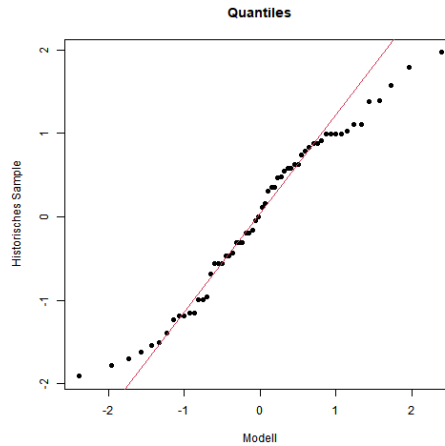
Mit dem Zins der Nullkuponanleihe von  $r_6(4) = 0,9822^{-1/6} - 1 = 0,3\%$  folgt der Spread aus der allgemeinen Formel  $P = (1 + r_T + \text{spread}_T)^{-T}$  als

$$\text{spread}_6(4) = 0,0090.$$

Der Spread in diesem Pfad beträgt also 90 bp.

**Aufgabe 5. [ESG – Validierung] [30 Punkte]**

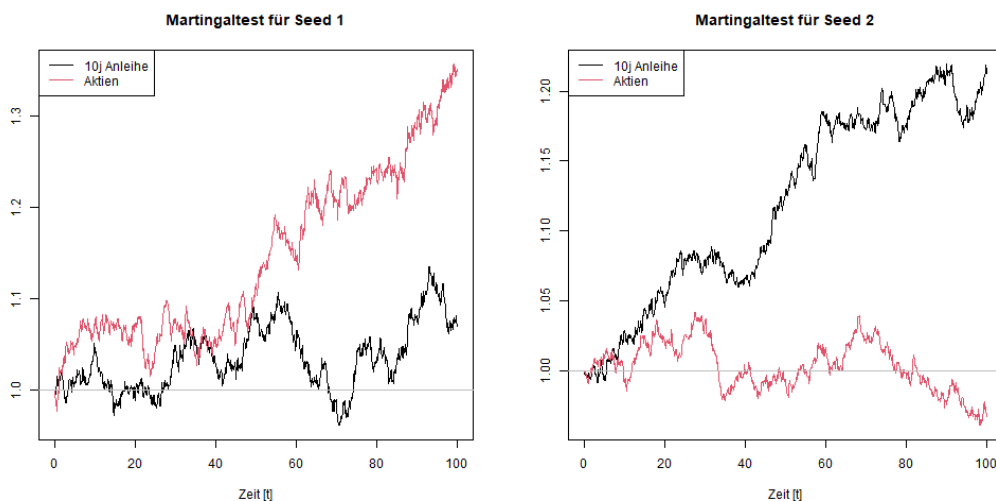
(a) [8 Punkte] Im Validierungsbericht eines Szenarios finden Sie folgende Graphik:



(i) [3 Punkte] Beschreiben Sie zunächst, um was für eine Darstellung es sich hierbei handelt und wie die x- und y-Koordinaten bestimmt werden. Erklären Sie, warum derartige Graphiken in der Validierung von Szenarien hilfreich sind.

(ii) [5 Punkte] Analysieren Sie im Folgenden den dargestellten Plot und beurteilen Sie die Angemessenheit der Simulation. Unterscheiden Sie dabei drei verschiedene Bereiche des Plots und diskutieren Sie Ihre Beobachtungen und Schlussfolgerungen separat. Nehmen Sie dabei insbesondere die Risikoperspektive ein.

(b) [12 Punkte] Die beiden folgenden Graphiken stellen die Ergebnisse des Martingaltests für einen 10-jährigen Bond und einen Aktienrisikofaktor für zwei verschiedene Seeds in der Monte-Carlo-Simulation dar.





- (i) [4 Punkte] Erläutern Sie allgemein die Zielsetzung und die Funktionsweise eines Martingaltests.
  - (ii) [3 Punkte] Erläutern Sie, warum verschiedene Seeds zu unterschiedlichen Ergebnissen des Martingaltests führen können, und schlagen Sie Maßnahmen vor, die diesen Effekt reduzieren können.
  - (iii) [5 Punkte] Beschreiben und diskutieren Sie die beiden oben dargestellten Ergebnisse. Wägen Sie ab, unter welchen Bedingungen Sie den einen oder den anderen Seed bevorzugen würden.
- (c) [10 Punkte] Der Martingaltest für Zinsen kann unter anderem auf einem sogenannten *Constant Maturity Fund* durchgeführt werden. Dieser besteht aus Nullkuponanleihen einer spezifischen Laufzeit, die sich im Zeitverlauf nicht verändert. Zum Ende jeder Periode muss dementsprechend ein Rebalancing vorgenommen werden, das die Alterung der Anleihen berücksichtigt und die Fondslaufzeit konstant hält.
- (i) [6 Punkte] Gehen Sie von einem Anfangsinvestment  $N$  und einer Laufzeit von 10 Jahren aus. Bestimmen Sie die Wertentwicklung des Fonds über die ersten 3 Simulationsperioden.
  - (ii) [4 Punkte] Folgern Sie aus der vorangegangenen Betrachtung die mathematische Bedingung des entsprechenden Martingaltests bezüglich des Startpunkts der Simulation.

*Lösungsskizze:*

(a) *QQ-Plot:*

- (i) Die Graphik stellt einen QQ-Plot dar, in dem die theoretischen Quantile den empirischen Quantilen gegenübergestellt werden. Auf der y-Achse sind dabei die Sampledaten, also die Beobachtungen, aufgetragen. Aus diesen werden die empirischen Quantile berechnet. Auf der x-Achse sind dann die entsprechenden Quantilswerte der modellierten Verteilung aufgetragen.

In der Validierung von real-world Szenarien werden damit die Verteilungseigenschaften der historischen Beobachtung und der Realisierung des Modells verglichen und lokale Abweichungen dargestellt.

- (ii) Der QQ-Plot wird üblicherweise in drei Zonen unterteilt: oberer Tail, unterer Tail und Bulk. Im Bulk der Verteilung (hier etwa zwischen -1 und 1) ist die empirische Verteilung der modellierten Verteilung sehr ähnlich, was für einen guten Fit spricht. In den Tails der Verteilung ist die modellierte





Verteilung breiter als die beobachtete, da die Punkte auf der x-Achse weiter weg vom Mittelwert liegen als auf der y-Achse. Damit überschätzt das Modell die beobachtete Verteilung in beiden Tails, was für eine Risikomesung unabhängig vom Risikoexposure (auf- oder abwärts) ein konservatives Modell bedeutet.

(b) *Martingaltest:*

- (i) Der Martingaltest prüft im risikoneutralen Kontext auf Ebene eines simulierten Szenarios das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Formal wird hierzu für das zugrunde liegende Finanzinstrument mit Preisprozess  $(P_t)_{t \geq 0}$  und einen Numéraire  $(B_t)_{t \geq 0}$  (z. B. Geldmarktfonds) in jedem Zeitpunkt  $t$  die für die Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\mathbb{E} \left[ \frac{P_t}{B_t} \right] = \frac{P_0}{B_0} \iff 1 = \frac{B_0}{P_0} \mathbb{E} \left[ \frac{P_t}{B_t} \right]$$

geprüft. Der Erwartungswert bezieht sich dabei auf das risikoneutrale Maß bzw. Martingalmaß und wird als Mittelwert aus dem per Monte-Carlo-Simulation erzeugten Szenario ermittelt.

Der Martingaltest ist erfüllt, wenn die aus der Simulation geschätzten Werte  $\frac{B_0}{P_0} \mathbb{E} \left[ \frac{P_t}{B_t} \right]$  „hinreichend nahe“ bei 1 liegen.

- (ii) Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt und liefert bei einer endlichen Anzahl von Pfaden grundsätzlich nur eine Approximation des Erwartungswerts und damit der gewünschten Martingaleigenschaft. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen.

Verschiedene Seeds bedeuten, dass der deterministische Algorithmus, der zur Erzeugung der Pseudozufallszahlen genutzt wird, unterschiedlich initialisiert wird. Daher ist die Folge der Zufallszahlen, die generiert wird, anders, was zu einer unterschiedlichen Realisierung der simulierten Größen auf den einzelnen Pfaden führt. Aufgrund der begrenzten Anzahl der Realisierungen folgen daraus unter anderem unterschiedliche (diskontierte) Mittelwerte und dementsprechend unterschiedliche Ergebnisse im Martingaltest.

Eine Erhöhung der Pfadanzahl führt zu einem geringeren Einfluss des Monte-Carlo-Fehlers; dies ist allerdings aufgrund begrenzter Ressourcen nicht immer möglich. Hilfreich sind in diesem Fall Maßnahmen zur Varianzreduktion wie zum Beispiel die Nutzung antithetischer Zufallszahlen oder (falls möglich) von Kontrollvariablen.



- (iii) Für Seed 1 ist die Anleihe etwa beim optimalen Wert von 1; die Martingaleigenschaft kann als erfüllt gelten. Für den Aktienwert hingegen ist eine systematische positive Abweichung zu erkennen, die über 130% erreicht. Für Seed 2 schwankt der Aktienrisikofaktor hingegen eng um den optimalen Wert, allerdings ist die Abweichung der 10-jährige Anleihe hier recht hoch.

Das erste Szenario kann genutzt werden, falls zum Beispiel das Exposure hinsichtlich dem Aktienrisikofaktor relativ klein ist, und eine Abweichung vom Erwartungswert entsprechend wenig Einfluss auf die Bewertung nimmt. Für das zweite Szenario spricht die fast optimale Evolution der Aktien, allerdings sind die steigenden Anleihenwerte ein relativ großes Problem. Für kurze Zeithorizonte und kurzlaufende Verbindlichkeiten kann der Szenariensatz zu Seed 2 möglicherweise noch verwendbar sein. Es bleibt aber zu beachten, dass aufgrund der hohen Korrelation zwischen Zinsen unterschiedlicher Laufzeit auch kurzfristige Zinsen und insbesondere der Diskontfaktor selbst einen schlechten Martingaltest zeigen können. Weitere Tests wären in diesem Fall notwendig.

- (c) (i) Es bezeichne  $ZCB_T(t)$  den Wert eines Zerocouponbonds mit Laufzeit  $T$  zum Projektionszeitpunkt  $t$ . Ferner seien für die Perioden  $t = 1, 2, 3$  der Zeitpunkt  $t - 1$  der Beginn der Periode (BoP) sowie  $t$  der Zeitpunkt des Periodenendes (EoP). Die Wertentwicklung lässt sich in folgender Tabelle darstellen:

Periode	Wert BoP	Investment	Anzahl	Wert EoP
1	$N$	$ZCB_{10}(0)$	$N/ZCB_{10}(0)$	$N \frac{ZCB_9(1)}{ZCB_{10}(0)}$
2	$N \frac{ZCB_9(1)}{ZCB_{10}(0)}$	$ZCB_{10}(1)$	$N \frac{ZCB_9(1)}{ZCB_{10}(0)ZCB_{10}(1)}$	$N \frac{ZCB_9(1)ZCB_9(2)}{ZCB_{10}(0)ZCB_{10}(1)}$
3	$N \prod_{j=0}^1 \frac{ZCB_9(i+1)}{ZCB_{10}(i)}$	$ZCB_{10}(2)$	$\frac{N}{ZCB_{10}(2)} \prod_{j=0}^1 \frac{ZCB_9(i+1)}{ZCB_{10}(i)}$	$N \prod_{j=0}^2 \frac{ZCB_9(i+1)}{ZCB_{10}(i)}$

- (ii) Der Constant Maturity Funds erwirtschaftet im Mittel den risikoneutralen Return, folglich muss der diskontierte Fondwert dem Ausgangsinvestment entsprechen, also

$$\mathbb{E} \left[ \text{Disc}(t) \cdot N \prod_{j=0}^{t-1} \frac{ZCB_9(j+1)}{ZCB_{10}(j)} \right] = N.$$

wobei  $\text{Disc}(t)$  den Diskontfaktor zum Projektionszeitpunkt  $t$  bezeichnet.

**Aufgabe 6.** [Projektion von Kapitalanlagen] [20 Punkte]

Sie projizieren im Rahmen einer ALM-Studie Ihren aktuellen Kapitalanlagebestand 3 Jahre in die Zukunft. Ihre Kapitalanlage besteht aus einer festverzinslichen Unternehmensanleihe im Anlagevermögen (jährliche Kuponzahlung) und einer Aktie im Umlaufvermögen. Der aktuelle Marktwert der Aktie liegt bei 1.000, ihre Anschaffungskosten lagen bei 900. Zusätzlich zur Kursentwicklung unterstellen Sie eine jährliche Dividendenrendite in Höhe von 2% vom Buchwert. Die zum Risikoprofil Ihrer Anleihe passende Zinsstrukturkurve modellieren Sie flach über die gesamte Laufzeit. Aus dem Aktuariat wird Ihnen mitgeteilt, dass über die nächsten 10 Jahre mit einer konstanten Rückstellung und einer Rechnungszinsanforderung von 2% gerechnet wird. Das Eigenkapital beträgt aktuell 500.

Eine Projektion der festverzinslichen Anleihe haben Sie für den Zinssatz der flachen Zinskurve in Höhe von 1,0% bereits erstellt.

T	0	1	2	3
<b>Nominalwert</b>	1.000	1.000	1.000	1.000
<b>Restlaufzeit</b>	10	9	8	7
<b>Marktwert</b>	1.000	1.000	1.000	1.000
<b>Buchwert</b>	1.000	1.000	1.000	1.000

Folgendes Szenario soll nun analysiert werden:

T	0	1	2	3
<b>Zinssatz bei Parallelshift der flachen Zinskurve</b>	1,0%	2,0%	-0,5%	0,0%
<b>Modified Duration der Anleihe</b>	9,47	8,46	7,79	6,80
<b>Aktienrendite</b>	-	5,0%	-20,0%	10,0%

- (a) [10 Punkte] Erstellen Sie unter Zuhilfenahme der oben gegebenen Informationen für die Jahre  $T = 1$  bis  $T = 3$  eine Projektion der Aktiva, der Passiva und der GuV nach dem folgenden Schema.

T	0	1	2	3
<b>Aktiva</b>				
Marktwert Renten				
Buchwert Renten				
Marktwert Aktien				
Buchwert Aktien				
<b>Passiva</b>				
Rückstellung				
Eigenkapital				
<b>GuV</b>				
Kapitalerträge	-			
- davon ordentliche Kapitalerträge	-			
- davon außerordentliche Kapitalerträge	-			
Rechnungszinsanforderung	-			
Jahresergebnis	-			

*Hinweis:* Der Marktwert der festverzinslichen Anleihe ist mithilfe der Zinssensitivität näherungsweise fortzuschreiben. Zins- und Aktienerträge fließen zum 31.12. eines jeden Jahres zu.



- (b) [3 Punkte] Ihr Vorgesetzter wundert sich, dass Ihre Prognose einen aktuellen Marktwert in  $T = 0$  für die Anleihe ausweist, der nicht mit dem tatsächlichen Marktwert in  $T = 0$  übereinstimmt. Erklären Sie ihm, warum dies der Fall ist und zeigen Sie ihm eine Möglichkeit auf, wie Sie darauf reagieren könnten. Warum unterscheidet sich in  $T = 0$  der tatsächliche Aktienwert nicht vom Modellwert?
- (c) [4 Punkte] Ein Kollege aus dem Kapitalanlagemanagement weist Sie darauf hin, dass die Abteilung die Vorgabe hat, Anleihen zum Jahreswechsel zu verkaufen, wenn der Zins unter 0% gefallen ist und erst wieder in festverzinsliche Wertpapiere zu investieren, sobald wieder mindestens 1% Rendite erwartet wird. Wie passen Sie Ihre Modellierung unter (a) auf diese Information an?

*Hinweis:* Unterstellen Sie einen Guthabenzins von 0% auf die Kasse.

- (d) [1 Punkt] Wie könnten Sie die aktuelle Managementregel anpassen, sodass große Kassapositionen vermieden werden und Sie auch in Szenarien mit weiter fallenden Zinsen profitieren können, bei einem Zinsanstieg aber dennoch etwas abgesichert sind? (Ohne Rechnung)
- (e) [2 Punkte] Wie können Sie in Ihrem Modell berücksichtigen, dass sich die Kreditqualität Ihrer Anleihe ändern kann und was wären die Auswirkungen auf Ihren Jahresüberschuss und Ihre Aktiva? (Ohne Rechnung)

*Lösungsskizze:*

- (a) Projektion der Aktiva, Passiva und der GuV:

T	0	1	2	3
<b>Aktiva</b>				
Marktwert Renten	1.000	905	1.097	1.054
Buchwert Renten	1.000	1.000	1.000	1.000
Marktwert Aktien	1.000	1.050	840	924
Buchwert Aktien	900	900	840	900
<b>Passiva</b>				
Rückstellung	1.400	1.400	1.400	1.400
Eigenkapital	500	500	440	500
<b>GuV</b>				
Kapitalerträge	-	28	-33	88
- davon ordentliche Kapitalerträge	-	28	27	28
- davon außerordentliche Kapitalerträge	-	-	-60	60
Rechnungszinsanforderung	-	28	28	28
Jahresergebnis	-	-	-61	60

- (b) In der Prognoserechnung wird der Marktwert der Anleihe mithilfe der modellierten Zins- und Spreadentwicklung ermittelt, diese weicht in aller Regel von am Kapitalmarkt beobachteten Zinsen und Spreads ab. Es ergibt sich im Modell durch Diskontierung ein anderer Wert als der am Markt gehandelte. (Weiter werden zur Modellierung meist vereinfachte Annahmen getroffen, wie



zum Beispiel pauschale Kupontermine und Fälligkeitstermine oder eine andere Day-Count-Convention,...). Bei Aktien ist dies nicht der Fall, da hier der aktuell beobachtete Preis fortgeschrieben wird und nicht modellintern ermittelt wird (ginge aber natürlich ebenfalls wenn Bewertungsmodelle, wie beispielsweise das Discounted Cashflow Modell angewandt würden).

(c) Projektion der Aktiva, Passiva und der GuV:

<b>T</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>Aktiva</b>				
Marktwert Renten	1.000	904	1.097	1.097
Buchwert Renten	1.000	1.000	1.097	1.097
Marktwert Aktien	1.000	1.050	840	924
Buchwert Aktien	900	900	840	900
<b>Passiva</b>				
Rückstellung	1.400	1.400	1.400	1.400
Eigenkapital	500	500	537	597
<b>GuV</b>				
Kapitalerträge	-	28	64	78
- davon ordentliche Kapitalerträge	-	28	27	18
- davon außerordentliche Kapitalerträge	-	-	37	60
Rechnungszinsanforderung	-	28	28	28
Jahresergebnis	-	-	36	50

- (d) Anstatt die Anleihe zu verkaufen, wenn der Zins unter ein gewisses Niveau gesunken ist und anschließend wieder zu kaufen, könnte die Duration mit sinkendem Zins abgebaut und bei steigendem Zins wieder aufgebaut werden.
- (e) Durch eine Migrationsmatrix können Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Kreditqualitätsklassen modelliert werden. Migriert die Anleihe zwischen zwei Zeitschritten in eine höhere Kreditqualitätsklasse / in eine niedrigere Kreditqualitätsklasse, erhält sie einen Spreadabschlag / einen Spreadaufschlag. Der Marktwert der Anleihe steigt / fällt zusätzlich zur regulären Reaktion auf die modellierte Zinsbewegung. Es kann zu außerordentlichen Kapitalerträgen durch eine Abschreibung kommen, das Jahresergebnis sinkt. Zuschreibungen würden im konkreten Beispiel aufgrund der gewählten Bilanzierung im Anlagevermögen nur nach vorangegangener Abschreibung vorkommen.

**Aufgabe 7.** [*Investmentrisiken unter Solvency II*] [16 Punkte]

- (a) [10 Punkte] Sie besuchen einen Vortrag zu Solvency II. Der Referent trifft die Aussage, dass die Eigenmittelunterlegung für europäische Aktien 39% ihres Marktwertes beträgt.

Nennen und erläutern Sie 3 Gründe, warum diese Aussage stark vereinfacht ist. Erläutern Sie dabei auch, inwieweit bei den von Ihnen angeführten Gründen Unterschiede zwischen Lebens- und Sachversicherern existieren, die Effekte über die Zeit konstant sind und/oder von der spezifischen Ausgangssituation des einzelnen Unternehmens abhängen können.

- (b) [6 Punkte] Die EIOPA hat im Dezember 2020 ihre Vorschläge zur Anpassung des Solvency II Standardmodells veröffentlicht (Solvency II Review). Darin finden sich u. a. folgende 3 Vorschläge:

1. Ableitung der risikofreien Zinskurve, die im Vergleich zum bisherigen Verfahren jenseits des Last Liquid Points zu niedrigeren Zinssätzen führt
2. Änderung der Berechnung des Zinsstresses: Bei einer Zinssenkung werden negative Zinsen gestresst, die Verschiebung der Kurve ist auch bei positiven Zinsen ausgeprägter.
3. Senkung der Korrelation zwischen dem Zinssenkungsrisiko und dem Aktienrisiko von 0,5 auf 0,25

Erläutern Sie, wie sich diese Änderungen jeweils ceteris paribus auf die Kapitalanlage eines Lebensversicherers auswirken können.

*Lösungsskizze:*

- (a) *Gründe und Erläuterungen:*

1. Der Faktor 39% stellt nur den Basisstress für Aktien aus OECD-Ländern dar. Dieser wird an jedem Stichtag additiv um den symmetrischen Anpassungsfaktor korrigiert. Die Berechnung des symmetrischen Anpassungsfaktors basiert auf dem Vergleich des Aktienmarktniveaus am Stichtag mit dem Durchschnittsniveau der letzten 3 Jahre. Übertrifft das aktuelle Niveau den Durchschnitt um einen bestimmten Prozentsatz, erfolgt eine Erhöhung des Stressfaktors et vice versa. Die Anpassung ist auf +/-10%-Punkte begrenzt. Der Stressfaktor ändert sich im Zeitablauf, ist aber für alle Unternehmen gleich.
2. Die SCR-Anforderung folgt nicht unmittelbar aus dem Stressfaktor, sondern aus der durch den Stress ausgelösten Verringerung der Eigenmittel. Zur Ermittlung ist ausgehend von den gestressten Assets eine Neuberechnung der kompletten Solvency II Bilanz notwendig. Nach einem Stress

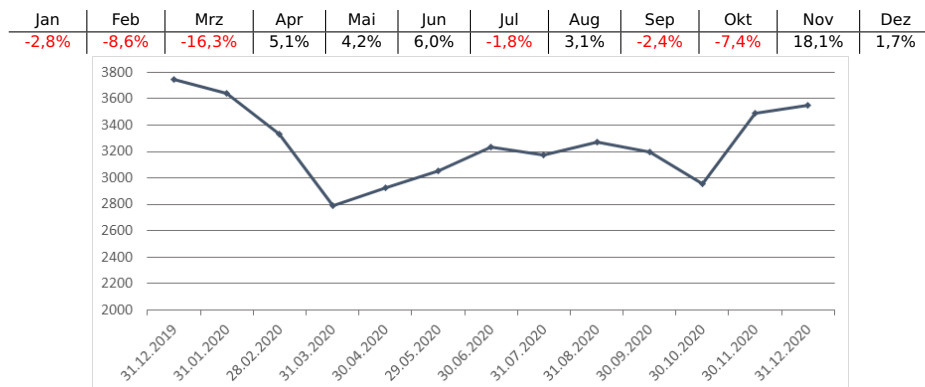


- verringert sich bei Lebensversicherern die zukünftige Überschussbeteiligung, d. h. die Versicherungsnehmer tragen einen Teil des Verlusts, wodurch der Eigenmittelrückgang geringer ausfällt als die durch den Stress implizierte Marktwertänderung der Aktien. Dieser Risikominderungseffekt schwankt im Zeitablauf und unterscheidet sich zwischen den Unternehmen. Bei Sachversicherern existiert dieser Effekt hingegen nicht.
3. Die Aktien werden zunächst separat gestresst und ein separater Eigenmittelrückgang ermittelt. Die tatsächliche Eigenmittelunterlegung ergibt sich jedoch erst nach der Korrelation mit im 1. Schritt den anderen einzelnen Marktpreisrisiken und im 2. Schritt (aggregiert) mit den versicherungstechnischen Risiken. Die Korrelation zwischen Aktienrisiko und Zinsrisiko hängt davon ab, ob der Zinsanstieg oder die Zinssenkung das dominante Risiko darstellt. Da die Diversifikationseffekte weiterhin auch vom Gewicht der einzelnen Risiken abhängen, variieren sie über die Zeit und zwischen den einzelnen Unternehmen.
- (b)
1. Durch die Senkung der risikofreien Zinskurve steigt der Marktwert der versicherungstechnischen Rückstellungen und damit sinken die Eigenmittel in der SII Ausgangsbilanz. Damit kann ein LVU potentiell weniger Marktrisiken eingehen.
  2. Die Veränderungen des Zinssenkungsstress erhöhen (sofern die Zinssenkung das dominante Risiko darstellt) das *SCR Zins* deutlich. Damit erhöht sich der Druck, den Gap zwischen der marktwertgewichteten Duration der Aktivseite und der Passivseite zu verringern sowie unter Umständen andere Marktrisiken zu reduzieren.
  3. Die Senkung des Korrelationskoeffizienten verstärkt die Diversifikationseffekte zwischen dem Zinssenkungsrisiko und dem Aktienrisiko, was die Möglichkeiten zum Eingehen von Marktrisiken erhöht.



**Aufgabe 8.** [Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [24 Punkte]

- (a) [4 Punkte] Das Bundesfinanzministerium hat festgelegt, dass der Höchstrechnungszins zum 1. Januar 2022 auf 0,25% gesenkt wird. Welche Auswirkung erwarten Sie aus dieser Änderung für das Neugeschäft von statischen Hybridprodukten mit Bruttobeitragsgarantie? In welche Richtung dürfte die Produktgestaltung sich verändern? Begründen Sie Ihre Einschätzung anhand der Funktionsweise dieser Produkte.
- (b) [5 Punkte] Ein dynamisches Zweitopf-Hybrid investiert in einen Garantiefonds mit monatlicher Wertuntergrenze von 80%. Das riskante Asset des Fonds besitzt einen maximalen Overnight Verlust von 20%. Am 1. April und am 1. Mai hatten die Fonds exakt den gleichen Marktwert von 100 Euro. Am 20. Mai stellt der Versicherungsnehmer fest, dass der Marktwert des Fonds 95 Euro beträgt. Er ist zwar mit der Performance nicht zufrieden, freut sich aber, dass sein Gap-Risiko wenigstens niedriger ist als am 20. April, was ihn besser schlafen lässt. Der Wert des Fonds betrug am 20. April 85 Euro.  
Beurteilen Sie die Einschätzung des Versicherungsnehmers.
- (c) [5 Punkte] Die folgende Grafik zeigt die Entwicklung des EuroStoxx 50 im Corona-Jahr 2020.



Erläutern und begründen Sie, zu welchen Ergebnissen die 3 in Deutschland dominierenden Konzepte zur Ermittlung der Basisindexrendite im Rahmen von Indexpolice im Jahr 2020 für einen Versicherungsnehmer geführt hätten.

*Hinweis:* Es werden keine exakten Berechnungen erwartet, sondern nur soweit wie für Ihre Begründung notwendig.

- (d) [10 Punkte] (Variable Annuities)
- (i) [8 Punkte] Erläutern Sie die Grundidee von Variable Annuities. Gehen Sie dabei auch darauf ein, wie die Garantien in diesen Produkten dargestellt und gesteuert werden.
- (ii) [2 Punkte] Welches ist das zentrale Problem, diese Produkte aus Deutschland heraus anbieten zu können?





*Lösungsskizze:*

(a) Die Senkung des Höchstrechnungszinses erhöht den bilanziellen Wert der Garantien. Bei statischen Hybridprodukten wird die Garantie vollständig über das konventionelle SV abgebildet. D. h. es wird gerade so viel der Sparbeiträge in das konventionelle SV investiert, dass bei Ablauf die garantierte Leistung vorliegt. Unter Berücksichtigung der Kosten-/Risikobeiträge verbleiben bei statischen Hybridprodukten mit Bruttobeitragsgarantien bei dem neuen Höchstrechnungszins kaum Mittel für die Anlage in die Fonds. Die Produkte dürften daher nur mit reduzierten Garantien weiter angeboten werden.

(b) *Berechnungen:*

- max. Overnight Verlust von 20%  $\Rightarrow$  Multiplikator = 5
- Allokation des Garantiefonds am 20. Mai (Cushion = 15)
  - riskantes Asset:  $5 \cdot 15 = 75$  Euro
  - risikofreies Asset:  $95 - 75 = 20$  Euro
- Allokation des Garantiefonds am 20. April (Cushion = 5)
  - riskantes Asset:  $5 \cdot 5 = 25$  Euro
  - risikofreies Asset:  $85 - 25 = 60$  Euro

Der Versicherungsnehmer (VN) irrt sich gleich zweifach. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gap-Event auftritt, ist an beiden Tagen gleich. Aufgrund der höheren Allokation in das riskante Asset würde eine Unterschreitung der Wertuntergrenze am 20. Mai jedoch höher ausfallen. Allerdings muss das Gap-Risiko den VN nicht beunruhigen, da er dieses nicht trägt.

(c) Die gewählte Variante zur Berechnung der Basisindexrendite wäre im Jahr 2020 ohne Bedeutung für den VN gewesen, da alle 3 marktüblichen Vorgehensweisen zunächst eine negative Rendite bzw. für den VN eine maßgebliche Rendite von null ergeben:

$I_t$  = Indexwert am Ende des Monats  $t$

1. Jahresrendite:  $\frac{I_{12}}{I_0} - 1 < 0$

2. Rendite auf Basis des Durchschnittswerts des Index:  $\frac{I_{\text{avg}}}{I_0} - 1 < 0$

Alle Monatsendwerte sind niedriger als der Wert des Index am 31.12.2019.



3. Summe der Monatsrenditen mit Cap positiver Renditen:

$$\sum_{t=1}^{12} \min \left\{ \text{Cap}; \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right\}$$

6 Monate weisen eine negative Rendite auf, deren Summe -39,3% beträgt. Selbst wenn die Summe der übrigen 6 Monatsrenditen  $> +39,3\%$  wäre, würde aufgrund der möglichen Höhe der Caps keine positive Basisindexrendite mehr erreichbar sein.

- (d) (i) • Explizite Trennung der Kapitalanlage über Fonds und Darstellung der Garantie.
- Der VN kann hierdurch grundsätzlich seine Fonds frei wählen.
  - Er zahlt eine explizite, transparente Gebühr für die Garantie.
  - Die Garantie wird separat mit eigens hierfür erworbenen Finanzinstrumenten (insb. Optionen, Futures, Swaps, Swaptions) direkt am Kapitalmarkt abgesichert (= Hedgeportfolio).
  - Die Darstellung der Garantie benötigt daher nicht das konventionelle Sicherungsvermögen.
  - Grundprinzip der Umsetzung der Garantie ist das dynamische Hedging, das eine kontinuierliche Anpassung der zur Absicherung erworbenen Finanzinstrumente nach folgendem Prinzip beschreibt:
    - Im Zeitpunkt  $t$  muss der Barwert der Garantie dem Marktwert des Hedgeportfolios entsprechen.
    - Im Rahmen der Veränderung der Marktparameter zwischen  $t$  und  $t + 1$  müssen beide Bar-/Marktwerte in gleicher Weise darauf reagieren.
    - In  $t+1$  muss das Hedgeportfolio derart angepasst werden, dass beim Übergang auf  $t+2$  beide „Portfolien“ gleiche Wertveränderungen zeigen.
    - Die Sensitivität gegenüber den Marktparametern wird durch die Greeks gesteuert.
- (ii) Die Vorschriften zur bilanziellen Abbildung von Garantien in Deutschland verhindern dies faktisch. Für die Bedeckung der aus den Garantien resultierenden versicherungstechnischen Verbindlichkeiten müssten die Marktwerte der Derivate des Hedgeportfolios angerechnet werden dürfen, d. h. eine Art Bewertungseinheit zwischen Aktiv- und Passivseite gebildet werden.