DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Variante A

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Mai 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- **Die Aufgaben dieser Klausur sind randomisiert, d.h. es gibt unterschiedliche Klausurvarianten.**

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 [30 Punkte]

(a) Für GLMs werden Verteilungen zugrunde gelegt, die zur Exponentialfamilie gehören. Dichten solcher Verteilungen genügen der allgemeinen Form

$$f(x,\vartheta,\varphi) = C(x,\varphi)\exp\left(\frac{x\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)}\right).$$

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Invers-Gauss-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

zur Exponentialfamilie gehört. [10 Punkte]

(ii) Leiten Sie für die Invers-Gauss-Verteilung aus den Bestimmungen zu den Funktionen b und a Erwartungswert und Varianz sowie die kanonische Link-Funktion her. [10 Punkte]

(b) Die Log-Normalverteilung hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \exp(\mu+\sigma^2/2)$ und Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2(\exp(\sigma^2)-1).$$

Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) allgemein berechnen. Jemand behauptet mit folgenden Definitionen die Zugehörigkeit der Log-Normal-Verteilung zur Exponentialfamilie nachgewiesen zu haben:

$$\vartheta = \mu, \quad b(\vartheta) = \exp(\sigma^2/2)\exp(\vartheta) \quad \text{und} \quad a(\varphi) = \exp(\sigma^2)-1.$$

Damit würde die Funktion b bei Ableitungen unverändert reproduziert werden, d.h. die allgemeinen Darstellungen für Erwartungswert und Varianz sind gegeben und also der Beweis der Zugehörigkeit erbracht. Wie bewerten Sie diese Überlegung? Sehen Sie ggf. eine geeignete Transformation? Begründen Sie Ihre Sichtweise mathematisch. [10 Punkte]

Aufgabe 2 [25 Punkte]

In einem Bonus-Malus-System rückt man mit jedem schadenfreien Jahr eine Schadenfreiheitsklasse auf und sowohl Schadenbedarf als auch Beitrag reduzieren sich tendenziell. Ereignet sich ein Schaden wird dieses Risiko in der Folgeperiode zurückgestuft und aufgrund eines zu erwartenden höheren Schadenbedarfs wird ein deutlich höherer Beitrag erhoben.

(a) Nehmen Sie an, dass Sie in einem Unternehmen für die Erstellung der Daten zur Lieferung an den GDV zuständig sind und im Rahmen der Datenprüfung folgende Tabelle zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.200
2	900
3	850
4	860
5	800
6	780

Wie sehen Sie die Datenqualität? Haben Sie mit Blick auf die eingangs beschriebene Mechanik der Wanderung in einem Bonus-Malus-System eine mögliche Erklärung? Würde sich Ihre Bewertung der Datenqualität ändern, wenn Sie zusätzlich die Information hätten, dass in der SF-Klasse 4 eher geringe Bestände vorhanden sind? [10 Punkte]

(b) Für die Datenlieferung an den GDV werden die Daten i.d.R. nach mehr schadenfreien Jahren aufgeschlüsselt abgefragt als es der aktuellen GDV-Empfehlung entspricht. Nicht alle Versicherer folgen dieser Anforderung zur Datenaufschlüsselung und liefern nicht mehr SF-Klassen als in der Empfehlung vorhanden. Nehmen Sie an, dass Sie beim GDV für die Datenprüfung der eingegangenen Daten zuständig sind und folgende Tabelle, die auf mehreren Versicherern beruht, zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.200
2	900
3	850
4	800
5	810
6	780

Wie sehen Sie hier die Datenqualität? Haben Sie eine mögliche Erklärung für den Verlauf der Schadenbedarfe, wenn Sie annehmen, dass die GDV-Empfehlung bis vor kurzem bei SF 4 endete? Welche Handlungsoptionen sehen Sie bezüglich der Verwendung dieser Daten? [5 Punkte]

(c) *Bestimmung von Beitragssätzen und deren tarifliche Umsetzung:*
In der nachstehenden Tabelle finden sich Bestandsverteilung und Schadenbedarfe zu einem Bonus-Malus-System.

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	1.000	400	
2	2.000	200	
3	2.000	150	
4	4.000	100	
Gesamt	10.000		

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass der mit den Beständen gewichtete mittlere Beitragssatz 100% ist, die Beitragssätze (ganzzahlig gerundet) zu den einzelnen SF-Klassen.
Nennen Sie Gründe, aus denen so ermittelte Beitragssätze in der Praxis nicht verwendet werden. [10 Punkte]

Aufgabe 3 [25 Punkte]

(a) Der Korrelationskoeffizient ist wie folgt definiert:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Für $X_i \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $Y_i = X_i^2$ (X-Werte gleich oft angenommen) ist dieser null, obwohl ein direkter funktionaler Zusammenhang vorliegt.
Nennen Sie den Grund für dieses Ergebnis. Welche Charakteristika dieser Situation führen zum Resultat null?
Verallgemeinern Sie diese und geben Sie damit ein Beispiel für eine andere Situation mit Korrelationskoeffizient null. [10 Punkte]

(b) Die nachstehende Tabelle beschreibt die Schadenbedarfe bzgl. der Einteilung in Regionalklassen getrennt nach städtischen und ländlichen Gebieten.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250		400	500
Land		200	280	320	

Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass in theoretischer wie praktischer Hinsicht drei verschiedene Konstellationen bzgl. vorhandener Abhängigkeiten inkl. deren praktische Umsetzung im Tarif entstehen.
Wie kann Abhängigkeit bei Schadenbedarfen in einem GLM umgesetzt werden? [15 Punkte]

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 [25 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten pro Ereignis 8.000 xs 2.000, bei dem *keine* Two Risk Warranty vereinbart ist. Zur Tarifierung des Vertragsjahres 2022 liegen Prämien für den Zeitraum 2015–2020, Prämien-Schätzungen für 2021 und 2022 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2015	150.000	100	100
2016	170.000	103	103
2017	180.000	108	105
2018	190.000	110	107
2019	240.000	114	110
2020	270.000	118	115
2021	290.000	120	118
2022	300.000	125	120

Im Beobachtungszeitraum 2015–2020 sind die Schadenereignisse bekannt, die die Meldegrenze von 1.000 überschreiten. Es gab zwei NatCat-Schadenereignisse, bei denen viele Einzelrisiken betroffen waren:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
1	2015	1.500	Flut
2	2018	6.000	Sturm

Ferner haben folgende Einzelschäden die Meldegrenze überschritten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
3	2016	2.000	Feuer
4	2017	2.500	Feuer
5	2020	4.500	Feuer

(a) Berechnen Sie die revalorisierten Prämien 2015–2022 sowie die Summe der revalorisierten Prämien im Beobachtungszeitraum 2015–2020. *[6 Punkte]*

(b) Berechnen Sie die as-if-Schäden für das Quotierungsjahr 2022. Berücksichtigen Sie hierbei die unterschiedliche Charakteristik der Schäden. *[10 Punkte]*

(c) Ist die Schadenmeldegrenze von 1.000 für die Burning Cost-Rechnung ausreichend? *[2 Punkte]*

(d) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Berechnung eines Burning Costs für den Beobachtungszeitraum 2015–2020, der ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden in 2022 ist. Achten Sie hierbei auf konsistente Berücksichtigung der NatCat- und Einzelschäden. *[7 Punkte]*

Aufgabe 5 [30 Punkte]

Wir betrachten ein Feuer-Risiko mit Gesamtversicherungssumme $v = 100.000$. Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligungen an einem gelayerten Programm für dieses Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	10.000	10.000	40%	40
2	30.000	20.000	50%	50
3	50.000	50.000	20%	10

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 20.000 xs 5.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(a) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte c_i^{RV} xs d_i^{RV}, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt. [10 Punkte]

(b) Für eine Exposurequotierung soll die Feuer-Exposurekurve $G(x) = x(2-x)$ verwendet werden. Bestimmen Sie die Schadenhöhenverteilung des betrachteten Risikos mit Versicherungssumme v unter der Annahme, dass die Exposurekurve G angemessen ist. Beurteilen Sie, ob die Annahme plausibel ist. [5 Punkte]

(c) Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 60% und die Exposurekurve G aus (b) – auch falls Sie diese für nicht plausibel halten.

Hierbei können Sie wie folgt vorgehen:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Prämie p_{total} für das komplette Risiko (also für 100% des Risikos mit Versicherungssumme v und einer Priorität von null) kennen.
- Verwenden Sie p_{total} und die Versicherungssumme v um Feuer-Exposurequotierungen für die Layer c_i xs d_i sowie die Layer c_i^{RV} xs d_i^{RV} durchzuführen und berechnen Sie die Verhältnisse

$$\pi_i := \frac{\text{Ergebnis für } c_i^{\mathrm{RV}} \text{ xs } d_i^{\mathrm{RV}}}{\text{Ergebnis für } c_i \text{ xs } d_i}$$

(hier kürzt sich p_{total} raus).

- Das Verhältnis π_i gibt an, welchen Anteil der RV am erwarteten Schaden des EV im Layer c_i xs d_i trägt.

[15 Punkte]

Aufgabe 6 [15 Punkte]

Zur Tarifierung eines pro Risiko-XLs 9.000 xs 1.000 für das Anfalljahr 2022 wurde für den Beobachtungszeitraum 2014 bis 2020 ein Burning Cost von 5% berechnet. Hierbei wurden folgende (indexierte) Schäden verwendet:

Schadennummer	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2015	1.500
2	2016	4.000
3	2016	1.500
4	2018	2.000

Für das Quotierungsjahr 2022 wird ein GNPI von 20.000 prognostiziert. Die Summe der revalorisierten GNPIs für den Beobachtungszeitraum 2014–2020 beträgt 100.000.

Auf Basis dieser Burning Cost-Rechnung sollen kollektive Modelle zur Tarifierung des XLs angepasst werden, wobei für die Schadenzahl eine Poisson-Verteilung und für die Schadenhöhe eine Pareto-Verteilung verwendet werden soll. Dem Pricing-Aktuar ist bekannt, dass für das gedeckte Segment üblicherweise ein Pareto-Alpha von 1,5 passt.

(a) Verwenden Sie alle drei Ansätze aus dem Skript, Abschnitt 5.4, um jeweils ein kollektives Modell anzupassen. Nehmen Sie hierbei für die Ansätze 2 und 3 an, dass der Burning Cost ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden im bestrichenen Layer ist. Zur Schätzung des Pareto-Alphas aus den Daten soll der biaskorrigierte ML-Schätzer verwendet werden. *[12 Punkte]*

(b) Welchen Ansatz würden Sie bei dieser Datenlage wählen (mit *kurzer* Begründung)? *[3 Punkte]*

Hinweis: Falls Sie den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha nicht berechnen können, dann verwenden Sie für Ansatz 1 und 2 ein Pareto-Alpha von 1,2.

Aufgabe 7 [10 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten C xs D. Die Schäden größer D seien durch ein kollektives Modell $\sum_{i=1}^{\hat{N}} Y_i$ gegeben. Für die xs-Schadenzahl $\hat{N}$ gelte

$$\mathrm{E}(\hat{N}) = \lambda > 1 \quad \text{und} \quad c(\hat{N}) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus dem Skript, dass für die Standardabweichung $\sigma(\hat{S})$ der xs-Schadenlast $\hat{S}$ gilt

$$\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S}).$$

Hinweis: Betrachten Sie zusätzlich das kollektive Modell $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$ ist, und wenden Sie den Satz aus Abschnitt 3.5 im Skript an.

Aufgabe 8 [20 Punkte]

Unabhängige Teilportefeuilles (Sparten eines EV oder auch Risikoklassen) mit Prämien $P_1, \ldots, P_I$ und Schäden $S_1, \ldots, S_I$ sollen mit Quoten $\tau_1, \ldots, \tau_I$ rückversichert werden. Es bezeichne q_i die Quotenabgabe von τ_i, d.h. der Selbstbehaltsschaden für Portefeuille i ist $\tilde{S}_i = (1 - q_i) \cdot S_i$ und der Schaden des Rückversicherers $\hat{S}_i = q_i \cdot S_i$.

Die Transaktionskosten seien von der Form $\tilde{K}_i = c \cdot \mathrm{Var}(\hat{S}_i)$ mit einem $c > 0$.

Beweisen Sie: Damit die Transaktionskosten bei vorgegebener Varianz des Selbstbehalts $\tilde{S}_1 + \ldots + \tilde{S}_I$ minimal werden, müssen die Quotenabgaben q_i alle gleich hoch gewählt werden.

Hinweis: Das entsprechende Resultat für Transaktionskosten der Form $\tilde{K}_i = c_i \cdot \sigma(\hat{S}_i)$ wird im Skript in Abschnitt 6.1.4 bewiesen. Der verlangte Beweis kann komplett analog geführt werden.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

(a) *Zu (i):* Ausrechnen des Exponentialterms ergibt

$$\lambda\left(\frac{x}{2\mu^2}-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2x}\right).$$

Der letzte Summand definiert dann zusammen mit dem Wurzelterm die Funktion C. Das Übrige lässt sich darstellen wie folgt:

$$\exp\left(\frac{x\frac{-1}{2\mu^2}-\frac{-1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Damit hat man $\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2}$ und folglich $b(\vartheta)=-\sqrt{-2\vartheta}$ sowie $a(\varphi)=1/\lambda$ und somit die Zugehörigkeit zur Exponentialfamilie nachgewiesen.

Zu (ii): Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) berechnen:

$$\mathrm{E}(X)=b'(\vartheta)\quad\text{und}\quad\mathrm{Var}(X)=a(\varphi)b''(\vartheta).$$

Mit $b'(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-1/2}$ und $b''(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-3/2}$ folgt $\mathrm{E}(X)=\mu$ und $\mathrm{Var}(X)=\mu^3/\lambda$. Für die kanonische Link-Funktion g gilt

$$g(\text{Erwartungswert})=g(\mu)=\eta(\text{linearer Prädiktor})=\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2},$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen genau im Fall der kanonischen Link-Funktion gilt.

(b) Ein solcher Nachweis der Zugehörigkeit kann nach Definition der Exponentialfamilie nur über die Dichte erfolgen. Ausrechnen des Exponentialterms in der Darstellung der Dichte ergibt neben dem Quadrat des Logarithmus, der in die Funktion C sortiert werden könnte, einen Term, der dann wie folgt der obigen allgemeinen Darstellung entsprechen müsste:

$$\frac{x\vartheta-b(\vartheta)}{a(\varphi)}=\frac{\mu\log(x)-\mu^2/2}{\sigma^2}.$$

Diese Identität ist in x nicht erfüllbar. Zudem sind mit der Setzung $\vartheta=\varphi$ die Exponentialausdrücke von Erwartungswert und Varianz aus dieser Darstellung nicht zu reproduzieren. Somit gehört die Log-Normal-Verteilung nicht zur Exponentialfamilie.

Zu Aufgabe 2:

(a) Aufgrund des normalerweise zu erwartenden monoton fallenden Verlaufs der Schadenbedarfe, ist klar zu vermuten, dass die Daten nicht korrekt sind, d.h. es sind weitere Analysen erforderlich.
Möglicherweise sind schadenbehaftete Risiken nicht bzw. nicht vollständig regelgemäß zurückgestuft worden. Eine andere Erklärung könnte in Sondereinstufungen wie etwa Zweitwagen liegen.
Bei geringen Beständen kann es sich auch um zufällige Schwankungen handeln; eine weitere Betrachtung dürfte aber immer angemessen sein.

(b) Die verlängerte Empfehlung des GDV erfolgte sehr wahrscheinlich aus dem Grund heraus, dass es in der SF-Klasse 4 weitere Differenzierungsmöglichkeiten gegeben hat, d.h. dort waren Risiken mit mehr als 4 schadenfreien Jahren und einem niedrigeren Schadenbedarf enthalten. Wenn nun signifikante Anteile in den betrachteten Daten aber nicht weiter als bis SF 4 aufgeschlüsselt sind, so befinden sich gerade auch in SF 4 Risiken mit niedrigerem Schadenbedarf, die eigentlich in SF 5 oder 6 gehören. Dadurch wird ggf. der Schadenbedarf in SF 4 hier zu gering erscheinen. Um eine korrekte Analyse über SF 4 hinaus durchzuführen, sind solche Daten, sofern nicht nachbesserbar, auszuschließen.

(c) Die in der Tabelle fehlende Werte ergeben sich zu

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	1.000	400	267
2	2.000	200	133
3	2.000	150	100
4	4.000	100	67
Gesamt	10.000	150	100

In der Praxis findet sich eine solche Beitragssatzgestaltung nicht, da dabei auch recht hohe Beitragssätze auftreten, die psychologisch nicht als Rabatt für Schadenfreiheit wirken. Daher wird als Bezugsklasse mit dem Beitragssatz 100% eher eine untere Klasse wie hier z.B. Klasse 1 verwendet, was durchweg dann zu Beitragssätzen unter 100% in den anderen SF-Klassen führt.

Zu Aufgabe 3:

(a) Der Korrelationskoeffizient misst lediglich einen linearen Zusammenhang, hier ist dieser aber nichtlinear.
Es gibt zwei Charakteristika: Die Argumentwerte sind symmetrisch um null verteilt und der funktionale Zusammenhang ist durch eine gerade Funktion gegeben. Im Zähler tritt folglich jeder positive Summand auch mit negativem Vorzeichen auf, so dass sich die Summanden paarweise zu null ergänzen.

Daher ist zum einen eine Verallgemeinerung möglich auf ganzzahlige Argumente von $-n$ bis n, zum andern kann man auch andere gerade Funktionen wählen wie etwa cos und cosh.

(b) Folgende Wahlen an Werten sind etwa möglich.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	350	400	500
Land	160	200	280	320	400

Dies entspricht völliger Unabhängigkeit, da das Land immer 20% Abschlag auf Stadt hat und würde somit so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	370	400	500
Land	180	200	280	320	350

Hier zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit, da das Land Abschläge auf Stadt hat, die zwischen 10% und 30% variieren. Auch dies würde so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	355	400	500
Land	165	200	280	320	400

Auch hier findet sich eine Abhängigkeit, die allerdings sehr schwach ausgeprägt ist, da die Abschläge recht nahe bei 20% liegen bzw. genau 20% sind. Für die tarifliche Umsetzung wäre daher der Einfachheit der Tarifstruktur Vorrang zu geben, d.h. die leichte Abhängigkeit nicht umzusetzen und immer 20% Abschlag zu verwenden.
In einem GLM kann eine solche Abhängigkeit dadurch umgesetzt werden, dass aus den zwei Dimensionen Regionalklasse und Stadt/Land eine gemacht wird, indem je Regionalklasse nach Stadt/Land unterschieden wird und somit 10 Ausprägungen entstehen.

Zu Aufgabe 4:

(a) Bezeichnet P_i die Prämie des Jahres i und I_i^P den Prämienindex im Jahr i, so berechnet sich die revalorisierte Prämie $\bar{P}_i$ mittels

$$\bar{P}_i = P_i \cdot \frac{I_{2022}^P}{I_i^P}$$

und man erhält

Jahr	revalorisierte Prämie
2015	187.500
2016	206.311
2017	208.333
2018	215.909
2019	263.158
2020	286.017
2021	302.083
2022	300.000

Die Summe für den Zeitraum 2015–2020 beträgt 1.367.228.

(b) Es bezeichne I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Ein NatCat-Schaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem „as-if-Faktor“

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Für die beiden NatCat-Schäden erhalten wir:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
1	2015	1500	1,92	2.880
2	2018	6000	1,56	9.350

Ein Einzelschaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem as-if-Faktor

$$\frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Wir erhalten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
3	2016	2000	1,17	2.330
4	2017	2500	1,14	2.857
5	2020	4500	1,04	4.696

(c) Ja, die Meldegrenze von 1.000 ist ausreichend, da für alle Jahre i im Beobachtungszeitraum

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2 \quad \text{und} \quad \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2$$

gilt.

(d) Burning Cost per Event:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Event}} = \frac{880 + 7.350}{6 \cdot 300.000} \approx 0{,}46\%$$

Burning Cost per Risk:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Risk}} = \frac{330 + 857 + 2.696}{1.367.228} \approx 0{,}28\%$$

Burning Cost insgesamt:

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BC}_{\text{per Event}} + \mathrm{BC}_{\text{per Risk}} \approx 0{,}74\%$$

Zu Aufgabe 5:

(a) Es sei $C := 20.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\mathrm{RV}} := 0$ und $d_i^{\mathrm{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\mathrm{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\mathrm{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	4.000	0	0
2	19.000	28.000	22.000
3	29.000	30.000	50.000

(b) Für die Verteilungsfunktion F des Schadengrads Q des Risikos gilt

$$F_Q(x) = 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} = 1 - \frac{2(1-x)}{2} = 1 - x \qquad (x \in [0,1])$$

Hieraus erhält man die Verteilungsfunktion F der Schadenhöhenverteilung:

$$F(x) = F_Q(x/v) = 1 - \frac{x}{v} \qquad (x \in [0, v])$$

Dies ist eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, v]$. Die Exposurekurve entspricht also keiner plausiblen Schadenhöhenverteilung.

(c) Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{G\left(\frac{c_i^{\mathrm{RV}} + d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right) - G\left(\frac{d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right)}{G\left(\frac{c_i + d_i}{v}\right) - G\left(\frac{d_i}{v}\right)}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	24	0,0%	0,0
2	30	91,9%	27,6
3	6	84,0%	5,0
Summe			32,6

Die Exposurequotierung liefert also einen Schadenbedarf von 32,6 für den RV-Layer.

Zu Aufgabe 6:

(a) Für die Ansätze 1 und 2 verwenden wir den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha:

$$\widehat{\alpha}^* = \frac{3}{\ln(1{,}5) + \ln(4) + \ln(1{,}5) + \ln(2)} \approx 1{,}04.$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 1:

$$\frac{20.000}{100.000} \cdot 4 = 0{,}8$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 2:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1{,}04}}{1-1{,}04} \cdot \left(4.000^{1-1{,}04} - 1.000^{1-1{,}04}\right)} \approx 0{,}74$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 3:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1{,}5}}{1-1{,}5} \cdot \left(4.000^{1-1{,}5} - 1.000^{1-1{,}5}\right)} = 1{,}00$$

Es werden also Modelle mit Schadenzahlverteilung Poi(λ) und Schadenhöhenverteilung $Pareto(1.000, \alpha)$ angepasst. Die drei Ansätze liefern folgende Parameter:

	λ	α
Ansatz 1	0,80	1,04
Ansatz 2	0,74	1,04
Ansatz 3	1,00	1,50

(b) Man sollte Ansatz 3 verwenden, da der biaskorrigierte ML-Schätzer unter Verwendung von nur vier Schäden sehr unsicher ist.

Zu Aufgabe 7:

Es gilt

$$\mathrm{Var}(\hat{N}) = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \big(\mathrm{E}(\hat{N}) \cdot c(\hat{N}) + 1\big) = \lambda \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 1\right) = \lambda^2$$

und somit $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$.

Es sei $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ mit $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$. Dann lässt sich der Schaden im XL schreiben als

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{N} \max(X_i - D, 0).$$

Nach dem Satz über die Variationskoeffizienten der Jahresschäden aus dem Skript erhalten wir

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(S) \geq \mathrm{Vko}(N) = \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1.$$

Hieraus folgt $\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S})$. □

Anmerkung: Aus dem Satz über die Variationskoeffizienten folgt auch, dass der Variationskoeffizient der Gesamtschadenlast eines beliebigen kollektiven Modells immer mindestens so groß ist wie der Variationskoeffizient der zugehörigen Schadenzahl. Aus $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$ kann man also auch direkt

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1$$

folgern.

Zu Aufgabe 8:

Wir maximieren das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$\sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - q_i^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_i)$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$.

Für die optimalen $q_1, \ldots, q_I$ gibt es einen Lagrange-Multiplikator λ, so dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{I} P_\nu - \mathrm{E}(S_\nu) - q_\nu^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_\nu) + \lambda\left[\sigma_0^2 - \sum_{\nu=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu)\right]\right) = 0$$

für $i = 1, \ldots, I$ erfüllt sind. Wegen $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu) = (1 - q_\nu)^2 \,\mathrm{Var}(S_\nu)$ erhalten wir durch Differenzieren für $i = 1, \ldots, I$:

$$-2 q_i c \cdot \mathrm{Var}(S_i) + \lambda \cdot 2(1 - q_i)\,\mathrm{Var}(S_i) = 0,$$

d.h.

$$q_i = \frac{2\lambda \operatorname{Var}(S_i)}{2(c+\lambda)\operatorname{Var}(S_i)} = \frac{\lambda}{c+\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, I).$$

Bei vorgegebenem σ_0^2 wird λ durch die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \operatorname{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$ festgelegt.

$\square$

DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Variante B

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Mai 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- **Die Aufgaben dieser Klausur sind randomisiert, d.h. es gibt unterschiedliche Klausurvarianten.**

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 [25 Punkte]

(a) Der Korrelationskoeffizient ist wie folgt definiert:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2 \sum(Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Für $X_i \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $Y_i = X_i^2$ (X-Werte gleich oft angenommen) ist dieser null, obwohl ein direkter funktionaler Zusammenhang vorliegt.
Nennen Sie den Grund für dieses Ergebnis. Welche Charakteristika dieser Situation führen zum Resultat null?
Verallgemeinern Sie diese und geben Sie damit ein Beispiel für eine andere Situation mit Korrelationskoeffizient null. [10 Punkte]

(b) Die nachstehende Tabelle beschreibt die Schadenbedarfe bzgl. der Einteilung in Regionalklassen getrennt nach städtischen und ländlichen Gebieten.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250		400	500
Land		200	280	320	

Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass in theoretischer wie praktischer Hinsicht drei verschiedene Konstellationen bzgl. vorhandener Abhängigkeiten inkl. deren praktische Umsetzung im Tarif entstehen.
Wie kann Abhängigkeit bei Schadenbedarfen in einem GLM umgesetzt werden? [15 Punkte]

Aufgabe 2 [25 Punkte]

In einem Bonus-Malus-System rückt man mit jedem schadenfreien Jahr eine Schadenfreiheitsklasse auf und sowohl Schadenbedarf als auch Beitrag reduzieren sich tendenziell. Ereignet sich ein Schaden wird dieses Risiko in der Folgeperiode zurückgestuft und aufgrund eines zu erwartenden höheren Schadenbedarfs wird ein deutlich höherer Beitrag erhoben.

(a) Nehmen Sie an, dass Sie in einem Unternehmen für die Erstellung der Daten zur Lieferung an den GDV zuständig sind und im Rahmen der Datenprüfung folgende Tabelle zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.000
2	850
3	800
4	820
5	770
6	750

Wie sehen Sie die Datenqualität? Haben Sie mit Blick auf die eingangs beschriebene Mechanik der Wanderung in einem Bonus-Malus-System eine mögliche Erklärung? Würde sich Ihre Bewertung der Datenqualität ändern, wenn Sie zusätzlich die Information hätten, dass in der SF-Klasse 4 eher geringe Bestände vorhanden sind? [10 Punkte]

(b) Für die Datenlieferung an den GDV werden die Daten i.d.R. nach mehr schadenfreien Jahren aufgeschlüsselt abgefragt als es der aktuellen GDV-Empfehlung entspricht. Nicht alle Versicherer folgen dieser Anforderung zur Datenaufschlüsselung und liefern nicht mehr SF-Klassen als in der Empfehlung vorhanden. Nehmen Sie an, dass Sie beim GDV für die Datenprüfung der eingegangenen Daten zuständig sind und folgende Tabelle, die auf mehreren Versicherern beruht, zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.100
2	875
3	820
4	760
5	770
6	740

Wie sehen Sie hier die Datenqualität? Haben Sie eine mögliche Erklärung für den Verlauf der Schadenbedarfe, wenn Sie annehmen, dass die GDV-Empfehlung bis vor kurzem bei SF 4 endete? Welche Handlungsoptionen sehen Sie bezüglich der Verwendung dieser Daten? [5 Punkte]

(c) *Bestimmung von Beitragssätzen und deren tarifliche Umsetzung:*
In der nachstehenden Tabelle finden sich Bestandsverteilung und Schadenbedarfe zu einem Bonus-Malus-System.

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	2.000	500	
2	3.000	250	
3	4.000	200	
4	6.000	150	
Gesamt	15.000		

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass der mit den Beständen gewichtete mittlere Beitragssatz 100% ist, die Beitragssätze (ganzzahlig gerundet) zu den einzelnen SF-Klassen.
Nennen Sie Gründe, aus denen so ermittelte Beitragssätze in der Praxis nicht verwendet werden. [10 Punkte]

Aufgabe 3 [30 Punkte]

(a) Für GLMs werden Verteilungen zugrunde gelegt, die zur Exponentialfamilie gehören. Dichten solcher Verteilungen genügen der allgemeinen Form

$$f(x,\vartheta,\varphi) = C(x,\varphi)\exp\left(\frac{x\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)}\right).$$

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Invers-Gauss-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

zur Exponentialfamilie gehört. [10 Punkte]

(ii) Leiten Sie für die Invers-Gauss-Verteilung aus den Bestimmungen zu den Funktionen b und a Erwartungswert und Varianz sowie die kanonische Link-Funktion her. [10 Punkte]

(b) Die Log-Normalverteilung hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ und Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2(\exp(\sigma^2)-1).$$

Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) allgemein berechnen. Jemand behauptet mit folgenden Definitionen die Zugehörigkeit der Log-Normal-Verteilung zur Exponentialfamilie nachgewiesen zu haben:

$$\vartheta = \mu, \quad b(\vartheta) = \exp(\sigma^2/2)\exp(\vartheta) \quad \text{und} \quad a(\varphi) = \exp(\sigma^2)-1.$$

Damit würde die Funktion b bei Ableitungen unverändert reproduziert werden, d.h. die allgemeinen Darstellungen für Erwartungswert und Varianz sind gegeben und also der Beweis der Zugehörigkeit erbracht. Wie bewerten Sie diese Überlegung? Sehen Sie ggf. eine geeignete Transformation? Begründen Sie Ihre Sichtweise mathematisch. [10 Punkte]

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 [15 Punkte]

Zur Tarifierung eines pro Risiko-XLs 9.000 xs 1.000 für das Anfalljahr 2022 wurde für den Beobachtungszeitraum 2014 bis 2020 ein Burning Cost von 5% berechnet. Hierbei wurden folgende (indexierte) Schäden verwendet:

Schadennummer	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2015	1.500
2	2016	4.000
3	2016	1.500
4	2018	2.000

Für das Quotierungsjahr 2022 wird ein GNPI von 20.000 prognostiziert. Die Summe der revalorisierten GNPIs für den Beobachtungszeitraum 2014–2020 beträgt 100.000.

Auf Basis dieser Burning Cost-Rechnung sollen kollektive Modelle zur Tarifierung des XLs angepasst werden, wobei für die Schadenzahl eine Poisson-Verteilung und für die Schadenhöhe eine Pareto-Verteilung verwendet werden soll. Dem Pricing-Aktuar ist bekannt, dass für das gedeckte Segment üblicherweise ein Pareto-Alpha von 1,5 passt.

(a) Verwenden Sie alle drei Ansätze aus dem Skript, Abschnitt 5.4, um jeweils ein kollektives Modell anzupassen. Nehmen Sie hierbei für die Ansätze 2 und 3 an, dass der Burning Cost ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden im bestrichenen Layer ist. Zur Schätzung des Pareto-Alphas aus den Daten soll der biaskorrigierte ML-Schätzer verwendet werden. *[12 Punkte]*

(b) Welchen Ansatz würden Sie bei dieser Datenlage wählen (mit *kurzer* Begründung)? *[3 Punkte]*

Hinweis: Falls Sie den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha nicht berechnen können, dann verwenden Sie für Ansatz 1 und 2 ein Pareto-Alpha von 1,2.

Aufgabe 5 [25 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten pro Ereignis 8.000 xs 2.000, bei dem *keine* Two Risk Warranty vereinbart ist. Zur Tarifierung des Vertragsjahres 2022 liegen Prämien für den Zeitraum 2015–2020, Prämien-Schätzungen für 2021 und 2022 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2015	150.000	100	100
2016	170.000	103	103
2017	180.000	108	105
2018	190.000	110	107
2019	240.000	114	110
2020	270.000	118	115
2021	290.000	120	118
2022	300.000	125	120

Im Beobachtungszeitraum 2015–2020 sind die Schadenereignisse bekannt, die die Meldegrenze von 1.000 überschreiten. Es gab zwei NatCat-Schadenereignisse, bei denen viele Einzelrisiken betroffen waren:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
1	2015	1.500	Flut
2	2018	6.000	Sturm

Ferner haben folgende Einzelschäden die Meldegrenze überschritten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
3	2016	2.000	Feuer
4	2017	2.500	Feuer
5	2020	4.500	Feuer

(a) Berechnen Sie die revalorisierten Prämien 2015–2022 sowie die Summe der revalorisierten Prämien im Beobachtungszeitraum 2015–2020. *[6 Punkte]*

(b) Berechnen Sie die as-if-Schäden für das Quotierungsjahr 2022. Berücksichtigen Sie hierbei die unterschiedliche Charakteristik der Schäden. *[10 Punkte]*

(c) Ist die Schadenmeldegrenze von 1.000 für die Burning Cost-Rechnung ausreichend? *[2 Punkte]*

(d) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Berechnung eines Burning Costs für den Beobachtungszeitraum 2015–2020, der ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden in 2022 ist. Achten Sie hierbei auf konsistente Berücksichtigung der NatCat- und Einzelschäden. *[7 Punkte]*

Aufgabe 6 [30 Punkte]

Wir betrachten ein Feuer-Risiko mit Gesamtversicherungssumme $v = 100.000$. Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligungen an einem gelayerten Programm für dieses Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	10.000	10.000	30%	50
2	30.000	20.000	50%	60
3	50.000	50.000	20%	10

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 20.000 xs 5.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(a) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte c_i^{RV} xs d_i^{RV}, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt. [10 Punkte]

(b) Für eine Exposurequotierung soll die Feuer-Exposurekurve $G(x) = x(2-x)$ verwendet werden. Bestimmen Sie die Schadenhöhenverteilung des betrachteten Risikos mit Versicherungssumme v unter der Annahme, dass die Exposurekurve G angemessen ist. Beurteilen Sie, ob die Annahme plausibel ist. [5 Punkte]

(c) Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 50% und die Exposurekurve G aus (b) – auch falls Sie diese für nicht plausibel halten.

Hierbei können Sie wie folgt vorgehen:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Prämie p_{total} für das komplette Risiko (also für 100% des Risikos mit Versicherungssumme v und einer Priorität von null) kennen.
- Verwenden Sie p_{total} und die Versicherungssumme v um Feuer-Exposurequotierungen für die Layer c_i xs d_i sowie die Layer c_i^{RV} xs d_i^{RV} durchzuführen und berechnen Sie die Verhältnisse

$$\pi_i := \frac{\text{Ergebnis für } c_i^{\text{RV}} \text{ xs } d_i^{\text{RV}}}{\text{Ergebnis für } c_i \text{ xs } d_i}$$

(hier kürzt sich p_{total} raus).

- Das Verhältnis π_i gibt an, welchen Anteil der RV am erwarteten Schaden des EV im Layer c_i xs d_i trägt.

[15 Punkte]

Aufgabe 7 [20 Punkte]

Unabhängige Teilportefeuilles (Sparten eines EV oder auch Risikoklassen) mit Prämien $P_1, \dots, P_I$ und Schäden $S_1, \dots, S_I$ sollen mit Quoten $\tau_1, \dots, \tau_I$ rückversichert werden. Es bezeichne q_i die Quotenabgabe von τ_i, d.h. der Selbstbehaltsschaden für Portefeuille i ist $\tilde{S}_i = (1 - q_i) \cdot S_i$ und der Schaden des Rückversicherers $\hat{S}_i = q_i \cdot S_i$.

Die Transaktionskosten seien von der Form $\tilde{K}_i = c \cdot \mathrm{Var}(\hat{S}_i)$ mit einem $c > 0$.

Beweisen Sie: Damit die Transaktionskosten bei vorgegebener Varianz des Selbstbehalts $\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_I$ minimal werden, müssen die Quotenabgaben q_i alle gleich hoch gewählt werden.

Hinweis: Das entsprechende Resultat für Transaktionskosten der Form $\tilde{K}_i = c_i \cdot \sigma(\hat{S}_i)$ wird im Skript in Abschnitt 6.1.4 bewiesen. Der verlangte Beweis kann komplett analog geführt werden.

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten C xs D. Die Schäden größer D seien durch ein kollektives Modell $\sum_{i=1}^{\hat{N}} Y_i$ gegeben. Für die xs-Schadenzahl $\hat{N}$ gelte

$$\mathrm{E}(\hat{N}) = \lambda > 1 \quad \text{und} \quad c(\hat{N}) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus dem Skript, dass für die Standardabweichung $\sigma(\hat{S})$ der xs-Schadenlast $\hat{S}$ gilt

$$\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S}).$$

Hinweis: Betrachten Sie zusätzlich das kollektive Modell $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$ ist, und wenden Sie den Satz aus Abschnitt 3.5 im Skript an.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

(a) Der Korrelationskoeffizient misst lediglich einen linearen Zusammenhang, hier ist dieser aber nichtlinear.
Es gibt zwei Charakteristika: Die Argumentwerte sind symmetrisch um null verteilt und der funktionale Zusammenhang ist durch eine gerade Funktion gegeben. Im Zähler tritt folglich jeder positive Summand auch mit negativem Vorzeichen auf, so dass sich die Summanden paarweise zu null ergänzen.
Daher ist zum einen eine Verallgemeinerung möglich auf ganzzahlige Argumente von $-n$ bis n, zum andern kann man auch andere gerade Funktionen wählen wie etwa cos und cosh.

(b) Folgende Wahlen an Werten sind etwa möglich.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	350	400	500
Land	160	200	280	320	400

Dies entspricht völliger Unabhängigkeit, da das Land immer 20% Abschlag auf Stadt hat und würde somit so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	370	400	500
Land	180	200	280	320	350

Hier zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit, da das Land Abschläge auf Stadt hat, die zwischen 10% und 30% variieren. Auch dies würde so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	200	250	355	400	500
Land	165	200	280	320	400

Auch hier findet sich eine Abhängigkeit, die allerdings sehr schwach ausgeprägt ist, da die Abschläge recht nahe bei 20% liegen bzw. genau 20% sind. Für die tarifliche Umsetzung wäre daher der Einfachheit der Tarifstruktur Vorrang zu geben, d.h. die leichte Abhängigkeit nicht umzusetzen und immer 20% Abschlag zu verwenden.
In einem GLM kann eine solche Abhängigkeit dadurch umgesetzt werden, dass aus den zwei Dimensionen Regionalklasse und Stadt/Land eine gemacht wird, indem je Regionalklasse nach Stadt/Land unterschieden wird und somit 10 Ausprägungen entstehen.

Zu Aufgabe 2:

(a) Aufgrund des normalerweise zu erwartenden monoton fallenden Verlaufs der Schadenbedarfe, ist klar zu vermuten, dass die Daten nicht korrekt sind, d.h. es sind weitere Analysen erforderlich.
Möglicherweise sind schadenbehaftete Risiken nicht bzw. nicht vollständig regelgemäß zurückgestuft worden. Eine andere Erklärung könnte in Sondereinstufungen wie etwa Zweitwagen liegen.
Bei geringen Beständen kann es sich auch um zufällige Schwankungen handeln; eine weitere Betrachtung dürfte aber immer angemessen sein.

(b) Die verlängerte Empfehlung des GDV erfolgte sehr wahrscheinlich aus dem Grund heraus, dass es in der SF-Klasse 4 weitere Differenzierungsmöglichkeiten gegeben hat, d.h. dort waren Risiken mit mehr als 4 schadenfreien Jahren und einem niedrigeren Schadenbedarf enthalten. Wenn nun signifikante Anteile in den betrachteten Daten aber nicht weiter als bis SF 4 aufgeschlüsselt sind, so befinden sich gerade auch in SF 4 Risiken mit niedrigerem Schadenbedarf, die eigentlich in SF 5 oder 6 gehören. Dadurch wird ggf. der Schadenbedarf in SF 4 hier zu gering erscheinen. Um eine korrekte Analyse über SF 4 hinaus durchzuführen, sind solche Daten, sofern nicht nachbesserbar, auszuschließen.

(c) Die in der Tabelle fehlende Werte ergeben sich zu

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	2.000	500	217
2	3.000	250	109
3	4.000	200	87
4	6.000	150	65
Gesamt	15.000	230	100

In der Praxis findet sich eine solche Beitragssatzgestaltung nicht, da dabei auch recht hohe Beitragssätze auftreten, die psychologisch nicht als Rabatt für Schadenfreiheit wirken. Daher wird als Bezugsklasse mit dem Beitragssatz 100% eher eine untere Klasse wie hier z.B. Klasse 1 verwendet, was durchweg dann zu Beitragssätzen unter 100% in den anderen SF-Klassen führt.

Zu Aufgabe 3:

(a) *Zu (i):* Ausrechnen des Exponentialterms ergibt

$$\lambda\left(\frac{x}{2\mu^2}-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2x}\right).$$

Der letzte Summand definiert dann zusammen mit dem Wurzelterm die Funktion C. Das Übrige lässt sich darstellen wie folgt:

$$\exp\left(\frac{x\frac{-1}{2\mu^2}-\frac{-1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Damit hat man $\vartheta = \frac{-1}{2\mu^2}$ und folglich $b(\vartheta) = -\sqrt{-2\vartheta}$ sowie $a(\varphi) = 1/\lambda$ und somit die Zugehörigkeit zur Exponentialfamilie nachgewiesen.

Zu (ii): Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) berechnen:

$$\mathrm{E}(X) = b'(\vartheta) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = a(\varphi)b''(\vartheta).$$

Mit $b'(\vartheta) = (-2\vartheta)^{-1/2}$ und $b''(\vartheta) = (-2\vartheta)^{-3/2}$ folgt $\mathrm{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \mu^3/\lambda$. Für die kanonische Link-Funktion g gilt

$$g(\text{Erwartungswert}) = g(\mu) = \eta(\text{linearer Prädiktor}) = \vartheta = \frac{-1}{2\mu^2},$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen genau im Fall der kanonischen Link-Funktion gilt.

(b) Ein solcher Nachweis der Zugehörigkeit kann nach Definition der Exponentialfamilie nur über die Dichte erfolgen. Ausrechnen des Exponentialterms in der Darstellung der Dichte ergibt neben dem Quadrat des Logarithmus, der in die Funktion C sortiert werden könnte, einen Term, der dann wie folgt der obigen allgemeinen Darstellung entsprechen müsste:

$$\frac{x\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)} = \frac{\mu \log(x) - \mu^2/2}{\sigma^2}.$$

Diese Identität ist in x nicht erfüllbar. Zudem sind mit der Setzung $\vartheta = \varphi$ die Exponentialausdrücke von Erwartungswert und Varianz aus dieser Darstellung nicht zu reproduzieren. Somit gehört die Log-Normal-Verteilung nicht zur Exponentialfamilie.

Zu Aufgabe 4:

(a) Für die Ansätze 1 und 2 verwenden wir den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha:

$$\widehat{\alpha}^* = \frac{3}{\ln(1{,}5) + \ln(4) + \ln(1{,}5) + \ln(2)} \approx 1{,}04.$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 1:

$$\frac{20.000}{100.000} \cdot 4 = 0{,}8$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 2:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,04}}{1-1{,}04} \cdot \left(4.000^{1-1,04} - 1.000^{1-1,04}\right)} \approx 0{,}74$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 3:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,5}}{1-1,5} \cdot \left(4.000^{1-1,5} - 1.000^{1-1,5}\right)} = 1,00$$

Es werden also Modelle mit Schadenzahlverteilung Poi(λ) und Schadenhöhenverteilung Pareto($1.000, \alpha$) angepasst. Die drei Ansätze liefern folgende Parameter:

	λ	α
Ansatz 1	0,80	1,04
Ansatz 2	0,74	1,04
Ansatz 3	1,00	1,50

(b) Man sollte Ansatz 3 verwenden, da der biaskorrigierte ML-Schätzer unter Verwendung von nur vier Schäden sehr unsicher ist.

Zu Aufgabe 5:

(a) Bezeichnet P_i die Prämie des Jahres i und I_i^P den Prämienindex im Jahr i, so berechnet sich die revalorisierte Prämie $\bar{P}_i$ mittels

$$\bar{P}_i = P_i \cdot \frac{I_{2022}^P}{I_i^P}$$

und man erhält

Jahr	revalorisierte Prämie
2015	187.500
2016	206.311
2017	208.333
2018	215.909
2019	263.158
2020	286.017
2021	302.083
2022	300.000

Die Summe für den Zeitraum 2015–2020 beträgt 1.367.228.

(b) Es bezeichne I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Ein NatCat-Schaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem „as-if-Faktor“

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Für die beiden NatCat-Schäden erhalten wir:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
1	2015	1500	1,92	2.880
2	2018	6000	1,56	9.350

Ein Einzelschaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem as-if-Faktor

$$\frac{I^S_{2022}}{I^S_i}$$

multipliziert. Wir erhalten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
3	2016	2000	1,17	2.330
4	2017	2500	1,14	2.857
5	2020	4500	1,04	4.696

(c) Ja, die Meldegrenze von 1.000 ist ausreichend, da für alle Jahre i im Beobachtungszeitraum

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I^S_{2022}}{I^S_i} \leq 2 \quad \text{und} \quad \frac{I^S_{2022}}{I^S_i} \leq 2$$

gilt.

(d) Burning Cost per Event:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Event}} = \frac{880 + 7.350}{6 \cdot 300.000} \approx 0{,}46\%$$

Burning Cost per Risk:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Risk}} = \frac{330 + 857 + 2.696}{1.367.228} \approx 0{,}28\%$$

Burning Cost insgesamt:

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BC}_{\text{per Event}} + \mathrm{BC}_{\text{per Risk}} \approx 0{,}74\%$$

Zu Aufgabe 6:

(a) Es sei $C := 20.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\mathrm{RV}} := 0$ und $d_i^{\mathrm{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\mathrm{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\mathrm{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	3.000	0	0
2	18.000	26.000	24.000
3	28.000	35.000	50.000

(b) Für die Verteilungsfunktion F des Schadengrads Q des Risikos gilt

$$F_Q(x) = 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} = 1 - \frac{2(1-x)}{2} = 1 - x \qquad (x \in [0,1])$$

Hieraus erhält man die Verteilungsfunktion F der Schadenhöhenverteilung:

$$F(x) = F_Q(x/v) = 1 - \frac{x}{v} \qquad (x \in [0,v])$$

Dies ist eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,v]$. Die Exposurekurve entspricht also keiner plausiblen Schadenhöhenverteilung.

(c) Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{G\left(\frac{c_i^{\mathrm{RV}} + d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right) - G\left(\frac{d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right)}{G\left(\frac{c_i + d_i}{v}\right) - G\left(\frac{d_i}{v}\right)}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	25	0,0%	0,0
2	30	84,0%	25,2
3	5	91,0%	4,6
Summe			29,8

Die Exposurequotierung liefert also einen Schadenbedarf von 32,6 für den RV-Layer.

Zu Aufgabe 7:

Wir maximieren das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$\sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - q_i^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_i)$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$.

Für die optimalen $q_1, \dots, q_I$ gibt es einen Lagrange-Multiplikator λ, so dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{I} P_\nu - \mathrm{E}(S_\nu) - q_\nu^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_\nu) + \lambda\left[\sigma_0^2 - \sum_{\nu=1}^{I}\mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu)\right]\right) = 0$$

für $i = 1, \dots, I$ erfüllt sind. Wegen $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu) = (1 - q_\nu)^2\,\mathrm{Var}(S_\nu)$ erhalten wir durch Differenzieren für $i = 1, \dots, I$:

$$-2q_i c \cdot \mathrm{Var}(S_i) + \lambda \cdot 2(1 - q_i)\,\mathrm{Var}(S_i) = 0,$$

d.h.

$$q_i = \frac{2\lambda\,\mathrm{Var}(S_i)}{2(c+\lambda)\,\mathrm{Var}(S_i)} = \frac{\lambda}{c+\lambda} \qquad (i = 1, \dots, I).$$

Bei vorgegebenem σ_0^2 wird λ durch die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I}\mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$ festgelegt. □

Zu Aufgabe 8:

Es gilt

$$\mathrm{Var}(\hat{N}) = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \big(\mathrm{E}(\hat{N}) \cdot c(\hat{N}) + 1\big) = \lambda \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 1\right) = \lambda^2$$

und somit $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$.

Es sei $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ mit $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$. Dann lässt sich der Schaden im XL schreiben als

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{N} \max(X_i - D, 0).$$

Nach dem Satz über die Variationskoeffizienten der Jahresschäden aus dem Skript erhalten wir

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(S) \geq \mathrm{Vko}(N) = \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1.$$

Hieraus folgt $\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S})$. □

Anmerkung: Aus dem Satz über die Variationskoeffizienten folgt auch, dass der Variationskoeffizient der Gesamtschadenlast eines beliebigen kollektiven Modells immer mindestens so groß ist wie der Variationskoeffizient der zugehörigen Schadenzahl. Aus $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$ kann man also auch direkt

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1$$

folgern.

DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Variante C

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Mai 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- **Die Aufgaben dieser Klausur sind randomisiert, d.h. es gibt unterschiedliche Klausurvarianten.**

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 [25 Punkte]

(a) Der Korrelationskoeffizient ist wie folgt definiert:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2 \sum(Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Für $X_i \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $Y_i = X_i^2$ (X-Werte gleich oft angenommen) ist dieser null, obwohl ein direkter funktionaler Zusammenhang vorliegt.
Nennen Sie den Grund für dieses Ergebnis. Welche Charakteristika dieser Situation führen zum Resultat null?
Verallgemeinern Sie diese und geben Sie damit ein Beispiel für eine andere Situation mit Korrelationskoeffizient null. [10 Punkte]

(b) Die nachstehende Tabelle beschreibt die Schadenbedarfe bzgl. der Einteilung in Regionalklassen getrennt nach städtischen und ländlichen Gebieten.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220		450	550
Land		176	260	360	

Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass in theoretischer wie praktischer Hinsicht drei verschiedene Konstellationen bzgl. vorhandener Abhängigkeiten inkl. deren praktische Umsetzung im Tarif entstehen.
Wie kann Abhängigkeit bei Schadenbedarfen in einem GLM umgesetzt werden? [15 Punkte]

Aufgabe 2 [30 Punkte]

(a) Für GLMs werden Verteilungen zugrunde gelegt, die zur Exponentialfamilie gehören. Dichten solcher Verteilungen genügen der allgemeinen Form

$$f(x,\vartheta,\varphi) = C(x,\varphi)\exp\left(\frac{x\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)}\right).$$

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Invers-Gauss-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

zur Exponentialfamilie gehört. [10 Punkte]

(ii) Leiten Sie für die Invers-Gauss-Verteilung aus den Bestimmungen zu den Funktionen b und a Erwartungswert und Varianz sowie die kanonische Link-Funktion her. [10 Punkte]

(b) Die Log-Normalverteilung hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ und Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2(\exp(\sigma^2) - 1).$$

Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) allgemein berechnen. Jemand behauptet mit folgenden Definitionen die Zugehörigkeit der Log-Normal-Verteilung zur Exponentialfamilie nachgewiesen zu haben:

$$\vartheta = \mu, \quad b(\vartheta) = \exp(\sigma^2/2)\exp(\vartheta) \quad \text{und} \quad a(\varphi) = \exp(\sigma^2) - 1.$$

Damit würde die Funktion b bei Ableitungen unverändert reproduziert werden, d.h. die allgemeinen Darstellungen für Erwartungswert und Varianz sind gegeben und also der Beweis der Zugehörigkeit erbracht. Wie bewerten Sie diese Überlegung? Sehen Sie ggf. eine geeignete Transformation? Begründen Sie Ihre Sichtweise mathematisch. [10 Punkte]

Aufgabe 3 [25 Punkte]

In einem Bonus-Malus-System rückt man mit jedem schadenfreien Jahr eine Schadenfreiheitsklasse auf und sowohl Schadenbedarf als auch Beitrag reduzieren sich tendenziell. Ereignet sich ein Schaden wird dieses Risiko in der Folgeperiode zurückgestuft und aufgrund eines zu erwartenden höheren Schadenbedarfs wird ein deutlich höherer Beitrag erhoben.

(a) Nehmen Sie an, dass Sie in einem Unternehmen für die Erstellung der Daten zur Lieferung an den GDV zuständig sind und im Rahmen der Datenprüfung folgende Tabelle zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.200
2	900
3	850
4	860
5	800
6	780

Wie sehen Sie die Datenqualität? Haben Sie mit Blick auf die eingangs beschriebene Mechanik der Wanderung in einem Bonus-Malus-System eine mögliche Erklärung? Würde sich Ihre Bewertung der Datenqualität ändern, wenn Sie zusätzlich die Information hätten, dass in der SF-Klasse 4 eher geringe Bestände vorhanden sind? [10 Punkte]

(b) Für die Datenlieferung an den GDV werden die Daten i.d.R. nach mehr schadenfreien Jahren aufgeschlüsselt abgefragt als es der aktuellen GDV-Empfehlung entspricht. Nicht alle Versicherer folgen dieser Anforderung zur Datenaufschlüsselung und liefern nicht mehr SF-Klassen als in der Empfehlung vorhanden. Nehmen Sie an, dass Sie beim GDV für die Datenprüfung der eingegangenen Daten zuständig sind und folgende Tabelle, die auf mehreren Versicherern beruht, zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.200
2	900
3	850
4	800
5	810
6	780

Wie sehen Sie hier die Datenqualität? Haben Sie eine mögliche Erklärung für den Verlauf der Schadenbedarfe, wenn Sie annehmen, dass die GDV-Empfehlung bis vor kurzem bei SF 4 endete? Welche Handlungsoptionen sehen Sie bezüglich der Verwendung dieser Daten? [5 Punkte]

(c) *Bestimmung von Beitragssätzen und deren tarifliche Umsetzung:*
In der nachstehenden Tabelle finden sich Bestandsverteilung und Schadenbedarfe zu einem Bonus-Malus-System.

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	1.000	400	
2	2.000	200	
3	2.000	150	
4	4.000	100	
Gesamt	10.000		

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass der mit den Beständen gewichtete mittlere Beitragssatz 100% ist, die Beitragssätze (ganzzahlig gerundet) zu den einzelnen SF-Klassen.
Nennen Sie Gründe, aus denen so ermittelte Beitragssätze in der Praxis nicht verwendet werden. [10 Punkte]

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 [25 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten pro Ereignis 8.000 xs 2.000, bei dem *keine* Two Risk Warranty vereinbart ist. Zur Tarifierung des Vertragsjahres 2022 liegen Prämien für den Zeitraum 2015–2020, Prämien-Schätzungen für 2021 und 2022 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2015	100.000	100	100
2016	110.000	103	103
2017	130.000	108	105
2018	140.000	110	107
2019	160.000	114	110
2020	185.000	118	115
2021	190.000	120	118
2022	200.000	125	120

Im Beobachtungszeitraum 2015–2020 sind die Schadenereignisse bekannt, die die Meldegrenze von 1.000 überschreiten. Es gab zwei NatCat-Schadenereignisse, bei denen viele Einzelrisiken betroffen waren:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
1	2015	2.000	Flut
2	2018	5.000	Sturm

Ferner haben folgende Einzelschäden die Meldegrenze überschritten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
3	2016	1.500	Feuer
4	2017	3.000	Feuer
5	2020	5.000	Feuer

(a) Berechnen Sie die revalorisierten Prämien 2015–2022 sowie die Summe der revalorisierten Prämien im Beobachtungszeitraum 2015–2020. *[6 Punkte]*

(b) Berechnen Sie die as-if-Schäden für das Quotierungsjahr 2022. Berücksichtigen Sie hierbei die unterschiedliche Charakteristik der Schäden. *[10 Punkte]*

(c) Ist die Schadenmeldegrenze von 1.000 für die Burning Cost-Rechnung ausreichend? *[2 Punkte]*

(d) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Berechnung eines Burning Costs für den Beobachtungszeitraum 2015–2020, der ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden in 2022 ist. Achten Sie hierbei auf konsistente Berücksichtigung der NatCat- und Einzelschäden. *[7 Punkte]*

Aufgabe 5 [30 Punkte]

Wir betrachten ein Feuer-Risiko mit Gesamtversicherungssumme $v = 100.000$. Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligungen an einem gelayerten Programm für dieses Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	10.000	10.000	30%	50
2	30.000	20.000	50%	60
3	50.000	50.000	20%	10

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 20.000 xs 5.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(a) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte c_i^{RV} xs d_i^{RV}, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt. [10 Punkte]

(b) Für eine Exposurequotierung soll die Feuer-Exposurekurve $G(x) = x(2-x)$ verwendet werden. Bestimmen Sie die Schadenhöhenverteilung des betrachteten Risikos mit Versicherungssumme v unter der Annahme, dass die Exposurekurve G angemessen ist. Beurteilen Sie, ob die Annahme plausibel ist. [5 Punkte]

(c) Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 50% und die Exposurekurve G aus (b) – auch falls Sie diese für nicht plausibel halten.

Hierbei können Sie wie folgt vorgehen:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Prämie p_{total} für das komplette Risiko (also für 100% des Risikos mit Versicherungssumme v und einer Priorität von null) kennen.
- Verwenden Sie p_{total} und die Versicherungssumme v um Feuer-Exposurequotierungen für die Layer c_i xs d_i sowie die Layer c_i^{RV} xs d_i^{RV} durchzuführen und berechnen Sie die Verhältnisse

$$\pi_i := \frac{\text{Ergebnis für } c_i^{RV} \text{ xs } d_i^{RV}}{\text{Ergebnis für } c_i \text{ xs } d_i}$$

(hier kürzt sich p_{total} raus).

- Das Verhältnis π_i gibt an, welchen Anteil der RV am erwarteten Schaden des EV im Layer c_i xs d_i trägt.

[15 Punkte]

Aufgabe 6 [15 Punkte]

Zur Tarifierung eines pro Risiko-XLs 9.000 xs 1.000 für das Anfalljahr 2022 wurde für den Beobachtungszeitraum 2014 bis 2020 ein Burning Cost von 5% berechnet. Hierbei wurden folgende (indexierte) Schäden verwendet:

Schadennummer	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2015	1.500
2	2016	3.000
3	2016	1.500
4	2018	2.000

Für das Quotierungsjahr 2022 wird ein GNPI von 20.000 prognostiziert. Die Summe der revalorisierten GNPIs für den Beobachtungszeitraum 2014–2020 beträgt 80.000.

Auf Basis dieser Burning Cost-Rechnung sollen kollektive Modelle zur Tarifierung des XLs angepasst werden, wobei für die Schadenzahl eine Poisson-Verteilung und für die Schadenhöhe eine Pareto-Verteilung verwendet werden soll. Dem Pricing-Aktuar ist bekannt, dass für das gedeckte Segment üblicherweise ein Pareto-Alpha von 1,6 passt.

(a) Verwenden Sie alle drei Ansätze aus dem Skript, Abschnitt 5.4, um jeweils ein kollektives Modell anzupassen. Nehmen Sie hierbei für die Ansätze 2 und 3 an, dass der Burning Cost ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden im bestrichenen Layer ist. Zur Schätzung des Pareto-Alphas aus den Daten soll der biaskorrigierte ML-Schätzer verwendet werden. *[12 Punkte]*

(b) Welchen Ansatz würden Sie bei dieser Datenlage wählen (mit *kurzer* Begründung)? *[3 Punkte]*

Hinweis: Falls Sie den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha nicht berechnen können, dann verwenden Sie für Ansatz 1 und 2 ein Pareto-Alpha von 1,3.

Aufgabe 7 [20 Punkte]

Unabhängige Teilportefeuilles (Sparten eines EV oder auch Risikoklassen) mit Prämien $P_1, \dots, P_I$ und Schäden $S_1, \dots, S_I$ sollen mit Quoten $\tau_1, \dots, \tau_I$ rückversichert werden. Es bezeichne q_i die Quotenabgabe von τ_i, d.h. der Selbstbehaltsschaden für Portefeuille i ist $\tilde{S}_i = (1 - q_i) \cdot S_i$ und der Schaden des Rückversicherers $\hat{S}_i = q_i \cdot S_i$.

Die Transaktionskosten seien von der Form $\tilde{K}_i = c \cdot \mathrm{Var}(\hat{S}_i)$ mit einem $c > 0$.

Beweisen Sie: Damit die Transaktionskosten bei vorgegebener Varianz des Selbstbehalts $\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_I$ minimal werden, müssen die Quotenabgaben q_i alle gleich hoch gewählt werden.

Hinweis: Das entsprechende Resultat für Transaktionskosten der Form $\tilde{K}_i = c_i \cdot \sigma(\hat{S}_i)$ wird im Skript in Abschnitt 6.1.4 bewiesen. Der verlangte Beweis kann komplett analog geführt werden.

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten C xs D. Die Schäden größer D seien durch ein kollektives Modell $\sum_{i=1}^{\hat{N}} Y_i$ gegeben. Für die xs-Schadenzahl $\hat{N}$ gelte

$$\mathrm{E}(\hat{N}) = \lambda > 1 \quad \text{und} \quad c(\hat{N}) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus dem Skript, dass für die Standardabweichung $\sigma(\hat{S})$ der xs-Schadenlast $\hat{S}$ gilt

$$\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S}).$$

Hinweis: Betrachten Sie zusätzlich das kollektive Modell $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$ ist, und wenden Sie den Satz aus Abschnitt 3.5 im Skript an.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

(a) Der Korrelationskoeffizient misst lediglich einen linearen Zusammenhang, hier ist dieser aber nichtlinear.
Es gibt zwei Charakteristika: Die Argumentwerte sind symmetrisch um null verteilt und der funktionale Zusammenhang ist durch eine gerade Funktion gegeben. Im Zähler tritt folglich jeder positive Summand auch mit negativem Vorzeichen auf, so dass sich die Summanden paarweise zu null ergänzen.
Daher ist zum einen eine Verallgemeinerung möglich auf ganzzahlige Argumente von $-n$ bis n, zum andern kann man auch andere gerade Funktionen wählen wie etwa cos und cosh.

(b) Folgende Wahlen an Werten sind etwa möglich.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	325	450	550
Land	120	176	260	360	440

Dies entspricht völliger Unabhängigkeit, da das Land immer 20% Abschlag auf Stadt hat und würde somit so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	320	450	550
Land	135	176	260	360	385

Hier zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit, da das Land Abschläge auf Stadt hat, die zwischen 10% und 30% variieren. Auch dies würde so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	330	450	550
Land	125	176	260	360	440

Auch hier findet sich eine Abhängigkeit, die allerdings sehr schwach ausgeprägt ist, da die Abschläge recht nahe bei 20% liegen bzw. genau 20% sind. Für die tarifliche Umsetzung wäre daher der Einfachheit der Tarifstruktur Vorrang zu geben, d.h. die leichte Abhängigkeit nicht umzusetzen und immer 20% Abschlag zu verwenden.
In einem GLM kann eine solche Abhängigkeit dadurch umgesetzt werden, dass aus den zwei Dimensionen Regionalklasse und Stadt/Land eine gemacht wird, indem je Regionalklasse nach Stadt/Land unterschieden wird und somit 10 Ausprägungen entstehen.

Zu Aufgabe 2:

(a) *Zu (i):* Ausrechnen des Exponentialterms ergibt

$$\lambda\left(\frac{x}{2\mu^2}-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2x}\right).$$

Der letzte Summand definiert dann zusammen mit dem Wurzelterm die Funktion C. Das Übrige lässt sich darstellen wie folgt:

$$\exp\left(\frac{x\frac{-1}{2\mu^2}-\frac{-1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Damit hat man $\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2}$ und folglich $b(\vartheta)=-\sqrt{-2\vartheta}$ sowie $a(\varphi)=1/\lambda$ und somit die Zugehörigkeit zur Exponentialfamilie nachgewiesen.

Zu (ii): Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) berechnen:

$$\mathrm{E}(X)=b'(\vartheta)\quad\text{und}\quad \mathrm{Var}(X)=a(\varphi)b''(\vartheta).$$

Mit $b'(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-1/2}$ und $b''(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-3/2}$ folgt $\mathrm{E}(X)=\mu$ und $\mathrm{Var}(X)=\mu^3/\lambda$. Für die kanonische Link-Funktion g gilt

$$g(\text{Erwartungswert})=g(\mu)=\eta(\text{linearer Prädiktor})=\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2},$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen genau im Fall der kanonischen Link-Funktion gilt.

(b) Ein solcher Nachweis der Zugehörigkeit kann nach Definition der Exponentialfamilie nur über die Dichte erfolgen. Ausrechnen des Exponentialterms in der Darstellung der Dichte ergibt neben dem Quadrat des Logarithmus, der in die Funktion C sortiert werden könnte, einen Term, der dann wie folgt der obigen allgemeinen Darstellung entsprechen müsste:

$$\frac{x\vartheta-b(\vartheta)}{a(\varphi)}=\frac{\mu\log(x)-\mu^2/2}{\sigma^2}.$$

Diese Identität ist in x nicht erfüllbar. Zudem sind mit der Setzung $\vartheta=\varphi$ die Exponentialausdrücke von Erwartungswert und Varianz aus dieser Darstellung nicht zu reproduzieren. Somit gehört die Log-Normal-Verteilung nicht zur Exponentialfamilie.

Zu Aufgabe 3:

(a) Aufgrund des normalerweise zu erwartenden monoton fallenden Verlaufs der Schadenbedarfe, ist klar zu vermuten, dass die Daten nicht korrekt sind, d.h. es sind weitere Analysen erforderlich.
Möglicherweise sind schadenbehaftete Risiken nicht bzw. nicht vollständig regelgemäß zurückgestuft worden. Eine andere Erklärung könnte in Sondereinstufungen wie etwa Zweitwagen liegen.
Bei geringen Beständen kann es sich auch um zufällige Schwankungen handeln; eine weitere Betrachtung dürfte aber immer angemessen sein.

(b) Die verlängerte Empfehlung des GDV erfolgte sehr wahrscheinlich aus dem Grund heraus, dass es in der SF-Klasse 4 weitere Differenzierungsmöglichkeiten gegeben hat, d.h. dort waren Risiken mit mehr als 4 schadenfreien Jahren und einem niedrigeren Schadenbedarf enthalten. Wenn nun signifikante Anteile in den betrachteten Daten aber nicht weiter als bis SF 4 aufgeschlüsselt sind, so befinden sich gerade auch in SF 4 Risiken mit niedrigerem Schadenbedarf, die eigentlich in SF 5 oder 6 gehören. Dadurch wird ggf. der Schadenbedarf in SF 4 hier zu gering erscheinen. Um eine korrekte Analyse über SF 4 hinaus durchzuführen, sind solche Daten, sofern nicht nachbesserbar, auszuschließen.

(c) Die in der Tabelle fehlende Werte ergeben sich zu

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	1.000	400	267
2	2.000	200	133
3	2.000	150	100
4	4.000	100	67
Gesamt	10.000	150	100

In der Praxis findet sich eine solche Beitragssatzgestaltung nicht, da dabei auch recht hohe Beitragssätze auftreten, die psychologisch nicht als Rabatt für Schadenfreiheit wirken. Daher wird als Bezugsklasse mit dem Beitragssatz 100% eher eine untere Klasse wie hier z.B. Klasse 1 verwendet, was durchweg dann zu Beitragssätzen unter 100% in den anderen SF-Klassen führt.

Zu Aufgabe 4:

(a) Bezeichnet P_i die Prämie des Jahres i und I_i^P den Prämienindex im Jahr i, so berechnet sich die revalorisierte Prämie $\bar{P}_i$ mittels

$$\bar{P}_i = P_i \cdot \frac{I_{2022}^P}{I_i^P}$$

und man erhält

Jahr	revalorisierte Prämie
2015	125.000
2016	133.495
2017	150.463
2018	159.091
2019	175.439
2020	195.975
2021	197.917
2022	200.000

Die Summe für den Zeitraum 2015–2020 beträgt 939.462.

(b) Es bezeichne I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Ein NatCat-Schaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem „as-if-Faktor"

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Für die beiden NatCat-Schäden erhalten wir:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
1	2015	2000	1,92	3.840
2	2018	5000	1,41	7.049

Ein Einzelschaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem as-if-Faktor

$$\frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Wir erhalten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
3	2016	1500	1,17	1.748
4	2017	3000	1,14	3.429
5	2020	5000	1,04	5.217

(c) Ja, die Meldegrenze von 1.000 ist ausreichend, da für alle Jahre i im Beobachtungszeitraum

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2 \quad \text{und} \quad \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2$$

gilt.

(d) Burning Cost per Event:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Event}} = \frac{1.840 + 5.049}{6 \cdot 200.000} \approx 0{,}57\%$$

Burning Cost per Risk:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Risk}} = \frac{0+1.429+3.217}{939.462} \approx 0{,}49\%$$

Burning Cost insgesamt:

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BC}_{\text{per Event}} + \mathrm{BC}_{\text{per Risk}} \approx 1{,}07\%$$

Zu Aufgabe 5:

(a) Es sei $C := 20.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\mathrm{RV}} := 0$ und $d_i^{\mathrm{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\mathrm{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\mathrm{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	3.000	0	0
2	18.000	26.000	24.000
3	28.000	35.000	50.000

(b) Für die Verteilungsfunktion F des Schadengrads Q des Risikos gilt

$$F_Q(x) = 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} = 1 - \frac{2(1-x)}{2} = 1 - x \qquad (x \in [0,1])$$

Hieraus erhält man die Verteilungsfunktion F der Schadenhöhenverteilung:

$$F(x) = F_Q(x/v) = 1 - \frac{x}{v} \qquad (x \in [0, v])$$

Dies ist eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, v]$. Die Exposurekurve entspricht also keiner plausiblen Schadenhöhenverteilung.

(c) Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{G\left(\frac{c_i^{\mathrm{RV}} + d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right) - G\left(\frac{d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right)}{G\left(\frac{c_i + d_i}{v}\right) - G\left(\frac{d_i}{v}\right)}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	25	0,0%	0,0
2	30	84,0%	25,2
3	5	91,0%	4,6
Summe			29,8

Die Exposurequotierung liefert also einen Schadenbedarf von 32,6 für den RV-Layer.

Zu Aufgabe 6:

(a) Für die Ansätze 1 und 2 verwenden wir den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha:

$$\widehat{\alpha}^* = \frac{3}{\ln(1{,}5) + \ln(3{,}0) + \ln(1{,}5) + \ln(2)} \approx 1{,}15.$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 1:

$$\frac{20.000}{80.000} \cdot 4 = 1{,}0$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 2:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,15}}{1-1{,}15} \cdot \left(3.000^{1-1,15} - 1.000^{1-1,15}\right)} \approx 0{,}99$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 3:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,6}}{1-1{,}6} \cdot \left(3.000^{1-1,6} - 1.000^{1-1,6}\right)} \approx 1{,}24$$

Es werden also Modelle mit Schadenzahlverteilung Poi(λ) und Schadenhöhenverteilung Pareto$(1.000, \alpha)$ angepasst. Die drei Ansätze liefern folgende Parameter:

	λ	α
Ansatz 1	1,00	1,15
Ansatz 2	0,99	1,15
Ansatz 3	1,24	1,60

(b) Man sollte Ansatz 3 verwenden, da der biaskorrigierte ML-Schätzer unter Verwendung von nur vier Schäden sehr unsicher ist.

Zu Aufgabe 7:

Wir maximieren das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$\sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - q_i^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_i)$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$.

Für die optimalen $q_1, \ldots, q_I$ gibt es einen Lagrange-Multiplikator λ, so dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{I} P_\nu - \mathrm{E}(S_\nu) - q_\nu^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_\nu) + \lambda\left[\sigma_0^2 - \sum_{\nu=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu)\right]\right) = 0$$

für $i = 1, \ldots, I$ erfüllt sind. Wegen $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu) = (1-q_\nu)^2\,\mathrm{Var}(S_\nu)$ erhalten wir durch Differenzieren für $i = 1, \ldots, I$:

$$-2q_i c \cdot \mathrm{Var}(S_i) + \lambda \cdot 2(1-q_i)\,\mathrm{Var}(S_i) = 0,$$

d.h.

$$q_i = \frac{2\lambda\,\mathrm{Var}(S_i)}{2(c+\lambda)\,\mathrm{Var}(S_i)} = \frac{\lambda}{c+\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, I).$$

Bei vorgegebenem σ_0^2 wird λ durch die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$ festgelegt. □

Zu Aufgabe 8:

Es gilt

$$\mathrm{Var}(\hat{N}) = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \big(\mathrm{E}(\hat{N}) \cdot c(\hat{N}) + 1\big) = \lambda \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 1\right) = \lambda^2$$

und somit $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$.

Es sei $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ mit $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$. Dann lässt sich der Schaden im XL schreiben als

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{N} \max(X_i - D, 0).$$

Nach dem Satz über die Variationskoeffizienten der Jahresschäden aus dem Skript erhalten wir

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(S) \geq \mathrm{Vko}(N) = \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1.$$

Hieraus folgt $\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S})$. □

Anmerkung: Aus dem Satz über die Variationskoeffizienten folgt auch, dass der Variationskoeffizient der Gesamtschadenlast eines beliebigen kollektiven Modells immer mindestens so groß ist wie der Variationskoeffizient der zugehörigen Schadenzahl. Aus $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$ kann man also auch direkt

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1$$

folgern.

DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Variante D

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Mai 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- **Die Aufgaben dieser Klausur sind randomisiert, d.h. es gibt unterschiedliche Klausurvarianten.**

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 [30 Punkte]

(a) Für GLMs werden Verteilungen zugrunde gelegt, die zur Exponentialfamilie gehören. Dichten solcher Verteilungen genügen der allgemeinen Form

$$f(x,\vartheta,\varphi) = C(x,\varphi)\exp\left(\frac{x\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)}\right).$$

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Invers-Gauss-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

zur Exponentialfamilie gehört. [10 Punkte]

(ii) Leiten Sie für die Invers-Gauss-Verteilung aus den Bestimmungen zu den Funktionen b und a Erwartungswert und Varianz sowie die kanonische Link-Funktion her. [10 Punkte]

(b) Die Log-Normalverteilung hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma x}\exp\left(-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ und Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2(\exp(\sigma^2) - 1).$$

Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) allgemein berechnen. Jemand behauptet mit folgenden Definitionen die Zugehörigkeit der Log-Normal-Verteilung zur Exponentialfamilie nachgewiesen zu haben:

$$\vartheta = \mu, \quad b(\vartheta) = \exp(\sigma^2/2)\exp(\vartheta) \quad \text{und} \quad a(\varphi) = \exp(\sigma^2) - 1.$$

Damit würde die Funktion b bei Ableitungen unverändert reproduziert werden, d.h. die allgemeinen Darstellungen für Erwartungswert und Varianz sind gegeben und also der Beweis der Zugehörigkeit erbracht. Wie bewerten Sie diese Überlegung? Sehen Sie ggf. eine geeignete Transformation? Begründen Sie Ihre Sichtweise mathematisch. [10 Punkte]

Aufgabe 2 [25 Punkte]

(a) Der Korrelationskoeffizient ist wie folgt definiert:

$$\rho_{XY} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2 \sum(Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Für $X_i \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ und $Y_i = X_i^2$ (X-Werte gleich oft angenommen) ist dieser null, obwohl ein direkter funktionaler Zusammenhang vorliegt.
Nennen Sie den Grund für dieses Ergebnis. Welche Charakteristika dieser Situation führen zum Resultat null?
Verallgemeinern Sie diese und geben Sie damit ein Beispiel für eine andere Situation mit Korrelationskoeffizient null. [10 Punkte]

(b) Die nachstehende Tabelle beschreibt die Schadenbedarfe bzgl. der Einteilung in Regionalklassen getrennt nach städtischen und ländlichen Gebieten.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220		450	550
Land		176	260	360	

Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass in theoretischer wie praktischer Hinsicht drei verschiedene Konstellationen bzgl. vorhandener Abhängigkeiten inkl. deren praktische Umsetzung im Tarif entstehen.
Wie kann Abhängigkeit bei Schadenbedarfen in einem GLM umgesetzt werden? [15 Punkte]

Aufgabe 3 [25 Punkte]

In einem Bonus-Malus-System rückt man mit jedem schadenfreien Jahr eine Schadenfreiheitsklasse auf und sowohl Schadenbedarf als auch Beitrag reduzieren sich tendenziell. Ereignet sich ein Schaden wird dieses Risiko in der Folgeperiode zurückgestuft und aufgrund eines zu erwartenden höheren Schadenbedarfs wird ein deutlich höherer Beitrag erhoben.

(a) Nehmen Sie an, dass Sie in einem Unternehmen für die Erstellung der Daten zur Lieferung an den GDV zuständig sind und im Rahmen der Datenprüfung folgende Tabelle zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.000
2	850
3	800
4	820
5	770
6	750

Wie sehen Sie die Datenqualität? Haben Sie mit Blick auf die eingangs beschriebene Mechanik der Wanderung in einem Bonus-Malus-System eine mögliche Erklärung? Würde sich Ihre Bewertung der Datenqualität ändern, wenn Sie zusätzlich die Information hätten, dass in der SF-Klasse 4 eher geringe Bestände vorhanden sind? [10 Punkte]

(b) Für die Datenlieferung an den GDV werden die Daten i.d.R. nach mehr schadenfreien Jahren aufgeschlüsselt abgefragt als es der aktuellen GDV-Empfehlung entspricht. Nicht alle Versicherer folgen dieser Anforderung zur Datenaufschlüsselung und liefern nicht mehr SF-Klassen als in der Empfehlung vorhanden. Nehmen Sie an, dass Sie beim GDV für die Datenprüfung der eingegangenen Daten zuständig sind und folgende Tabelle, die auf mehreren Versicherern beruht, zu bewerten haben.

SF-Klasse	Schadenbedarf
1	1.100
2	875
3	820
4	760
5	770
6	740

Wie sehen Sie hier die Datenqualität? Haben Sie eine mögliche Erklärung für den Verlauf der Schadenbedarfe, wenn Sie annehmen, dass die GDV-Empfehlung bis vor kurzem bei SF 4 endete? Welche Handlungsoptionen sehen Sie bezüglich der Verwendung dieser Daten? [5 Punkte]

(c) *Bestimmung von Beitragssätzen und deren tarifliche Umsetzung:*
In der nachstehenden Tabelle finden sich Bestandsverteilung und Schadenbedarfe zu einem Bonus-Malus-System.

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	2.000	500	
2	3.000	250	
3	4.000	200	
4	6.000	150	
Gesamt	15.000		

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass der mit den Beständen gewichtete mittlere Beitragssatz 100% ist, die Beitragssätze (ganzzahlig gerundet) zu den einzelnen SF-Klassen.
Nennen Sie Gründe, aus denen so ermittelte Beitragssätze in der Praxis nicht verwendet werden. [10 Punkte]

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 [15 Punkte]

Zur Tarifierung eines pro Risiko-XLs 9.000 xs 1.000 für das Anfalljahr 2022 wurde für den Beobachtungszeitraum 2014 bis 2020 ein Burning Cost von 5% berechnet. Hierbei wurden folgende (indexierte) Schäden verwendet:

Schadennummer	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2015	1.500
2	2016	3.000
3	2016	1.500
4	2018	2.000

Für das Quotierungsjahr 2022 wird ein GNPI von 20.000 prognostiziert. Die Summe der revalorisierten GNPIs für den Beobachtungszeitraum 2014–2020 beträgt 80.000.

Auf Basis dieser Burning Cost-Rechnung sollen kollektive Modelle zur Tarifierung des XLs angepasst werden, wobei für die Schadenzahl eine Poisson-Verteilung und für die Schadenhöhe eine Pareto-Verteilung verwendet werden soll. Dem Pricing-Aktuar ist bekannt, dass für das gedeckte Segment üblicherweise ein Pareto-Alpha von 1,6 passt.

(a) Verwenden Sie alle drei Ansätze aus dem Skript, Abschnitt 5.4, um jeweils ein kollektives Modell anzupassen. Nehmen Sie hierbei für die Ansätze 2 und 3 an, dass der Burning Cost ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden im bestrichenen Layer ist. Zur Schätzung des Pareto-Alphas aus den Daten soll der biaskorrigierte ML-Schätzer verwendet werden. *[12 Punkte]*

(b) Welchen Ansatz würden Sie bei dieser Datenlage wählen (mit *kurzer* Begründung)? *[3 Punkte]*

Hinweis: Falls Sie den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha nicht berechnen können, dann verwenden Sie für Ansatz 1 und 2 ein Pareto-Alpha von 1,3.

Aufgabe 5 [25 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten pro Ereignis 8.000 xs 2.000, bei dem *keine* Two Risk Warranty vereinbart ist. Zur Tarifierung des Vertragsjahres 2022 liegen Prämien für den Zeitraum 2015–2020, Prämien-Schätzungen für 2021 und 2022 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2015	100.000	100	100
2016	110.000	103	103
2017	130.000	108	105
2018	140.000	110	107
2019	160.000	114	110
2020	185.000	118	115
2021	190.000	120	118
2022	200.000	125	120

Im Beobachtungszeitraum 2015–2020 sind die Schadenereignisse bekannt, die die Meldegrenze von 1.000 überschreiten. Es gab zwei NatCat-Schadenereignisse, bei denen viele Einzelrisiken betroffen waren:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
1	2015	2.000	Flut
2	2018	5.000	Sturm

Ferner haben folgende Einzelschäden die Meldegrenze überschritten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	Kommentar
3	2016	1.500	Feuer
4	2017	3.000	Feuer
5	2020	5.000	Feuer

(a) Berechnen Sie die revalorisierten Prämien 2015–2022 sowie die Summe der revalorisierten Prämien im Beobachtungszeitraum 2015–2020. *[6 Punkte]*

(b) Berechnen Sie die as-if-Schäden für das Quotierungsjahr 2022. Berücksichtigen Sie hierbei die unterschiedliche Charakteristik der Schäden. *[10 Punkte]*

(c) Ist die Schadenmeldegrenze von 1.000 für die Burning Cost-Rechnung ausreichend? *[2 Punkte]*

(d) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) zur Berechnung eines Burning Costs für den Beobachtungszeitraum 2015–2020, der ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden in 2022 ist. Achten Sie hierbei auf konsistente Berücksichtigung der NatCat- und Einzelschäden. *[7 Punkte]*

Aufgabe 6 [30 Punkte]

Wir betrachten ein Feuer-Risiko mit Gesamtversicherungssumme $v = 100.000$. Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligungen an einem gelayerten Programm für dieses Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	10.000	10.000	40%	40
2	30.000	20.000	50%	50
3	50.000	50.000	20%	10

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 20.000 xs 5.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(a) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte c_i^{RV} xs d_i^{RV}, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt. [10 Punkte]

(b) Für eine Exposurequotierung soll die Feuer-Exposurekurve $G(x) = x(2-x)$ verwendet werden. Bestimmen Sie die Schadenhöhenverteilung des betrachteten Risikos mit Versicherungssumme v unter der Annahme, dass die Exposurekurve G angemessen ist. Beurteilen Sie, ob die Annahme plausibel ist. [5 Punkte]

(c) Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 60% und die Exposurekurve G aus (b) – auch falls Sie diese für nicht plausibel halten.

Hierbei können Sie wie folgt vorgehen:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Prämie p_{total} für das komplette Risiko (also für 100% des Risikos mit Versicherungssumme v und einer Priorität von null) kennen.
- Verwenden Sie p_{total} und die Versicherungssumme v um Feuer-Exposurequotierungen für die Layer c_i xs d_i sowie die Layer c_i^{RV} xs d_i^{RV} durchzuführen und berechnen Sie die Verhältnisse

$$\pi_i := \frac{\text{Ergebnis für } c_i^{RV} \text{ xs } d_i^{RV}}{\text{Ergebnis für } c_i \text{ xs } d_i}$$

(hier kürzt sich p_{total} raus).

- Das Verhältnis π_i gibt an, welchen Anteil der RV am erwarteten Schaden des EV im Layer c_i xs d_i trägt.

[15 Punkte]

Aufgabe 7 [10 Punkte]

Wir betrachten einen Schadenexzedenten C xs D. Die Schäden größer D seien durch ein kollektives Modell $\sum_{i=1}^{\hat{N}} Y_i$ gegeben. Für die xs-Schadenzahl $\hat{N}$ gelte

$$\mathrm{E}(\hat{N}) = \lambda > 1 \quad \text{und} \quad c(\hat{N}) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus dem Skript, dass für die Standardabweichung $\sigma(\hat{S})$ der xs-Schadenlast $\hat{S}$ gilt

$$\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S}).$$

Hinweis: Betrachten Sie zusätzlich das kollektive Modell $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$ ist, und wenden Sie den Satz aus Abschnitt 3.5 im Skript an.

Aufgabe 8 [20 Punkte]

Unabhängige Teilportefeuilles (Sparten eines EV oder auch Risikoklassen) mit Prämien $P_1, \ldots, P_I$ und Schäden $S_1, \ldots, S_I$ sollen mit Quoten $\tau_1, \ldots, \tau_I$ rückversichert werden. Es bezeichne q_i die Quotenabgabe von τ_i, d.h. der Selbstbehaltsschaden für Portefeuille i ist $\tilde{S}_i = (1 - q_i) \cdot S_i$ und der Schaden des Rückversicherers $\hat{S}_i = q_i \cdot S_i$.

Die Transaktionskosten seien von der Form $\tilde{K}_i = c \cdot \mathrm{Var}(\hat{S}_i)$ mit einem $c > 0$.

Beweisen Sie: Damit die Transaktionskosten bei vorgegebener Varianz des Selbstbehalts $\tilde{S}_1 + \ldots + \tilde{S}_I$ minimal werden, müssen die Quotenabgaben q_i alle gleich hoch gewählt werden.

Hinweis: Das entsprechende Resultat für Transaktionskosten der Form $\tilde{K}_i = c_i \cdot \sigma(\hat{S}_i)$ wird im Skript in Abschnitt 6.1.4 bewiesen. Der verlangte Beweis kann komplett analog geführt werden.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

(a) *Zu (i):* Ausrechnen des Exponentialterms ergibt

$$\lambda\left(\frac{x}{2\mu^2}-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2x}\right).$$

Der letzte Summand definiert dann zusammen mit dem Wurzelterm die Funktion C. Das Übrige lässt sich darstellen wie folgt:

$$\exp\left(\frac{x\frac{-1}{2\mu^2}-\frac{-1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Damit hat man $\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2}$ und folglich $b(\vartheta)=-\sqrt{-2\vartheta}$ sowie $a(\varphi)=1/\lambda$ und somit die Zugehörigkeit zur Exponentialfamilie nachgewiesen.

Zu (ii): Bekanntlich lassen sich für Verteilungen der Exponentialfamilie der Erwartungswert und Varianz aus den Funktionen b und a (s.o.) berechnen:

$$\mathrm{E}(X)=b'(\vartheta)\quad\text{und}\quad \mathrm{Var}(X)=a(\varphi)b''(\vartheta).$$

Mit $b'(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-1/2}$ und $b''(\vartheta)=(-2\vartheta)^{-3/2}$ folgt $\mathrm{E}(X)=\mu$ und $\mathrm{Var}(X)=\mu^3/\lambda$. Für die kanonische Link-Funktion g gilt

$$g(\text{Erwartungswert})=g(\mu)=\eta(\text{linearer Prädiktor})=\vartheta=\frac{-1}{2\mu^2},$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen genau im Fall der kanonischen Link-Funktion gilt.

(b) Ein solcher Nachweis der Zugehörigkeit kann nach Definition der Exponentialfamilie nur über die Dichte erfolgen. Ausrechnen des Exponentialterms in der Darstellung der Dichte ergibt neben dem Quadrat des Logarithmus, der in die Funktion C sortiert werden könnte, einen Term, der dann wie folgt der obigen allgemeinen Darstellung entsprechen müsste:

$$\frac{x\vartheta-b(\vartheta)}{a(\varphi)}=\frac{\mu\log(x)-\mu^2/2}{\sigma^2}.$$

Diese Identität ist in x nicht erfüllbar. Zudem sind mit der Setzung $\vartheta=\varphi$ die Exponentialausdrücke von Erwartungswert und Varianz aus dieser Darstellung nicht zu reproduzieren. Somit gehört die Log-Normal-Verteilung nicht zur Exponentialfamilie.

Zu Aufgabe 2:

(a) Der Korrelationskoeffizient misst lediglich einen linearen Zusammenhang, hier ist dieser aber nichtlinear.
Es gibt zwei Charakteristika: Die Argumentwerte sind symmetrisch um null verteilt und der funktionale Zusammenhang ist durch eine gerade Funktion gegeben. Im Zähler tritt folglich jeder positive Summand auch mit negativem Vorzeichen auf, so dass sich die Summanden paarweise zu null ergänzen.
Daher ist zum einen eine Verallgemeinerung möglich auf ganzzahlige Argumente von $-n$ bis n, zum andern kann man auch andere gerade Funktionen wählen wie etwa cos und cosh.

(b) Folgende Wahlen an Werten sind etwa möglich.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	325	450	550
Land	120	176	260	360	440

Dies entspricht völliger Unabhängigkeit, da das Land immer 20% Abschlag auf Stadt hat und würde somit so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	320	450	550
Land	135	176	260	360	385

Hier zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit, da das Land Abschläge auf Stadt hat, die zwischen 10% und 30% variieren. Auch dies würde so tariflich umgesetzt werden.

Regionalklasse	1	2	3	4	5
Stadt	150	220	330	450	550
Land	125	176	260	360	440

Auch hier findet sich eine Abhängigkeit, die allerdings sehr schwach ausgeprägt ist, da die Abschläge recht nahe bei 20% liegen bzw. genau 20% sind. Für die tarifliche Umsetzung wäre daher der Einfachheit der Tarifstruktur Vorrang zu geben, d.h. die leichte Abhängigkeit nicht umzusetzen und immer 20% Abschlag zu verwenden.
In einem GLM kann eine solche Abhängigkeit dadurch umgesetzt werden, dass aus den zwei Dimensionen Regionalklasse und Stadt/Land eine gemacht wird, indem je Regionalklasse nach Stadt/Land unterschieden wird und somit 10 Ausprägungen entstehen.

Zu Aufgabe 3:

(a) Aufgrund des normalerweise zu erwartenden monoton fallenden Verlaufs der Schadenbedarfe, ist klar zu vermuten, dass die Daten nicht korrekt sind, d.h. es sind weitere Analysen erforderlich.
Möglicherweise sind schadenbehaftete Risiken nicht bzw. nicht vollständig regelgemäß zurückgestuft worden. Eine andere Erklärung könnte in Sondereinstufungen wie etwa Zweitwagen liegen.
Bei geringen Beständen kann es sich auch um zufällige Schwankungen handeln; eine weitere Betrachtung dürfte aber immer angemessen sein.

(b) Die verlängerte Empfehlung des GDV erfolgte sehr wahrscheinlich aus dem Grund heraus, dass es in der SF-Klasse 4 weitere Differenzierungsmöglichkeiten gegeben hat, d.h. dort waren Risiken mit mehr als 4 schadenfreien Jahren und einem niedrigeren Schadenbedarf enthalten. Wenn nun signifikante Anteile in den betrachteten Daten aber nicht weiter als bis SF 4 aufgeschlüsselt sind, so befinden sich gerade auch in SF 4 Risiken mit niedrigerem Schadenbedarf, die eigentlich in SF 5 oder 6 gehören. Dadurch wird ggf. der Schadenbedarf in SF 4 hier zu gering erscheinen. Um eine korrekte Analyse über SF 4 hinaus durchzuführen, sind solche Daten, sofern nicht nachbesserbar, auszuschließen.

(c) Die in der Tabelle fehlende Werte ergeben sich zu

SF-Klasse	Bestand in JE	Schadenbedarf	Beitragssatz
1	2.000	500	217
2	3.000	250	109
3	4.000	200	87
4	6.000	150	65
Gesamt	15.000	230	100

In der Praxis findet sich eine solche Beitragssatzgestaltung nicht, da dabei auch recht hohe Beitragssätze auftreten, die psychologisch nicht als Rabatt für Schadenfreiheit wirken. Daher wird als Bezugsklasse mit dem Beitragssatz 100% eher eine untere Klasse wie hier z.B. Klasse 1 verwendet, was durchweg dann zu Beitragssätzen unter 100% in den anderen SF-Klassen führt.

Zu Aufgabe 4:

(a) Für die Ansätze 1 und 2 verwenden wir den biaskorrigierten ML-Schätzer für das Pareto-Alpha:

$$\widehat{\alpha}^* = \frac{3}{\ln(1{,}5) + \ln(3{,}0) + \ln(1{,}5) + \ln(2)} \approx 1{,}15.$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 1:

$$\frac{20.000}{80.000} \cdot 4 = 1{,}0$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 2:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,15}}{1-1,15} \cdot \left(3.000^{1-1,15} - 1.000^{1-1,15}\right)} \approx 0,99$$

Erwartete Schadenzahl bei Ansatz 3:

$$\frac{5\% \cdot 20.000}{\frac{1.000^{1,6}}{1-1,6} \cdot \left(3.000^{1-1,6} - 1.000^{1-1,6}\right)} \approx 1,24$$

Es werden also Modelle mit Schadenzahlverteilung Poi(λ) und Schadenhöhenverteilung Pareto($1.000, \alpha$) angepasst. Die drei Ansätze liefern folgende Parameter:

	λ	α
Ansatz 1	1,00	1,15
Ansatz 2	0,99	1,15
Ansatz 3	1,24	1,60

(b) Man sollte Ansatz 3 verwenden, da der biaskorrigierte ML-Schätzer unter Verwendung von nur vier Schäden sehr unsicher ist.

Zu Aufgabe 5:

(a) Bezeichnet P_i die Prämie des Jahres i und I_i^P den Prämienindex im Jahr i, so berechnet sich die revalorisierte Prämie $\bar{P}_i$ mittels

$$\bar{P}_i = P_i \cdot \frac{I_{2022}^P}{I_i^P}$$

und man erhält

Jahr	revalorisierte Prämie
2015	125.000
2016	133.495
2017	150.463
2018	159.091
2019	175.439
2020	195.975
2021	197.917
2022	200.000

Die Summe für den Zeitraum 2015–2020 beträgt 939.462.

(b) Es bezeichne I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Ein NatCat-Schaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem „as-if-Faktor“

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Für die beiden NatCat-Schäden erhalten wir:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
1	2015	2000	1,92	3.840
2	2018	5000	1,41	7.049

Ein Einzelschaden aus dem Jahr i wird dann zur Berechnung des as-if-Schadens mit dem as-if-Faktor

$$\frac{I_{2022}^S}{I_i^S}$$

multipliziert. Wir erhalten:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe	as-if-Faktor	Schadenhöhe as-if
3	2016	1500	1,17	1.748
4	2017	3000	1,14	3.429
5	2020	5000	1,04	5.217

(c) Ja, die Meldegrenze von 1.000 ist ausreichend, da für alle Jahre i im Beobachtungszeitraum

$$\frac{P_{2022}}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2 \quad \text{und} \quad \frac{I_{2022}^S}{I_i^S} \leq 2$$

gilt.

(d) Burning Cost per Event:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Event}} = \frac{1.840 + 5.049}{6 \cdot 200.000} \approx 0{,}57\%$$

Burning Cost per Risk:

$$\mathrm{BC}_{\text{per Risk}} = \frac{0 + 1.429 + 3.217}{939.462} \approx 0{,}49\%$$

Burning Cost insgesamt:

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BC}_{\text{per Event}} + \mathrm{BC}_{\text{per Risk}} \approx 1{,}07\%$$

Zu Aufgabe 6:

(a) Es sei $C := 20.000$ und $D := 5.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\mathrm{RV}} := 0$ und $d_i^{\mathrm{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\mathrm{RV}} = \frac{[\min(C+D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\mathrm{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	4.000	0	0
2	19.000	28.000	22.000
3	29.000	30.000	50.000

(b) Für die Verteilungsfunktion F des Schadengrads Q des Risikos gilt

$$F_Q(x) = 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} = 1 - \frac{2(1-x)}{2} = 1 - x \qquad (x \in [0,1])$$

Hieraus erhält man die Verteilungsfunktion F der Schadenhöhenverteilung:

$$F(x) = F_Q(x/v) = 1 - \frac{x}{v} \qquad (x \in [0, v])$$

Dies ist eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, v]$. Die Exposurekurve entspricht also keiner plausiblen Schadenhöhenverteilung.

(c) Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{G\left(\frac{c_i^{\mathrm{RV}} + d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right) - G\left(\frac{d_i^{\mathrm{RV}}}{v}\right)}{G\left(\frac{c_i + d_i}{v}\right) - G\left(\frac{d_i}{v}\right)}.$$

Mit $s_i := 60\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	24	0,0%	0,0
2	30	91,9%	27,6
3	6	84,0%	5,0
Summe			32,6

Die Exposurequotierung liefert also einen Schadenbedarf von 32,6 für den RV-Layer.

Zu Aufgabe 7:

Es gilt

$$\mathrm{Var}(\hat{N}) = \mathrm{E}(\hat{N}) \cdot \big(\mathrm{E}(\hat{N}) \cdot c(\hat{N}) + 1\big) = \lambda \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} + 1\right) = \lambda^2$$

und somit $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$.

Es sei $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$ mit $N = \hat{N}$ und $X_i := \min(Y_i, C + D)$. Dann lässt sich der Schaden im XL schreiben als

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{N} \max(X_i - D, 0).$$

Nach dem Satz über die Variationskoeffizienten der Jahresschäden aus dem Skript erhalten wir

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(S) \geq \mathrm{Vko}(N) = \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1.$$

Hieraus folgt $\sigma(\hat{S}) \geq \mathrm{E}(\hat{S})$. □

Anmerkung: Aus dem Satz über die Variationskoeffizienten folgt auch, dass der Variationskoeffizient der Gesamtschadenlast eines beliebigen kollektiven Modells immer mindestens so groß ist wie der Variationskoeffizient der zugehörigen Schadenzahl. Aus $\mathrm{Vko}(\hat{N}) = \sqrt{\lambda^2}/\lambda = 1$ kann man also auch direkt

$$\mathrm{Vko}(\hat{S}) \geq \mathrm{Vko}(\hat{N}) = 1$$

folgern.

Zu Aufgabe 8:

Wir maximieren das erwartete Selbstbehaltsergebnis

$$\sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - \tilde{K}_i = \sum_{i=1}^{I} P_i - \mathrm{E}(S_i) - q_i^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_i)$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$.

Für die optimalen $q_1, \ldots, q_I$ gibt es einen Lagrange-Multiplikator λ, so dass die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{I} P_\nu - \mathrm{E}(S_\nu) - q_\nu^2 c \cdot \mathrm{Var}(S_\nu) + \lambda\left[\sigma_0^2 - \sum_{\nu=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu)\right]\right) = 0$$

für $i = 1, \ldots, I$ erfüllt sind. Wegen $\mathrm{Var}(\tilde{S}_\nu) = (1 - q_\nu)^2 \,\mathrm{Var}(S_\nu)$ erhalten wir durch Differenzieren für $i = 1, \ldots, I$:

$$-2q_i c \cdot \mathrm{Var}(S_i) + \lambda \cdot 2(1 - q_i)\,\mathrm{Var}(S_i) = 0,$$

d.h.

$$q_i = \frac{2\lambda\,\mathrm{Var}(S_i)}{2(c+\lambda)\,\mathrm{Var}(S_i)} = \frac{\lambda}{c+\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, I).$$

Bei vorgegebenem σ_0^2 wird λ durch die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{Var}(\tilde{S}_i) = \sigma_0^2$ festgelegt.

$\square$