



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

## **Lebensversicherung 1**

gemäß Prüfungsordnung 4  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 21. Mai 2021

**Musterlösung**

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Karsten Knauf, Tanja Sanne, Dr. Olaf Schmitz, Dr. Marco Schnurr

**Aufgabe 1.** [Beitragsüberträge, Bilanzierung nach HGB] [6 Punkte]

Ermitteln Sie die Höhe des Beitragsübertrags zum 31.12.2020 für folgende Lebensversicherungspolice (Hinweis: Etwaige Kostenkorrekturen nach alten steuerlichen Erlassen sind für die Aufgabe nicht zu berücksichtigen):

- (a) [1,5 Punkte] Der Versicherungsbeginn der Police ist der 1.3.2020, es liegt eine Police mit jährlicher Beitragzahlung vor, der Jahresbeitrag beträgt 1.200 Euro
- (b) [1,5 Punkte] Der Versicherungsbeginn der Police ist der 1.6.2020, es liegt eine Police mit vierteljährlicher Beitragzahlung vor, der vierteljährlich fällige Beitrag beträgt 600 Euro
- (c) [1,5 Punkte] Der Versicherungsbeginn der Police ist der 1.4.2020, es liegt eine Police mit halbjährlicher Beitragzahlung vor, der halbjährlich fällige Beitrag beträgt 600 Euro
- (d) [1,5 Punkte] Der Versicherungsbeginn der Police ist der 1.5.2020, es liegt eine Police mit monatlicher Beitragzahlung vor, der Monatsbeitrag beträgt 600 Euro

Lösungsvorschlag:

- (a) Der als Jahresbeitrag zu zahlende Beitrag beträgt 1.200 Euro. Davon sind  $\frac{2}{12}$ -tel also  $\frac{2}{12} \cdot 1.200 \text{ Euro} = 200 \text{ Euro}$  als Beitragsübertrag anzusetzen.
- (b) Der vierteljährlich zu zahlende Beitrag beträgt 600 Euro. Davon sind  $\frac{2}{3}$ -tel also  $\frac{2}{3} \cdot 600 \text{ Euro} = 400 \text{ Euro}$  als Beitragsübertrag anzusetzen, da die letzte Beitragsfälligkeit vor dem Bilanzstichtag der 1.12.2020 ist.
- (c) Der halbjährlich zu zahlende Beitrag beträgt 600 Euro. Davon sind  $\frac{3}{6}$ -tel also  $\frac{1}{2} \cdot 600 \text{ Euro} = 300 \text{ Euro}$  als Beitragsübertrag anzusetzen, da die letzte Beitragsfälligkeit vor dem Bilanzstichtag der 1.10.2020 ist.
- (d) Es ergibt sich kein Beitragsübertrag (letzte Zahlung des Monatsbeitrags vor dem Bilanzstichtag ist am 1.12.2020, die nächste am 1.1.2021).

**Aufgabe 2.** [Schadenrückstellung/ Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle, Bilanzierung nach HGB] [24 Punkte]

Frau Musterfrau hat eine Berufsunfähigkeitsversicherung bei der Happy Life AG mit einer Monatsrente in Höhe von 3.000 Euro.

Am 1.8.2020 meldet sie bei dem Versicherer ihre Berufsunfähigkeit.

Ihre Berufsunfähigkeit wird von dem Versicherer am 1.3.2021 rückwirkend zum 1.8.2020 anerkannt. Die Aufstellung des Jahresabschlusses zum 31.12.2020 erfolgt am 15.3.2021.

Die rechnerische Deckungsrückstellung für Ihre Police im Anwartschaftsfall beträgt zum 31.12.2020 18.000 Euro und im Leistungsfall 324.000 Euro. Zum 31.12.2021 beträgt die Deckungsrückstellung 297.000 Euro für den Leistungsfall.

- (a) [3 Punkte] In welcher Höhe ist eine Schadenrückstellung zum 31.12.2020 zu bilden?
- (b) [3 Punkte] Geben Sie bitte den Buchungssatz für die Bildung der Schadenrückstellung in 2020 an.
- (c) [2 Punkte] Welche Höhe hat die Deckungsrückstellung zum 31.12.2020? (Geben Sie bitte den Wert in Euro und eine kurze Begründung an.)
- (d) [9 Punkte] Geben Sie bitte die Buchungssätze für die in 2021 vorzunehmenden Buchungen der Rückstellungen und der Zahlungen für Versicherungsfälle an.
- (e) [4 Punkte] Ermitteln Sie bitte das buchhalterische und das wirtschaftliche Abwicklungsergebnis für die Abwicklung der Schadenrückstellung aus 2020.
- (f) [3 Punkte] Was folgern Sie aus dem Vergleich von buchhalterischem und wirtschaftlichem Abwicklungsergebnis für die Aussagekraft des buchhalterischen Abwicklungsergebnisses bei Berufsunfähigkeitsversicherungen?

Lösungsvorschlag:

- (a) Die Höhe der Schadenrückstellung zum 31.12.2020 ergibt sich als  
$$5 \cdot 3.000 \text{ Euro} + 324.000 \text{ Euro} - 18.000 \text{ Euro} = 321.000 \text{ Euro}$$
- (b) Veränderung Schadenrückstellung an Schadenrückstellung 321.000 Euro



- (c) Zum 31.12.2020 ist die Leistung noch nicht anerkannt. Es ist daher die anwartschaftliche Deckungsrückstellung in Höhe von 18.000 Euro anzusetzen.
- (d) In 2021 wird die Leistung anerkannt. Die Rentenleistungen für 2021 und für das Vorjahr ab August 2020 sind zu zahlen. Die vorhandene Schadenrückstellung wird aufgelöst. Die Deckungsrückstellung wird auf die Rückstellung für den Leistungsfall erhöht im Rahmen der Gesamtbuchung für die Deckungsrückstellung zum 31.12.2021. Damit ergeben sich folgende Buchungen:

Schadenrückstellung an Veränderung Schadenrückstellung 321.000  
Euro

Zahlungen für Versicherungsfälle an Bank 51.000 Euro

(12 Rentenzahlungen für 2021 und 5 Rentenzahlungen für 2020 in Höhe 3.000 Euro)

Veränderung Deckungsrückstellung an Deckungsrückstellung 279.000  
Euro

(279.000 Euro = 297.000 Euro – 18.000 Euro)

(Die Buchung der Deckungsrückstellung erfolgt erst am Ende der Rechnungsperiode im Rahmen der Neuberechnung und Gesamtbuchung der Deckungsrückstellung)

- (e) Abwicklungsergebnis – buchhalterisch: 321.000 Euro – 15.000 Euro = 306.000 Euro

(15.000 Euro = 5 \* 3.000 Euro)

Abwicklungsergebnis – wirtschaftlich: 321.000 – 15.000 – 306.000 = 0

(306.000 Euro ist die Erhöhung der Deckungsrückstellung vom Anwartschaftsfall auf den Leistungsfall zum 31.12.2020)



- 
- (f) Wie das Zahlenbeispiel unter (e) belegt, ergibt sich bei Berufsunfähigkeitsversicherungen beim Übergang vom Anwartschafts- in den Leistungsfall ein hoher kaufmännischer Abwicklungsgewinn, obwohl die Bildung der Schadenrückstellung in korrekter Höhe erfolgt ist. Dies indiziert fälschlicherweise eine zu hohe Rückstellungsbildung weil der Aufwand für die Erhöhung der Deckungsrückstellung vom Anwartschafts- auf den Leistungsfall nicht berücksichtigt wird.

**Aufgabe 3.** [Überschussverwendung, Bilanzierung nach HGB] [9 Punkte]

Es liegt eine Risikoversicherung mit Überschussbeteiligungssystem Verrechnung mit den Beiträgen vor. Der Jahresbeitrag hat die Höhe 2.000 Euro. Der Gewinnanteil beträgt 20% des Beitrags. Der Gewinnanteil wird zu 75% aus der RfB und zu 25% aus der Direktgutschrift finanziert. Bitte stellen Sie die erforderlichen Buchungssätze (für Beitragszahlung, RfB und Direktgutschrift) dar.

Lösungsvorschlag:

Der zuzuweisende Gewinnanteil hat die Höhe  $20\% \cdot 2.000 \text{ Euro} = 400 \text{ Euro}$ . Davon sollen 75%, also 300 Euro aus der RfB und 25%, also 100 Euro aus der Direktgutschrift finanziert werden. Damit ergeben sich folgende Buchungen:

Forderungen an Versicherungsnehmer an Beitrag 2.000 Euro (Sollstellung entsprechend des vertraglich festgelegten Beitrags)

Bank an Forderungen an Versicherungsnehmer 1.600 Euro (fällige Beitragszahlung des VN um Überschussbeteiligung gekürzt)

Sonstiger versicherungstechnischer Aufwand an Forderungen an Versicherungsnehmer 100 Euro

(Direktgutschrift)

Rückstellung für Beitragsrückerstattung an Forderungen an Versicherungsnehmer 300 Euro

(Entnahme aus der RfB)

**Aufgabe 4.** [*Fondsgebundene Lebensversicherung, Bilanzierung nach HGB*]  
[6 Punkte]

Welche Auswirkung hat die Veränderung der Wertentwicklung der Fondsanteile aus Marktwertänderungen bei einer Fondsgebundenen Lebensversicherung auf das Ergebnis des Versicherers?

Erläutern Sie mit Bezug auf den Wertansatz der Kapitalanlagen aus der fondsgebundenen Lebensversicherung (Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko von Inhabern von Lebensversicherungspolice) und den Wertansatz der Deckungsrückstellung für die fondsgebundene Lebensversicherung (Versicherungstechnische Rückstellungen im Bereich der Lebensversicherung, soweit das Anlagerisiko von den Versicherungsnehmern getragen wird).

Welche Positionen in Bilanz und GuV sind von Kursänderungen der Fondsanteile betroffen? Wie verändern sich diese Positionen bei Kursanstieg?

(Es soll sich um eine reine Fondsgebundene Lebensversicherung ohne Garantiekomponente handeln)

Lösungsvorschlag:

Bei einer reinen Fondsgebundene Lebensversicherung ohne Garantiekomponente liegt das Risiko aus den Wertschwankungen der Fondsanteile voll beim Versicherungsnehmer, d.h. beim Versicherer ergibt sich hieraus kein Einfluss auf das Ergebnis.

Bilanziell drückt sich das darin aus, dass die Versicherungstechnischen Rückstellungen für Rechnung und Risiko der Versicherungsnehmer mit dem Wert der zugeordneten Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko der Versicherungsnehmer angesetzt werden und sich damit aus den Marktwertänderungen der Fondsanteile nur eine Bilanzverkürzung oder Verlängerung ergibt, aber keine Auswirkung auf das Ergebnis.

Betroffene Bilanzpositionen:

Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko von Inhabern von Lebensversicherungspolice

Versicherungstechnische Rückstellungen im Bereich der Lebensversicherung, soweit das Anlagerisiko von den Versicherungsnehmern getragen wird (Fondsgebundene Deckungsrückstellung)

Beide vorgenannten Bilanzpositionen erhöhen sich bei Kursanstieg der Fondsanteile um den gleichen Betrag (Kurssteigerung der Fondsanteile).

Betroffene GuV-Positionen:

Nicht realisierte Gewinne/Verluste aus Kapitalanlagen

Veränderung der fondsgebundenen Deckungsrückstellung

Beide vorgenannten GuV-Positionen erhöhen sich bei Kursanstieg der Fondsanteile um den gleichen Betrag (Kurssteigerung der Fondsanteile).



**Aufgabe 5. [ALM] [30 Punkte]**

Ihr Vorstand arbeitet gerade an seinem neuen Strategieprogramm für die Lebensversicherung, welches unter anderem einen Baustein „Reduktion unternehmerischer Risiken“ beinhalten soll. Ihr neuer Kollege aus dem Kapitalanlagebereich schlägt daraufhin vor, für die kommenden Jahre die Risiken in der Kapitalanlage ohne Wenn und Aber zu minimieren.

- (a) [5 Punkte] Welche Rückmeldung geben Sie Ihrem Kollegen zu dieser Idee? Stellen Sie dar, welche Aspekte zusätzlich berücksichtigt werden sollten und begründen Sie dies.
- (b) [4 Punkte] Ihr Kollege gerät ins Grübeln. Er bittet Sie, ihm eine einfache Kennzahl zu nennen, mit der die aus den Verpflichtungen resultierende Mindestanforderung bestimmt werden könnte.

Außerdem möchte er gern wissen, mit welcher Kennzahl er die Ertragskraft der Kapitalanlagen mit dieser Mindestanforderung vergleichen kann.

Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass

- in den Versicherungsverträgen ausschließlich Zinsgarantien gegeben wurden,
- keine Anforderungen aus einer Zinszusatzreserve bestehen und
- die Marktwerte der Kapitalanlagen jederzeit vollständig mit ihren Buchwerten übereinstimmen.

Damit Ihr Kollege die von Ihnen vorgeschlagenen Kennzahlen verstehen kann, formulieren Sie für ihn bitte eine kurze Definition.

- (c) [15 Punkte] Nun möchten Sie gemeinsam herausfinden, mit welchem Ergebnis für die beiden Kennzahlen sie am Ende des Jahres rechnen können.

Sie wissen aus eigenen Hochrechnungen, dass Sie am Ende diesen Jahres folgende Zusammensetzung des Versichertenbestands haben werden:

Rechnungs- zins	Anzahl	Versicherungs- summe [EUR]	Deckungs- rückstellung [EUR]
0%	2.679	359.781.521	678.123
0,5%	365	1.896.002	9.365
0,9%	3.788	430.566.011	1.002.345
1,25%	5.679	796.244.337	1.237.669
1,50%	10.879	1.579.896.423	4.567.921

Ihre Kapitalanlagen setzen sich wie folgt zusammen:

	Buchwert [EUR]
Bonds	7.083.175
Immobilien	236.106
Aktien	157.404
Fonds	393.510

Ihr Kollege hat dazu noch ein paar Zusatzinformationen:

- Die Bonds haben einem Durchschnittskupon von 1,2%. Eine Abgrenzung auf das Bilanzjahr ändert an dieser Höhe nichts.
- Die Immobilien haben stabile Mieterträge in Höhe von 4% ihres Buchwerts.
- Die Aktien haben eine Dividendenrendite von 6%.
- Ihre Fonds haben eine Ausschüttungsquote von 2% bezogen auf den Buchwert.
- Die Buchwerte der Kapitalanlagen sind zufällig zu Beginn und zum Ende des Jahres identisch. (Auf eine Hardy-Korrektur können Sie bei der Beantwortung dieser Aufgabe verzichten.)
- Neu- oder Wiederanlage von Geldern ändert aktuell an den obigen Konditionen nichts.

Ermitteln Sie die beiden Kennzahlen und stellen Sie diese gegenüber. Geben Sie diese bitte in Prozent und mit zwei Nachkommastellen an.

Kann Ihr Vorstand sich beruhigt zurücklehnen?

- (d) [6 Punkte] Ihr Vorstand glaubt an weiter sinkende Zinsen und möchte sich dagegen absichern. Welche Möglichkeiten stehen Ihrem Unternehmen in der Kapitalanlage zur Verfügung? Nennen Sie drei mögliche Konstruktionen und erläutern Sie diese kurz.

Lösungsvorschlag:

- (a) In einem Lebensversicherungsunternehmen gibt es starke Abhängigkeiten zwischen den Kapitalanlagen und den passivseitigen Verpflichtungen.

Die Ergebnisse der Kapitalanlage beeinflussen die Höhe der Leistungen an die Kunden.

Aus den gewährten Garantien (vertragsrechtliche Verpflichtungen) gegenüber den Kunden wiederum ergeben sich (Mindest-)Anforderungen an die Performance der Kapitalanlage.

Auch die Kundenerwartungen und die Anforderungen des Marktes/Wettbewerbs – beispielsweise an eine marktfähige Überschussbeteiligung – sollten beachtet werden.

Zudem gilt es, die Wirkung des Aufsichtsrechts (z.B. zur Mindestzuführung zur RfB) und des Bilanzrechts sowohl auf der Aktiv- als auch auf der Passivseite zu beachten. Auch ökonomisch gleichlaufende Effekte auf der Aktiv- und der Passivseite können bilanziell unterschiedlich wirken!

- (b) Die Mindestanforderung aus den Verpflichtungen könnte aus dem mittleren bilanziellen Rechnungszins ermittelt werden. Dieser ist das mit der Deckungsrückstellung gewichtete Mittel über die für die Bilanzierung verwendeten Rechnungszinsen der einzelnen Verträge.

Die Ertragskraft der Kapitalanlagen könnte mithilfe der laufenden Durchschnittsverzinsung der Kapitalanlagen gemessen werden. (Hinweis: Diese ist hier aufgrund der unterstellten Vereinfachungen identisch zur bereinigten laufenden Durchschnittsverzinsung und zur Nettoverzinsung auf Buchwertbasis, sowie zur Marktwertverzinsung.) Diese ist definiert als

Kuponzahlungen der Bonds

- zzgl. Erträge aus Mieten und Grundstücken
- zzgl. Dividenden von Aktien und Unternehmensbeteiligungen
- zzgl. Ausschüttungen von Fonds
- abzgl. der Aufwendungen für die Verwaltung von Kapitalanlagen,
- abzgl. Zinsaufwendungen und
- abzgl. sonstige Aufwendungen für die Kapitalanlage

(jeweils abgegrenzt auf das Bilanzjahr)

bezogen auf die mittlere Kapitalanlage (zum Buchwert).

- (c) Die gesamte Deckungsrückstellung beträgt 7.495.423 EUR.

Der **mittlere bilanzielle Rechnungszins** ermittelt sich als mit der Deckungsrückstellung gewichtetes Mittel der Rechnungszinsen:

$$(0\% \cdot 678.123 \text{ EUR} + 0,5\% \cdot 9.365 \text{ EUR} + 0,9\% \cdot 1.002.345 \text{ EUR} + 1,25\% \cdot 1.237.669 \text{ EUR} + 1,5\% \cdot 4.567.921 \text{ EUR}) / 7.495.423 \text{ EUR} = \mathbf{1,24\%}$$

Der gesamte Buchwert der Kapitalanlagen beträgt 3.080.745 EUR. Da die jeweiligen Buchwerte zum Jahresbeginn und -ende identisch sind, beträgt auch der mittlere Buchwert 3.080.745 EUR.

Die ordentlichen Erträge des Bilanzjahres ergeben sich aus den Buchwerten der einzelnen Assetklassen und den Zusatzinformationen des Kapitalanlegers:

	<b>Buchwert [EUR]</b>	<b>Erträge</b>	<b>absolut [EUR]</b>
Bonds	7.083.175	1,2%	84.998
Immobilien	236.106	4%	9.444
Aktien	157.404	6%	9.444
Fonds	393.510	2%	7.870
<b>gesamt</b>	<b>7.870.194</b>		<b>111.757</b>

Die **laufende Durchschnittsverzinsung** der Kapitalanlagen beträgt somit  $111.757 \text{ EUR} / 7.870.194 \text{ EUR} = \mathbf{1,42\%}$ .

Die laufende Durchschnittsverzinsung der Kapitalanlagen ist in diesem Jahr höher als der mittlere bilanzielle Rechnungszins.

Zudem ist der Buchwert der Kapitalanlagen um 5% höher als die Deckungsrückstellung. Falls diesem überschießenden Betrag keine anderweitigen zinsfordernden Passiva gegenüberstehen, ergibt sich hieraus ein weiterer Puffer.

Dies kann sich in den Folgejahren jedoch verändern – z.B. durch heterogenes Storno und Abläufe im Versichertenbestand und/oder durch Neu-/Wiederanlageeffekte auf der Aktivseite. Asset-Liability-Management ist also weiterhin geboten.

(Hinweis: Außerdem ist zu beachten, dass auch Ihr Unternehmen aufgrund des absehbar weiter sinkenden Referenzzinses in naher Zukunft eine Zinszusatzreserve stellen müssen. Auch diese sollte bei der ALM-Steuerung geeignet berücksichtigt werden.)

- (d) (Für die volle Punktzahl reichen drei Hedgingstrategien aus.)

**langlaufende Anleihen (guter Bonität):**

Durch die lange Laufzeit ist das Risiko gering(er), für auslaufende Papiere in einem ungünstigeren Umfeld Wiederanlagen tätigen zu müssen. (Allerdings verlieren diese bei einem Zinsanstieg an Wert.)

**Vorkäufe:**

Vorkauf von Kuponbonds, damit Realisierung der Forward Rates und Einlocken des aktuellen Zinsniveaus

**Swaps (Derivate):**

Tausch zukünftiger variabler Zinserträge gegen bereits fest vereinbarte Zinssätze (die eigentliche Wiederanlage erfolgt später

**Receiver-Swaptions (Derivate):**

Option auf Eintritt in einen Receiver Swap, der den aktuellen Swapsatz gegen einen festen Strikesatz tauscht



**Swaption Bonds** (einfach strukturierte Bonds – Bond + Receiver Swaption):

Erhöhung des Kupons des Trägerbonds um die Differenz aus Swapsatz und Strikesatz, falls der Swapsatz zum Stichtag unter dem Strike liegt

**Book Yield Notes** (einfach strukturierter Bond – Bond + Asien CMS Floor):

Erhöhung des Kupons des Trägerbonds um die Differenz aus fünf- bis zehnjährigem Mittel der Swapsätze und Strikesatz, falls dieses Mittel zum Stichtag unter dem Strike liegt

**Aufgabe 6.** [Beteiligung an den Bewertungsreserven] [15 Punkte]

Ihr Unternehmen arbeitet zurzeit an einer Migration des Rentenversicherungsbestands auf ein neues Verwaltungssystem. Der Bestand an gemischten Kapitalversicherungen soll jedoch aufgrund der vergleichsweise kurzen Restlaufzeit der Verträge nicht migriert werden.

Als Teilprojektleiter „Aktuariat“ ist es Ihre Aufgabe sicherzustellen, dass alle aufsichts- und vertragsrechtlichen Vorgaben bei der Migration eingehalten werden.

Um die Aufwände möglichst gering zu halten, hat Ihr Projektleiter die Maxime „Zielsystem führt“ ausgegeben. D.h. Funktionalitäten, die im Zielsystem umgesetzt sind, sollen soweit möglich ohne Anpassungen genutzt werden, da das sogenannte „Customizing“ nicht nur im Migrationsprojekt aufwändig ist, sondern darüber hinaus dauerhaft Wartungs- und Pflegeaufwand nach sich zieht.

Spätestens morgen sollen Sie laut Projektplan die Funktionalitäten zur Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven freigeben. Daher schauen Sie sich diese einmal genauer an. Dabei konzentrieren Sie sich auf die Verteilung der Bewertungsreserven. (Die Vorgaben für die Ermittlung der verteilungsfähigen Bewertungsreserven unter Berücksichtigung des Sicherungsbedarfs erfolgt im Teilprojekt „Bilanz“ von Herrn Meier.):

Im alten Verwaltungssystem werden die verteilungsfähigen Bewertungsreserven monatlich neu ermittelt und in die Datenbank  $BWR_a$  eingestellt. Die Zuordnung auf einzelne Verträge erfolgt mittels folgender Bewertungszahl, welche sich jeweils zum Jahrestag der Versicherungen erhöht:

Für einen Vertrag  $v$  ist die Bewertungszahl zum Zeitpunkt  $t$  ( $BZ_t^v$ ) definiert als Summe der Guthaben zu den Erhöhungstichtagen vom Versicherungsbeginn ( $b$ ) bis zum letzten Jahrestag des Vertrags ( $[t]$ ):

$$BZ_t^v = \sum_{k=b}^{[t]} Guthaben_k$$

Zu den Guthaben zählt das tarifliche Deckungskapital, Deckungskapital aus bereits zugeteilten Überschüssen, verzinslich angesammelte Guthaben, sowie individuell gegenfinanzierte Teile von Reserveauffüllungen.

Der Anteil des Vertrags  $v$  an den verteilungsfähigen Bewertungsreserven beträgt

$$50\% (1 - Ant_{naP}) \frac{BZ_t^v}{\sum_{j=1}^N BZ_t^{vj}}$$

Dabei ist  $Ant_{naP}$  der Anteil der nicht anspruchsberechtigten Passiva an den Bewertungsreserven und  $N$  die Anzahl der anspruchsberechtigten Verträge.

Im Zielsystem werden die verteilungsfähigen Bewertungsreserven ebenfalls monatlich ermittelt und in eine Datenbank  $BWR_z$  eingestellt. Für einen Vertrag  $vz$  ist die Bewertungszahl zum Zeitpunkt  $m$  ( $BZ_m^{vz}$ ) definiert als Summe der monatlichen Guthaben vom Versicherungsbeginn ( $b$ ) bis zum Betrachtungsmonat  $m$ .

$$BZ_m^v = \sum_{k=b}^m Guthaben_k^z$$

Zu den Guthaben zählen die tariflichen Deckungskapitale, der Deckungskapitale aus bereits zugeteilten Überschüssen, verzinslich angesammelte Guthaben, individuell gegenfinanzierte Teile von Reserveauffüllungen, für den Vertrag festgelegte laufende Überschussanteile, sowie der auf den Vertrag entfallene Teil des Schlussüberschussanteilfonds.

Der Anteil des Vertrags  $v$  an den verteilungsfähigen Bewertungsreserven beträgt

$$50\% (1 - Ant_{naP}) \frac{BZ_m^v}{\sum_{j=1}^N BZ_m^{vj}}$$

In beiden Systemen erfolgt die tatsächliche Beteiligung an den Bewertungsreserven immer dann, wenn ein Versicherungsfall eintritt (hierzu zählt auch der Versicherungsfall „Erleben“), sowie bei Kündigung und bei sonstigem Ablauf eines Vertrages.

- (a) [8 Punkte] Welche aufsichts- und vertragsrechtlichen Grundsätze müssen erfüllt sein, damit Sie die gewünschte Freigabe erteilen können? Geben Sie bei Ihrer Antwort bitte auch die jeweilige Rechtsquelle an.
- (b) [7 Punkte] Können Sie die gewünschte Freigabe erteilen? Falls nicht: Welche Grundsätze sind hier verletzt?

Wie könnten Sie dieses Problem lösen, ohne die Vorgaben Ihres Projektleiters zu missachten? (Konkrete Fachvorgaben sind im Rahmen dieser Aufgabe nicht zu erstellen.)



Lösungsvorschlag:

- (a) Die Beteiligung an den Bewertungsreserven ist vertragsrechtlich im § 153 VVG geregelt.

Sie hat nach einem verursachungsorientierten Verfahren zu erfolgen.

Die Bewertungsreserven müssen dabei mindestens einmal jährlich neu ermittelt werden.

Die einem Vertrag rechnerisch zugeordneten Bewertungsreserven müssen diesem bei Beendigung des Vertrags zur Hälfte zugeteilt werden.

Bei Rentenversicherungen ist die Beendigung der Ansparphase der hierfür maßgebliche Zeitpunkt.

Aufsichtsrechtlich ist der Gleichbehandlungsgrundsatz aus § 138 VAG zu beachten: Nach § 138 (2) VAG dürfen bei gleichen Voraussetzungen Prämien und Leistungen (inklusive der Leistungen aus der Beteiligung am handelsrechtlichen Überschuss und an den Bewertungsreserven) nur nach gleichen Grundsätzen bemessen werden.

- (b) Die gewünschte Freigabe kann leider noch nicht erfolgen, denn der aufsichtsrechtliche Gleichbehandlungsgrundsatz und die vertragsrechtliche Anforderung der Verursachungsorientierung sind verletzt. Die Verträge im Zielsystem bauen viel schneller höhere Bewertungszahlen auf als Verträge im Altsystem:

- Die einzelvertragliche Bewertungszahl im Altsystem erhöht sich jährlich, im Zielsystem monatlich.
- Die in der Bewertungszahl berücksichtigten Guthaben sind im Zielsystem systematisch höher als die Guthaben im Altsystem.

Um im Zielsystem auf ein „Customizing“ zu verzichten, könnte die Berechnung im Altsystem angepasst werden.

Außerdem ist in beiden Systemen sicherzustellen, dass der Bewertungsfaktor  $\frac{1}{\sum_{j=1}^N BZ_t^{vj}}$  jeweils die Summe über die Bewertungszahlen aus beiden Verwaltungssystemen berücksichtigt.

**Aufgabe 7.** [Zinszusatzreserve, MindZV und aktuarielle Steuerung] [45 Punkte]

Der Bestand der Pfefferminzia AG umfasst ausschließlich einen deregulierten Neubestand.

Die Planannahmen der Pfefferminzia AG sind wie folgt:

Das Risikoergebnis beträgt in jedem Jahr 100 GE (Geldeinheiten), das übrige Ergebnis ist in jedem Jahr mit -30 GE negativ. Die Netto-Kapitalerträge betragen in jedem Jahr  $KE_{ges} = 400$  GE, wovon die anzurechnenden Kapitalerträge 95 % betragen.

- (a) [16 Punkte] Bestimmen Sie den maximalen Jahresüberschuss in Abhängigkeit der rechnungsmäßigen Zinsen.

Für welche Höhen der rechnungsmäßigen Zinsen wird der maximale Jahresüberschuss negativ, für welche Höhen der rechnungsmäßigen Zinsen liegt er mindestens so hoch wie das Unternehmensziel von 20 GE?

- (b) [8 Punkte] Mit der Muttergesellschaft, der Mater AG, besteht kein Ergebnisabführungsvertrag. Zur Finanzierung der ZZR führt die Mater AG daher im Jahr 2020 einen Betrag von 300 GE in das Eigenkapital der Pfefferminzia AG zu, aus dem ein extern finanziertem Rückstellungsteil finanziert werden soll.

Bestimmen Sie für 2020 und die Folgejahre 2021 und 2022 die Höhe des extern finanzierten Rückstellungsteils, wenn die rechnungsmäßigen Zinsen wie folgt verlaufen:

$$RZ_{2020} = 500 \text{ GE, wovon } 150 \text{ GE auf die ZZR entfallen}$$

$$RZ_{2021} = 700 \text{ GE, wovon } 200 \text{ GE auf die ZZR entfallen}$$

$$RZ_{2022} = 600 \text{ GE, wovon } 100 \text{ GE auf die ZZR entfallen}$$

Der Jahresüberschuss entspreche dabei in jedem Jahr jeweils dem maximalen Jahresüberschuss von  $J\ddot{U}_{max} = 470 - RZ$ .

- (c) [13 Punkte] Zum Ende des Geschäftsjahres 2022 betrage der extern finanzierte Rückstellungsteil 300 GE und die insgesamt aufgebaute Höhe der ZZR betrage 1000 GE. In den folgenden Jahren ergebe sich eine ZZR-Auflösung in Höhe von 300 GE (in 2023) und 300 GE (in 2024), was zu einem Verlauf der rechnungsmäßigen Zinsen von  $RZ_{2023} = 200 \text{ GE}$  und  $RZ_{2024} = 300 \text{ GE}$  führe.



Bestimmen Sie den maximal möglichen Abbau des extern finanzierten Rückstellungsteils für die Jahre 2023 und 2024 sowie und den jeweils damit verbundenen maximalen Jahresüberschuss.

Hinweis: Es gelten auch für 2023 und die Folgejahre die genannten Planannahmen.

- (d) [8 Punkte] Ein Kollege von Ihnen argumentiert, dass der extern finanzierte Rückstellungsteil immer an die Muttergesellschaft zurückgeführt werden kann, sofern die ZZR in der Zukunft vollständig abgebaut wird – die Rückführung sei nur eine Frage der Zeit. Können Sie diese Behauptung bestätigen? Falls ja, beweisen Sie diese; falls nein, zeigen Sie in welchen Fällen dies nicht der Fall wäre.

Lösungsvorschlag:

- (a) Vorbemerkung: Im Folgenden wird (da es keinen Altbestand gibt) zur Vereinfachung der Index „neu“ im Rahmen der MindZV jeweils weggelassen. Ebenso wird die Einheit „GE“ weggelassen.

Der Rohüberschuss beträgt  $R\ddot{U} = KE_{Ges} - RZ + RE + \ddot{u}E$  und damit

$$R\ddot{U} = 400 - RZ + 100 - 30 = 470 - RZ.$$

Die Mindestzuführung zur RfB beträgt

$$\begin{aligned} \text{MindZuf} &= \max(0; \text{MindZuf}_{KA} + \text{MindZuf}_{RE} + \text{MindZuf}_{\ddot{u}E}) \\ &= \max(0; \text{MindZuf}_{KA} + \max(0; 0,9 * 100) + \max(0; 0,5 * (-30))) \\ &= \max(0; \text{MindZuf}_{KA} + 90 + 0) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{MindZuf}_{KA} &= \max(\min(0; aKE - RZ); 0,9 * aKE - RZ) \\ &= \max(\min(0; 380 - RZ); 342 - RZ) \end{aligned}$$

Der maximale Jahresüberschuss beträgt damit

$$\begin{aligned} J\ddot{U}_{max} &= R\ddot{U} - \text{MindZuf} \\ &= 470 - RZ - \max(0; \text{MindZuf}_{KA} + 90) \end{aligned}$$

Für  $RZ \leq 380$  ist

$$\text{MindZuf}_{KA} = \max(0; 342 - RZ)$$

und damit

$$\text{MindZuf}_{KA} = \begin{cases} 342 - RZ & \text{für } RZ \leq 342 \\ 0 & \text{für } 342 < RZ \leq 380 \end{cases}$$

Für  $RZ > 380$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{MindZuf}_{KA} &= \max(\min(0; 380 - RZ); 342 - RZ) \\ &= \max(380 - RZ; 342 - RZ) \\ &= 380 - RZ \end{aligned}$$

Somit ist

$$J\ddot{U}_{max} = \begin{cases} 470 - RZ - (342 - RZ + 90) = 38 & \text{für } RZ \leq 342 \\ 380 - RZ & \text{für } 342 < RZ \leq 380 \\ 470 - RZ - \max(0; 470 - RZ) = 0 & \text{für } 380 < RZ \leq 470 \\ 470 - RZ & \text{für } 470 < RZ \end{cases}$$

Folglich wird  $J\ddot{U}_{max}$  negativ für  $RZ > 470$  und erreicht mindestens das Unternehmensziel von 20 GE für alle  $RZ \leq 360$ .

(b) Durch den Kapitaleinschuss ist  $EK_{ext;2020;vorh} = 300$ .

Mit den angegebenen rechnungsmäßigen Zinsen ergibt sich  $J\ddot{U}_{2020} = -30$ ,  $J\ddot{U}_{2021} = -230$  und  $J\ddot{U}_{2022} = -130$ .

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Erhöhung } efRt_{2020} &= \min(\max(0; \Delta ZZR_{2020}); \max(0; -J\ddot{U}_{2020}); EK_{ext;2020;vorh}) \\ &= \min(150; 30; 300) = 30 \end{aligned}$$

und damit  $EK_{ext;2020;verblieben} = 300 - 30 = 270$  und  $efRt_{2020} = 30$ .

Analog erhält man

$$\begin{aligned} \text{Erhöhung } efRt_{2021} &= \min(\max(0; \Delta ZZR_{2021}); \max(0; -J\ddot{U}_{2021}); EK_{ext;2021;vorh}) \\ &= \min(200; 230; 270) = 200 \end{aligned}$$

und  $EK_{ext;2021;verblieben} = 270 - 200 = 70$  und  $efRt_{2021} = 230$

sowie

$$\begin{aligned} \text{Erhöhung } efRt_{2022} &= \min(\max(0; \Delta ZZR_{2022}); \max(0; -J\ddot{U}_{2022}); EK_{ext;2022;vorh}) \\ &= \min(100; 130; 70) = 70 \end{aligned}$$

und  $EK_{ext;2022;verblieben} = 70 - 70 = 0$  und  $efRt_{2022} = 300$ .

(c) Für 2023 ist  $0,9 * aKE - RZ_{2023} = 342 - 200 = 142$

und für 2024 ist analog  $0,9 * aKE - RZ_{2024} = 342 - 300 = 42$ .



Außerdem ist  $ZZR_{2023} = ZZR_{2022} - 300 = 700$  und  $ZZR_{2024} = ZZR_{2023} - 300 = 400$ .

Damit ergibt sich für den maximal möglichen Abbau des  $efRt$  in 2023:

$$\begin{aligned}\Delta efRt_{2023} &= \max(0; \min(\max(0; ZZR_{2022} - ZZR_{2023}); 0,9 * aKE_{2023} - RZ_{2023}; \\ &\max\left(efRt_{2022} * \frac{ZZR_{2022} - ZZR_{2023}}{ZZR_{2022}}; \frac{1}{3} * (0,9 * aKE_{2023} - RZ_{2023})\right))) \\ &= \max\left(0; \min\left(300; 142; \max\left(300 * \frac{300}{1000}; \frac{142}{3}\right)\right)\right) = 90.\end{aligned}$$

Damit ist  $efRt_{2023} = 300 - 90 = 210$  sowie

$$\begin{aligned}MindZuf_{KA;2023} &= \max(\min(0; aKE_{2023} - RZ_{2023}); 0,9 * aKE_{2023} - RZ_{2023} \\ &- \Delta efRt_{2023}) = \max(342 - 200 - 90) = 52\end{aligned}$$

und analog (a)

$$\begin{aligned}J\ddot{U}_{max;2023} &= R\ddot{U}_{2023} - MindZuf_{2023} \\ &= 470 - RZ_{2023} - \max(0; MindZuf_{KA} + 90) = 128\end{aligned}$$

(ohne die Auflösung des  $efRt$  wäre  $J\ddot{U}_{max;2023}$  lediglich bei 38 GE gelegen).

Genauso ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta efRt_{2024} &= \max(0; \min(\max(0; ZZR_{2023} - ZZR_{2024}); 0,9 * aKE_{2024} - RZ_{2024}; \\ &\max\left(efRt_{2023} * \frac{ZZR_{2023} - ZZR_{2024}}{ZZR_{2023}}; \frac{1}{3} * (0,9 * aKE_{2024} - RZ_{2024})\right))) \\ &= \max\left(0; \min\left(300; 42; \max\left(210 * \frac{300}{700}; \frac{42}{3}\right)\right)\right) = 42\end{aligned}$$

sowie

$$efRt_{2024} = 210 - 42 = 168$$

und

$$\begin{aligned}MindZuf_{KA;2024} &= \max(\min(0; aKE_{2024} - RZ_{2024}); 0,9 * aKE_{2024} - RZ_{2024} - \Delta efRt_{2024}) \\ &= \max(342 - 300 - 42) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist schließlich

$$\begin{aligned}J\ddot{U}_{max;2024} &= R\ddot{U}_{2024} - MindZuf_{2024} \\ &= 470 - RZ_{2024} - \max(0; MindZuf_{KA} + 90) = 80\end{aligned}$$

(ohne die Auflösung des  $efRt$  wäre  $J\ddot{U}_{max;2024}$  ebenfalls lediglich bei 38 GE gelegen).

- (d) Eine Rückführung des extern finanzierten Rückstellungsteils ist nicht immer vollständig möglich:
- Bei einem Abbau der ZZR kann zwar der extern finanzierte Rückstellungsteil abgebaut werden. Allerdings kann der extern finanzierte Rückstellungsteil ggfs. nur teilweise oder sogar gar nicht rückgeführt werden. Dies z.B. der Fall, wenn die rechnungsmäßigen Zinsen aufgrund hoher Garantieverpflichtungen trotz Auflösung der ZZR so hoch sind, dass in der Mindestzuführung  $MindZuf_{KA} = \max(\min(0; aKE - RZ); 0,9 * aKE - RZ - \Delta efRt)$  das erste Argument in der Maximierung zieht. Damit verringern sich die Anforderungen der Mindestzuführung nicht, und eine Rückführung wäre nur noch in dem Rahmen möglich, den die Mindestzuführung ohnehin zulässt.
  - Selbst wenn das zweite Argument in der Maximierung positiv ist, ergibt sich nicht zwingend eine Rückführungsmöglichkeit. Sofern dem entsprechend negative Risikoergebnisse oder übrige Ergebnisse entgegenstehen, könnte sich die Mindestzuführung trotz ZZR/efRt-Abbaus nicht verringern bzw. sogar  $J\ddot{U}_{max}$  negativ sein.
  - Zudem kann die Begrenzung, dass die in der MindZV angesetzte Verminderung des efRt nicht größer ausfallen darf als 50 Prozent der Mindestzuführung in Abhängigkeit der Kapitalerträge, eine Rückführung verhindern. Ein einfaches Beispiel entsteht unter Annahme eines vollständigen ZZR-Abbaus in einem Jahr.

**Aufgabe 8.** [Biometrische Rechnungsgrundlagen] [45 Punkte]

Sie arbeiten in der Produktentwicklung eines Startups, welches in den Lebensversicherungsmarkt eintreten will. Ihre Aufgabe ist es eine einfache Risikolebensversicherung zu entwickeln. Dazu machen Sie sich Gedanken über die Wahl einer geeigneten Sterbetafel und den Effekt der Corona-Pandemie auf Ihr Geschäftsrisiko.

- (a) [3 Punkte] Erläutern Sie knapp, welche Art von Sterbetafel 1. Ordnung Sie für diesen Zweck verwenden. Benötigen Sie eine Tafel mit Sicherheitszu- oder Sicherheitsabschlägen? Begründen Sie.
- (b) [4 Punkte] Welche Risiken deckt der Sicherheitspuffer der Sterbetafel 1. Ordnung ab? In welchen Teilen wird (zumindest theoretisch) das Pandemierisiko berücksichtigt?

Sie entscheiden sich, die Sterbetafel DAV 2008 T als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Sterblichkeitsannahmen zu verwenden. Die Ableitung der Tafel ist allerdings schon viele Jahre her und Sie beschließen, Sterblichkeitsverbesserungen von konservativ 1,5 % p.a. für 15 Jahre zu berücksichtigen, um im Markt wettbewerbsfähig zu sein.

- (c) [3 Punkte] Beschreiben Sie knapp das traditionelle Modell der Trendmodellierung, wie es bei der Analyse der Entwicklung der Langlebigkeit verwendet wird.
- (d) [4 Punkte] Bestimmen Sie mit Hilfe des traditionellen Modells einen Faktor, der die Sterblichkeitsverbesserung von 1,5 % p.a. über 15 Jahre beschreibt. Wie stark weicht der Faktor ab, wenn Sie anstatt des traditionellen Modells einen einfachen prozentualen Ansatz wählen?

Die folgende Tabelle enthält einen Auszug aus der um die Sterblichkeitsverbesserungen modifizierten Sterbetafel DAV 2008 T 1. Ordnung für Männer (x) und Frauen (y).

Alter	33	34	35	36	37	38	39
$q_x^{DAV08Tm}$	0,000655	0,000683	0,000715	0,000755	0,000802	0,000865	0,000943
$q_y^{DAV08Tm}$	0,000308	0,000346	0,000391	0,000443	0,000498	0,000560	0,000625

Zur Validierung Ihres Vorgehens nutzen Sie die Periodensterbetafel der Bevölkerung, wie sie jährlich vom Statistischen Bundesamt veröffentlicht wird. Die folgende Tabelle enthält einen Auszug aus der aktuellen Sterbetafel 2017/2019 für Gesamtdeutschland.

Alter	33	34	35	36	37	38	39
$q_x^{St1719}$	0,000736	0,000717	0,000756	0,000874	0,000981	0,001020	0,001108
$q_y^{St1719}$	0,000351	0,000403	0,000445	0,000466	0,000499	0,000573	0,000637

- (e) [4 Punkte] Vergleichen Sie die aktuellen Sterbewahrscheinlichkeiten der Bevölkerung mit den modifizierten Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel DAV 2008 T 1. Ordnung wie in den beiden Tabellen angegeben. Warum können Sie (trotzdem) davon ausgehen, dass die modifizierten Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung für eine Reservierung nach HGB vorläufig angemessen sind?

Im Jahr 2020 hat sich mit der Corona-Pandemie das Pandemierisiko realisiert. Um das Risiko besser zu verstehen, untersuchen Sie den Effekt einer Pandemie auf die einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten  $q_x^P$  und  $p_x^P$  einer x-jährigen Person im Jahr der Pandemie. Dabei nehmen Sie an, dass eine Pandemie zu einer relativen Übersterblichkeit von  $e_x^P$  für eine x-jährigen Person führt, d.h.  $q_x^P = (1 + e_x^P)q_x$ , wobei  $q_x$  die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person vor der Pandemie bezeichnet.

- (f) [6 Punkte] Bestimmen Sie die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit  $p_x^P$  einer x-jährigen Person im Jahr der Pandemie in Abhängigkeit von den einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten  $q_x$  und  $p_x$  vor der Pandemie. Diskutieren Sie die prozentuale Veränderung der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Pandemie. Können Sie grob eine obere Schranke der prozentualen Veränderung angeben, wenn Sie annehmen, dass  $q_x < 0,001$  gilt?

Für Sie ist insbesondere von Interesse, wie sich eine Pandemie auf Ihre Leistungspflicht auswirkt. Im Folgenden gehen Sie vereinfachend davon aus, dass eine Pandemie im Jahr des Vertragsschlusses einen Effekt auf die einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten hat, wie gerade analysiert, die einjährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten der Folgejahre aber identisch zu denen vor dem Pandemiejahr sind.



- (g) [10 Punkte] Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person, dass über die n-jährige Laufzeit eines Vertrags,  $n > 1$ , eine Leistung fällig wird – ohne Eintritt einer Pandemie und bei Eintritt einer Pandemie im ersten Vertragsjahr? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten und die prozentuale Veränderung durch die Pandemie als Funktion der ein- und n-jährigen Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten  $q_x$ ,  $p_x$ ,  ${}_nq_x$  und  ${}_np_x$  vor der Pandemie. Diskutieren Sie die prozentuale Veränderung, insbesondere mit Blick auf die Laufzeit n des Vertrags.
- (h) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die prozentuale Veränderung der Wahrscheinlichkeit eines Leistungsfalls wie in Aufgabenteil (g) analysiert durch  $e_x^P$  nach oben beschränkt ist.

Für den Altersbereich 30 bis 39 Jahre liegen Ihnen folgende Informationen des Statistischen Bundesamts zum Bevölkerungsstand am 31.12.2019 und des Robert Koch-Instituts zur Anzahl der Ansteckungen und den mit Covid-19 in Verbindung gebrachten Todesfällen im Jahr 2020 vor (Stand: 05.01.2021, \*eigene Setzung).

	Männlich	Weiblich	Gesamt
Bevölkerung 31.12.2019	5.513.386	5.271.544	10.784.930
Covid-19 Fallzahlen 2020	133.308*	133.308*	266.616
Covid-19 Todesfälle 2020	45	26	71

- (i) [7 Punkte] Schätzen Sie anhand der Daten die relative Übersterblichkeit  $e_x^P$  für Männer im Altersbereich 30 bis 39 Jahre unter der Annahme, dass die Covid-19 Todesfälle tatsächlich zusätzlich zu den ansonsten üblichen Todesfällen aufgetreten sind und die durchschnittliche Bevölkerungszahl identisch zum Stand am 31.12.2019 ist. Nehmen Sie darüber hinaus an, dass die Sterbewahrscheinlichkeit für den Altersbereich 30 bis 39 Jahre durch  $q_x = 0,0008$  gegeben ist. Kommentieren Sie das Ergebnis mit Blick auf die öffentliche Wahrnehmung von Covid-19 und den Sicherheitszuschlag von 34 % in Ihrer modifizierten Sterbetafel DAV 2008 T 1. Ordnung.

Lösungsvorschlag:

- (a) Sie verwenden eine Todesfalltafel – oder Tafel mit Todesfallcharakter – mit Sicherheitszuschlägen auf die erwarteten Sterbewahrscheinlichkeiten wie z.B. die Sterbetafel DAV 2008 T. Bei der Absicherung des Todesfallrisikos gehen Sie das Risiko ein, dass mehr Personen versterben als aktuell zu erwarten sind. Einen Sicherheitspuffer für eine auskömmliche Kalkulation stellen Sie daher durch die Annahme höherer Sterbewahrscheinlichkeiten als erwartet sicher.
- (b) Der Sicherheitszuschlag bei einer Todesfalltafel deckt Schwankungs-, Irrtums- und Änderungsrisiken ab. Wegen der in den letzten Jahrzehnten beobachteten Sterblichkeitsverbesserungen wird auf einen Zuschlag für das Änderungsrisiko bei Todesfalltafeln aber regelmäßig verzichtet.

Das Pandemierisiko ist theoretisch im Schwankungs- und Änderungszuschlag berücksichtigt. Die nicht dauerhaften Effekte einer Pandemie führen zu statistischen Schwankungen bei der beobachteten Sterblichkeit, die durch den Schwankungszuschlag abgedeckt sind. Dauerhafte Veränderungen der Sterblichkeitsverhältnisse, hervorgerufen durch eine Pandemie, werden dagegen durch den Änderungszuschlag berücksichtigt.

- (c) Das traditionelle (logarithmisch-lineare) Modell wird durch die Formel

$$q_{x,t+1} = \exp(-F(x,t)) q_{x,t}$$

beschrieben, wobei  $q_{x,t}$  und  $q_{x,t+1}$  die Sterbewahrscheinlichkeiten einer  $x$ -jährigen Person im Jahr  $t$  bzw.  $t+1$  und  $F(x,t)$  die alters- und jahresspezifischen Trendfaktoren bezeichnen. Oftmals werden nur altersspezifische Trendfaktoren  $F(x)$  zur Modellierung der Entwicklung der Sterblichkeit verwendet.

- (d) Bei einer jährlichen Sterblichkeitsverbesserung von 1,5 % über 15 Jahre liefert das traditionelle Modell einen Faktor von  $\exp(-0,015 * 15) = 0,7985$  oder 79,85 %. Ein einfacher prozentualer Ansatz liefert  $(1 - 0,015)^{15} = 0,7972$  oder 79,72 %. Die Abweichung ist mit 0,13 %-Punkten gering.
- (e) Die aktuellen Sterbewahrscheinlichkeiten der Bevölkerung liegen für alle tabellierten Alter höher als die modifizierten Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel DAV 2008 T 1. Ordnung. Hintergrund ist, dass Versichertenkollektive üblicherweise eine geringere Sterblichkeit aufweisen als die Bevölkerung. Hier ist dies sogar der Fall für die Sterbewahrscheinlichkeiten mit Sicherheitszuschlag.



Da die DAV 2008 T 1. Ordnung grundsätzlich angemessen ist für eine Reservierung von Versichertenkollektiven nach HGB und Sie die Sterblichkeitsverbesserungen mit 1,5 % p.a. konservativ angesetzt haben, sind auch die modifizierten Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung erst einmal vorsichtig und damit angemessen für eine Reservierung nach HGB.

- (f) Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person im Jahr der Pandemie lässt sich als

$$p_x^P = 1 - q_x^P = 1 - (1 + e_x^P)q_x = p_x - e_x^P q_x$$

schreiben. Damit ergibt sich für die prozentuale Veränderung der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\frac{p_x^P}{p_x} = 1 - e_x^P \frac{q_x}{p_x}$$

Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit sinkt prozentual um die relative Übersterblichkeit  $e_x^P$  gedämpft um den Faktor  $q_x/p_x$ .

Aus  $q_x < 0,001$  folgt  $\frac{q_x}{p_x} < \frac{0,001}{0,999} = 0,001001$ . D.h. die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit reduziert sich prozentual um etwa ein Tausendstel oder weniger der relativen Übersterblichkeit  $e_x^P$ .

- (g) Um die Frage zu analysieren, betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit  ${}_nq_x$  einer x-jährigen Person, in den nächsten n Jahren zu versterben. Denn genau dann wird eine Leistung fällig. Ohne Erhöhung der Sterblichkeit durch eine Pandemie gilt für diese

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \prod_{j=0}^{n-1} p_{x+j}$$

Berücksichtigt man die erhöhte Sterblichkeit durch eine Pandemie im ersten Jahr, so ergibt sich

$${}_nq_x^P = 1 - {}_np_x^P = 1 - p_x^P \prod_{j=1}^{n-1} p_{x+j}$$

Mit der Lösung von Aufgabenteil (f) lässt sich dies schreiben als

$${}_nq_x^P = 1 - (p_x - e_x^P q_x) \prod_{j=1}^{n-1} p_{x+j} = 1 - \prod_{j=0}^{n-1} p_{x+j} + e_x^P q_x \prod_{j=1}^{n-1} p_{x+j}$$



Wegen  ${}_n p_x = p_x {}_{n-1} p_{x+1}$  gilt dann

$${}_n q_x^P = {}_n q_x + e_x^P q_x \frac{{}_n p_x}{p_x}.$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person, dass über die n-jährige Laufzeit eines Vertrags eine Leistung fällig wird, wenn eine Pandemie nur im Jahr des Vertragsschlusses einen Effekt auf die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten hat wie in Aufgabenteil (f) analysiert.

Die prozentuale Veränderung der Wahrscheinlichkeit durch die Pandemie ist gegeben durch

$$\frac{{}_n q_x^P}{{}_n q_x} = 1 + e_x^P \frac{q_x}{{}_n p_x} \frac{{}_n p_x}{{}_n q_x}.$$

Die n-jährige Sterbewahrscheinlichkeit steigt prozentual um die relative Übersterblichkeit  $e_x^P$  modifiziert um den Faktor  $q_x/p_x \cdot {}_n p_x / {}_n q_x$ . Mit der Laufzeit n sinkt die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit  ${}_n p_x$  und steigt die n-jährige Sterbewahrscheinlichkeit  ${}_n q_x$ . D.h. der Bruch  ${}_n p_x / {}_n q_x$  wird kleiner mit der Laufzeit n und somit sinkt der Einfluss der relativen Übersterblichkeit  $e_x^P$  durch die Pandemie auf die Leistungspflicht mit der Laufzeit n.

- (h) Nach der Lösung von Aufgabenteil (g) ist die zu analysierende prozentuale Veränderung gegeben durch

$$\frac{{}_n q_x^P}{{}_n q_x} = 1 + e_x^P \frac{q_x}{{}_n p_x} \frac{{}_n p_x}{{}_n q_x}.$$

Die prozentuale Veränderung der Leistungspflicht durch die Pandemie ist nach oben beschränkt durch  $e_x^P$ , wenn

$$\frac{q_x}{{}_n p_x} \frac{{}_n p_x}{{}_n q_x} < 1$$

gilt. Da  ${}_n q_x = q_x + p_x {}_{n-1} q_{x+1}$ , lässt sich der Bruch als

$$\frac{q_x}{{}_n p_x} \frac{{}_n p_x}{{}_n q_x} = \frac{{}_{n-1} p_{x+1}}{1 + p_x/q_x \cdot {}_{n-1} q_{x+1}}$$

schreiben. D.h.

$$\frac{q_x \cdot {}_n p_x}{p_x \cdot {}_n q_x} < {}_{n-1} p_{x+1} < 1$$

und somit ist die prozentuale Veränderung der Leistungspflicht durch die Pandemie nach oben durch  $e_x^P$  beschränkt.

- (i) Setzt man die Covid-19 Todesfälle in Relation zur durchschnittlichen männlichen Bevölkerung im Altersbereich 30 bis 39 Jahre, so ergibt sich, dass 0,000816 % dieser Gruppe im Zusammenhang mit Covid-19 verstorben sind.

Setzt man dieses Ergebnis nun in Relation zur Sterbewahrscheinlichkeit von  $q_x = 0,0008$ , so erhält man für die relative Übersterblichkeit  $e_x^P$

$$e_x^P = \frac{0,00000816}{0,0008} = 0,0102$$

oder ca. 1 %.

Die relative Übersterblichkeit von 1 % mag klein erscheinen. Hintergrund ist, dass sich im Jahr 2020 nur ein kleiner Teil der Bevölkerung angesteckt hat und Covid-19 Todesfälle insbesondere für Alter über 80 Jahre beobachtet wurden. Die Sonderauswertung des Statistischen Bundesamts zu Sterbefallzahlen liefert für den Altersbereich 30 bis 39 Jahre eine höhere Übersterblichkeit als 1 % für das Jahr 2020. Dies liegt daran, dass es auch ohne die 45 registrierten Covid-19 Todesfälle ungewöhnlich viele Todesfälle insbesondere in den Monaten Januar und Februar gab.

Der Sicherheitspuffer in Ihrer modifizierten Sterbetafel DAV 2008 T von 34 % ist für den Altersbereich 30 bis 39 Jahre offenbar mehr als ausreichend, auch für eine bis dato so nicht dagewesene Pandemie. Das gleiche gilt für den Schwankungszuschlag von 7,4 %. Anders wäre die Situation, wenn sich mehr Personen mit Covid-19 infiziert hätten oder die Covid-19 Sterblichkeit höher gelegen hätte. Außerdem ist für höhere Alter die Situation eine andere, mit Blick auf die Sicherheitspuffer weniger komfortabel.