



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15. Oktober 2021

Hinweise:

- Die Klausur ist als *Open-Book-Klausur* konzipiert. Als weiteres Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. [Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][12 Punkte]

- (a) [6 Punkte] Gegeben sei ein Garantie-Zertifikat auf eine Einheit der YZ-Aktie mit einer Laufzeit von 5 Jahren. Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer des Zertifikats den Marktwert S_5 der YZ-Aktie, *mindestens* jedoch den Betrag 5.000 € (Floor).

Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_5 des Zertifikats zum Zeitpunkt 5 formal dar. Zerlegen Sie diese Position dann *alternativ auf zwei Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese beiden Zerlegungen ein?

- (b) [6 Punkte] Ein Investor legt sein anfängliches Kapital V_0 auf die folgende Weise an. Er erwirbt 70 DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 und einer Laufzeit von 5 Jahren sowie 30 DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2 und einer Laufzeit von ebenfalls 5 Jahren. Den Restbetrag legt der Investor (mit Zinseszins) über 5 Jahre mit einer Verzinsung in Höhe von 3% p. a. an.

Stellen Sie die Rückfluss-Position V_5 dieses Investments zum Zeitpunkt $T = 5$ dar. Welches Mindest-Endvermögen F („Floor“) hat sich der Investor bei Anwendung dieser Strategie gesichert? Welche Mindestverzinsung r_F („Floor-Zins“) - bezogen auf das anfängliche Kapital - resultiert hieraus?

Lösungsskizze:

- (a) Rückfluss-Position:

$$V_5 = \max\{S_5, 5.000\}$$

Zerlegung 1:

$$V_5 = S_5 + \max\{5.000 - S_5, 0\}$$

Zerlegung 1 beinhaltet einen Put auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 5 und Ausübungspreis 5.000.

Zerlegung 2:

$$V_5 = 5.000 + \max\{S_5 - 5.000, 0\}$$

Zerlegung 2 beinhaltet einen Call auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 5 und Ausübungspreis 5.000.

- (b) Es bezeichne $C_0 = C_0(K_1)$ den Preis eines DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 sowie $P_0 = P_0(K_2)$ den Preis eines DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2 , jeweils zum Zeitpunkt $t = 0$.

Rückfluss-Position:

$V_5 = 70 \max\{DAX(5) - K_1, 0\} + 30 \max\{K_2 - DAX(5), 0\} + (V_0 - 70C_0 - 30P_0)(1,03)^5$, wobei $DAX(5)$ den Marktwert des DAX zum Zeitpunkt $t = 5$ bezeichne. Dabei ist voranzusetzen, dass $V_0 \geq 70C_0 + 30P_0$.



Mindest-Endvermögen:

Da $\max\{DAX(5) - K_1, 0\} \geq 0$ und $\max\{K_2 - DAX(5), 0\} \geq 0$, gilt

$$V_5 \geq (V_0 - 70C_0 - 30P_0)(1,03)^5 =: F.$$

Floor-Zins:

Es muss gelten

$$V_0(1 + r_F)^5 = F = (V_0 - 70C_0 - 30P_0)(1,03)^5.$$

Hieraus resultiert

$$\begin{aligned} r_F &= \left[\frac{V_0 - 70C_0 - 30P_0}{V_0} (1,03)^5 \right]^{1/5} - 1 \\ &= (1,03) \left(\frac{V_0 - 70C_0 - 30P_0}{V_0} \right)^{1/5} - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. [Individualbewertung] [16 Punkte]

B. Noulli möchte 1.000 € für ein Jahr anlegen und besitzt die beiden folgenden Anlagealternativen:

- A: Eine sichere Anlage zum Zinssatz 10%.
- B: Eine risikobehaftete Anlage. Hierbei verdoppelt sich entweder das eingesetzte Kapital binnen Jahresfrist oder es halbiert sich. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verdopplung betrage $0 < p < 1$.

B. Noulli besitzt die Nutzenfunktion $u(x) = \ln x$ bezogen auf die Endvermögensposition $V > 0$ nach einem Jahr.

- (a) [3 Punkte] Bestimmen das Arrow-Pratt-Maß $r(x)$ für die absolute Risikoaversion von B. Noulli! Ist die absolute Risikoaversion monoton steigend oder monoton fallend in x ?
- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative A.
- (c) [4 Punkte] Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von p - den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative B.
- (d) [2 Punkte] Für welche Wahrscheinlichkeit p sind die beiden Anlagealternativen für B. Noulli nutzenäquivalent?
- (e) [5 Punkte] B. Noulli investiert nun einen Bruchteil α ($0 < \alpha < 1$) seines Anlagebetrags in die risikobehaftete Anlagealternative und den restlichen Betrag in die sichere Anlagealternative. Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von α - die entsprechende Endvermögensposition sowie deren Erwartungsnutzen.

Lösungsskizze:

(a) $r(x) := -u''(x)/u'(x)$

Für $u(x) = \ln x$ gilt $u'(x) = x^{-1}$ und $u''(x) = -x^{-2}$. Mithin gilt

$$r(x) = \frac{1}{x}.$$

Hieraus folgt $r'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, d. h. die Risikoaversion ist monoton fallend.

- (b) Bezeichne V_A die Endvermögensposition der Anlagealternative A. Dann gilt $V_A = 1.000 \cdot 1,1 = 1.100$ und $\mathbb{E}[\ln V_A] = \ln V_A = \ln 1.100 = 7,0031$. Für das Sicherheitsäquivalent gilt

$$s(V_A) = u^{-1}(\mathbb{E}[\ln V_A]) = \exp(\ln(V_A)) = V_A = 1.100.$$



- (c) Bezeichne V_B die Endvermögensposition der Anlagealternative B . Dann gilt $\mathbb{P}[V_B = 2.000] = p$ und $\mathbb{P}[V_B = 500] = 1 - p$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln V_B] &= p \ln 2.000 + (1 - p) \ln 500 \\ &= p \ln \frac{2.000}{500} + \ln 500 \\ &= p \ln 4 + \ln 500 \\ &= 1,3863p + 6,2146.\end{aligned}$$

Für das Sicherheitsäquivalent gilt entsprechend

$$s(V_B) = \exp(6,2146 + 1,3863p).$$

- (d) Es muss gelten

$$1,3863p + 6,2146 = 7,0031.$$

Hieraus folgt $p = 0,5688$.

- (e) Bezeichne V_α die Endvermögensposition des Mischportfolios in Abhängigkeit von α . Es gilt

$$\begin{aligned}V_\alpha &= \begin{cases} 2.000\alpha + (1 - \alpha)1.100 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 500\alpha + (1 - \alpha)1.100 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1.100 + 900\alpha & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 1.100 - 600\alpha & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\mathbb{E}[\ln V_\alpha] = p \ln(1.100 + 900\alpha) + (1 - p) \ln(1.100 - 600\alpha).$$

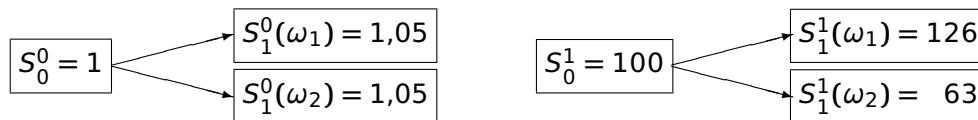
Aufgabe 3. [Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]

Der Solarparkbetreiber „Sonnenschein AG“ beabsichtigt eine Anleihe („Bull-Anleihe“) mit den folgenden Modalitäten zu emittieren:

- Die Laufzeit beträgt 1 Jahr, der Nennwert ist 105.000 € und es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen.
- Steigt der Aktienkurs der Sonnenschein AG in $t = 1$ im Vergleich zum heutigen Aktienkurs, so erhält der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Nennwert einen Bonus in Höhe von 30% der einjährigen Aktienrendite auf den Nennwert.
- Die Sonnenschein AG strebt als Ausgabepreis der Anleihe 110.000 € an.

Ihr Finanzvorstand bittet Sie, diese Anlagemöglichkeit zu überprüfen. Sie entscheiden sich für die Modellierung in einem statischen Einperiodenmodell mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1).

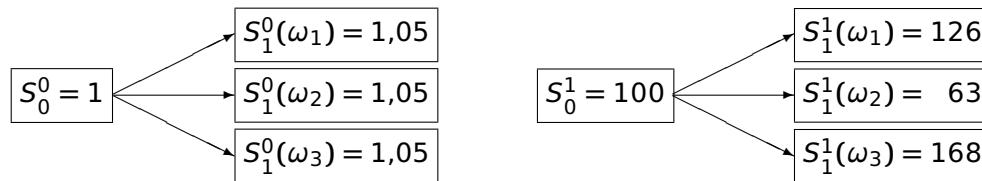
- (a) [3 Punkte] Geben Sie das Auszahlungsprofil C_1 der Bull-Anleihe zur Fälligkeit $t = 1$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_1^1 in $t = 1$ an, wenn der Startpreis der Aktie 100 € beträgt.
- (b) [15 Punkte] Bei Ihrer Modellierung gehen Sie zunächst für die Anzahl der Sonnentage von zwei Szenarien ω_1, ω_2 , die aus Ihrer Sicht mit positiven Wahrscheinlichkeiten eintreten können, und folgenden Preisentwicklungen aus:



- (i) [3 Punkte] Überprüfen Sie, dass Ihr Finanzmarktmodell arbitrage-frei ist. Geben Sie inklusive Herleitung die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße explizit an.
- (ii) [2 Punkte] Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0 der Bull-Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ durch risikoneutrale Bewertung.
- (iii) [3 Punkte] Berechnen Sie die Replikationsstrategie für die Bull-Anleihe. Wie hoch sind die Kosten der perfekten Replikation?
- (iv) [4 Punkte] Der angestrebte Ausgabepreis von 110.000 € führt in Ihrem Modell zu Arbitrage. Geben Sie - inklusive Begründung - explizit eine Arbitragemöglichkeit an.
- (v) [3 Punkte] Stellen Sie das Auszahlungsprofil C_1^{call} einer Europäischen Call-Option auf die Aktie der Sonnenschein AG mit Fälligkeit in $t = 1$ und Ausübungspreis 100 € mithilfe des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe dar. Leiten Sie daraus den arbitrage-freien Preis der Call-Option ab.



(c) [7 Punkte] Alternativ erweitern Sie Ihr Modell um ein drittes Szenario ω_3 :



Berechnen Sie in diesem Modell die Menge der arbitrage-freien Preise der Bull-Anleihe. Ist die Bull-Anleihe in diesem Modell replizierbar?

Lösungsskizze:

(a) Das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \max\{105.000, 105.000(1 + 0,3 \cdot \frac{S_1^1 - 100}{100})\} \\ &= 105.000 + \max\{0, 105.000 \cdot 0,3 \cdot \frac{S_1^1 - 100}{100}\}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Alternative Darstellungen sind möglich, siehe auch (b) (v).

(b) (i) Der 1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung besagt, dass ein diskretes Finanzmarktmodell genau dann arbitrage-frei ist, wenn ein äquivalentes risikoneutrales Maß bzw. Martingalmaß \mathbb{Q} existiert. Im vorliegenden Finanzmarktmodell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^1}{S_0^1} \right] = \frac{S_1^1(\omega_1)}{S_0^1} \cdot q_1 + \frac{S_1^1(\omega_2)}{S_0^1} \cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 100 = 120q_1 + 60q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$100 = 120q_1 + 60(1 - q_1) = 60q_1 + 60$$

und entsprechend $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ für die Gewichte des eindeutig bestimmten äquivalenten risikoneutralen Maßes. Insbesondere ist das Finanzmarktmodell arbitrage-frei.

(ii) Nach (a) beträgt das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe zur Fälligkeit konkret

$$C_1(\omega) = \max\{105.000, 105.000(1 + 0,3 \cdot \frac{S_1^1 - 100}{100})\} = \begin{cases} 113.190 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 105.000 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel sowie den Gewichten $q_1 = \frac{2}{3}$ und $q_2 = \frac{1}{3}$ ergibt sich der arbitrage-freie Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_1}{S_1^1} \right] = 107.800q_1 + 100.000q_2 = \underline{105.200}.$$



- (iii) Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch und Aktie) und den zugehörigen Wert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$C_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega) \cdot \vartheta^0 + S_1^1(\omega) \cdot \vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1,05 \cdot \vartheta^0 + 126 \cdot \vartheta^1 &= 113.190, \\ 1,05 \cdot \vartheta^0 + 63 \cdot \vartheta^1 &= 105.000, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \underline{130}$, $\vartheta^0 = \underline{92.200}$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von 130 Aktien sowie der Anlage von 92.200 € im Sparbuch. Das hierfür erforderliche Anfangskapital entspricht dem arbitrage-freien Preis $C_0 = \underline{105.200}$ aus (ii).

- (iv) Angenommen, die Bull-Anleihe mit Auszahlungsprofil C_1 wäre zum Preis 110.000 € veräußerbar. In diesem Fall kann man zum Zeitpunkt 0 die Bull-Anleihe für diesen Preis verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis $C_0 = 105.200$ € implementieren und das freie Kapital 4.800 € in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die Auszahlung C_1 der Bull-Anleihe geleistet werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1 und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $1,05 \cdot 4.800 = 5.040$. Netto bleibt also für jedes Szenario ein risikofreier Gewinn, d. h. ein Preis 110.000 € ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage.

- (v) Umformen des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= 105.000 + \max\{0, 105.000 \cdot 0,3 \cdot \frac{S_1^1 - 100}{100}\} \\ &= 105.000 + 315 \cdot \max\{0, S_1^1 - 100\} = 105.000 + 315 \cdot C_1^{\text{call}}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $C_1^{\text{call}} = \frac{1}{315} (C_1 - 105.000)$, d. h. die Auszahlung der Call-Option ergibt sich modulo Skalierung als Differenz der Auszahlung der Bull-Anleihe und einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 105.000 €. Da die Nullkuponanleihe in $t = 0$ den Wert 100.000 € aufweist, ergibt sich als arbitrage-freier Preis der Call-Option

$$C_0^{\text{call}} = \frac{1}{315} (105.200 - 100.000) = \underline{16,5079}.$$

- (c) Risikoneutrale Maße:

Im alternativen Modell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^1}{S_1^0} \right] = \frac{S_1^1(\omega_1)}{S_1^0} \cdot q_1 + \frac{S_1^1(\omega_2)}{S_1^0} \cdot q_2 + \frac{S_1^1(\omega_3)}{S_1^0} \cdot q_3$$



sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der konkreten Werte ergibt sich

$$\begin{aligned} 100 &= 120q_1 + 60q_2 + 160q_3 \\ &= 120q_1 + 60q_2 + 160(1 - q_1 - q_2) \\ &= -40q_1 - 100q_2 + 160, \end{aligned}$$

also (parametrisiert über q_1) $q_2 = 0,6 - 0,4q_1$ und entsprechend

$$q_3 = 1 - q_1 - q_2 = 1 - q_1 - (0,6 - 0,4q_1) = 0,4 - 0,6q_1.$$

Aufgrund der Bedingung $q_1, q_2, q_3 \in (0, 1)$ muss dabei $q_1 \in (0, \frac{2}{3})$ gelten.

Die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße ist gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}_\alpha | q_1(\alpha) = \alpha, q_2(\alpha) = 0,6 - 0,4\alpha, q_3(\alpha) = 0,4 - 0,6\alpha, \alpha \in (0, \frac{2}{3})\}.$$

Bemerkung: Alternative Parametrisierungen sind möglich.

Arbitrage-freie Preise:

Für das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe

$$C_1(\omega_1) = 113.190, C_1(\omega_2) = 105.000, C_1(\omega_3) = 126.420$$

berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße \mathbb{Q}_α , $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$, einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha} \left[\frac{C_1}{S_1^0} \right] \\ &= S_0^0 \left(\frac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} \cdot q_1(\alpha) + \frac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} \cdot q_2(\alpha) + \frac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \cdot q_3 \right) \\ &= 107.800 \cdot \alpha + 100.000 \cdot (0,6 - 0,4\alpha) + 120.400 \cdot (0,4 - 0,6\alpha) \\ &= 108.160 - 4.440\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = (105.200; 108.160)$, also ein ganzes Preisintervall.

Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der Replikation entsprechen würde.



Aufgabe 4. [Zinsen, Zinsprodukte, Zinssensitivitäten] [32 Punkte]

- (a) [10 Punkte] Ein Aktuar erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 30$ Millionen €, $L_2 = 50$ Millionen € und $L_3 = 60$ Millionen €. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100 €).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins	Yield to Maturity
Bond 1	108,00	1	11,00%	2,78%
Bond 2	105,00	2	5,00%	2,41%
Bond 3	100,00	3	2,00%	2,00%

- (i) [4 Punkte] Bestimmen Sie - ausgehend von den drei Standardbonds - die Spot Rates $\{r_0^z(1), r_0^z(2), r_0^z(3)\}$ (zusammengesetzte Verzinsung) in $t = 0$ für Zerobonds mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre.
- (ii) [6 Punkte] Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welchen Wert hat das Portfolio P ? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsüberlegungen!)
- (b) [10 Punkte] Gegeben sei eine Anleihe mit unbegrenzter Restlaufzeit, eine sogenannte ewige Anleihe. Die konstante Kuponzahlung betrage $Z = Ni$, wobei N den Nennwert und i den Nominalzins der Anleihe bezeichnen.
- (i) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Barwert der ewigen Anleihe! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins $r > 0$ aus.

Hinweis: Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P(r, T) = N \left[\frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) (1 + r)^{-T} \right].$$

- (ii) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Macaulay-Duration der ewigen Anleihe!
- (iii) [3 Punkte] Bestimmen Sie die (relative) Konvexität der ewigen Anleihe!
- (c) [12 Punkte] Gegeben seien die Zahlungszeitpunkte $T_0 < T_1 < \dots < T_n$, wobei $T_k = k\delta$ für $k = 0, \dots, n$:
- (i) [3 Punkte] Definieren Sie die Modalitäten einer variabel verzinslichen Anleihe (VZA) mit Nennwert N !
- Hinweis:* Verwenden Sie den Marktzins $r_{T_{k-1}}^e(T_k)$ bei einfacher Verzinsung, $k = 1, \dots, n$.
- (ii) [1 Punkt] Zu welchem Zeitpunkt ist die Zinszahlung c_k der VZA zum Zeitpunkt T_k , $k = 1, \dots, n$, bekannt?



(iii) [1 Punkt] Welchen Wert nimmt die VZA im Zeitpunkt $T_0 = 0$ an?

(iv) [7 Punkte] Beweisen Sie Ihre Aussage aus Aufgabenteil (iii)!

Hinweis: Es gilt

$$r_{T_{k-1}}^e(T_k) = \frac{1}{T_k - T_{k-1}} \left(\frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)} - 1 \right),$$

wobei $P(t, u)$ den Preis eines u -fälligen Einheitszerobonds zum Zeitpunkt $t \leq u$ bezeichne.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Spot Rate $r_0^z(1)$ kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden, es gilt: $r_0^z(1) = 0,0278$. Die weiteren Spot-Rates können schrittweise aus den Kursen P_2, P_3 der Standardbonds mit den Restlaufzeiten 2, 3 berechnet werden:

- Es gilt

$$P_2 = 105 = 5(1,0278)^{-1} + 105(1 + r_0^z(2))^{-2}.$$

Hieraus resultiert: $r_0^z(2) = 0,0240$.

- Ferner gilt:

$$P_3 = 100 = 2(1,0278)^{-1} + 2(1,0240)^{-2} + 102(1 + r_0^z(3))^{-3}.$$

Hieraus resultiert: $r_0^z(3) = 0,0199$.

Die Spot Rates belaufen sich somit auf $\{2,78\%; 2,40\%; 1,99\%\}$.

(ii) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:

$$102N_3 = 60 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert $N_3 = \underline{588.235,29}$.

Weiter gilt

$$105N_2 + 2N_3 = 50 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert: $N_2 = \underline{464.985,99}$.

Schließlich gilt

$$111N_1 + 5N_2 + 2N_3 = 30 \text{ Millionen.}$$

Hieraus resultiert: $N_1 = \underline{238.726,12}$.

Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf

$$P = 108N_1 + 105N_2 + 100N_3 = \underline{133,4295 \text{ Millionen.}}$$



(b) (i) Betrachte $\lim_{T \rightarrow \infty} P(r, T)$. Es folgt:

$$P(r) := \lim_{T \rightarrow \infty} P(r, T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r} = Zr^{-1}.$$

(ii) Es gilt zunächst $P'(r) = dP(r)/dr = -Zr^{-2}$. Hieraus folgt für die modifizierte Duration

$$\text{DUR}^M(r) := -P'(r)/P(r) = r^{-1}$$

und somit für die Macaulay-Duration

$$\text{DUR}^{\text{Mac}}(r) = (1+r)\text{DUR}^M(r) = \frac{1+r}{r}.$$

(iii) Es gilt zunächst

$$P''(r) = d^2P(r)/dr^2 = 2Zr^{-3}.$$

Hieraus folgt für die Konvexität

$$\text{CONV}(r) := P''(r)/P(r) = 2r^{-2}.$$

(c) (i) Eine VZA ist definiert durch Kuponzahlungen c_k in den Zeitpunkten T_k , $k = 1, \dots, n$, sowie den Nennwert N . Für die Kuponzahlungen gilt

$$c_k = \delta r_{T_{k-1}}^e(T_k)N.$$

Der Zahlungsstrom der VZA ist dann gegeben durch $\{c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + N\}$.

(ii) Die Zinszahlung c_k ist (erst) zum Zeitpunkt T_{k-1} bekannt.

(iii) Es gilt $P(0) = N$.

(iv) Nach Hinweis gilt ($k = 1, \dots, n$)

$$c_k = \left(\frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)} - 1 \right) N.$$

Der Wert von c_k im Zeitpunkt T_{k-1} beträgt

$$\begin{aligned} c_k P(T_{k-1}, T_k) &= N(1 - P(T_{k-1}, T_k)) \\ &= NP(T_{k-1}, T_{k-1}) - NP(T_{k-1}, T_k). \end{aligned}$$

Dies lässt sich interpretieren als Differenz der Werte in T_{k-1} zweier Nullkuponanleihen mit Nennwert N , fällig in T_{k-1} bzw. T_k .

Der Wert von c_k zum Zeitpunkt $T_0 = 0$ beträgt somit ($k = 1, \dots, n$)

$$N(P(0, T_{k-1}) - P(0, T_k)).$$

Der Wert der Nennwertzahlung im Zeitpunkt $T_0 = 0$ beträgt

$$NP(0, T_n).$$

Insgesamt folgt hieraus

$$\begin{aligned} P(0) &= N \sum_{k=1}^n (P(0, T_{k-1}) - P(0, T_k)) + NP(0, T_n) \\ &= NP(0, 0) = N. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. [Bewertung von Aktienderivaten: Binomialmodell] [25 Punkte]

Die Aktien des Reisekonzerns „Sonne & Meer AG“ werden heute zum Kurs von 200 € pro Stück gehandelt. Zur Analyse von Aktienderivaten modellieren Sie den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ des Reisekonzerns durch ein mehrperiodiges Binomialmodell, in dem für die Aktie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 40% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 10% mit positiven Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden. Der einperiodige Zinssatz für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 5\%$.

- (a) [20 Punkte] Im Markt werden eine *Europäische Call-Option* sowie eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie jeweils mit Fälligkeit in $t = 2$ und Ausübungspreis 240 € gehandelt.
- (i) [2 Punkte] Geben Sie für alle Szenarien die Auszahlung C_2^{call} der Call-Option zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ an.
- (ii) [9 Punkte] Berechnen Sie beginnend in $t = 0$ die Replikationsstrategie für die Call-Option. Geben Sie in jedem Knoten die Kosten der perfekten Replikation an.
- (iii) [6 Punkte] Die Auszahlungsprofile der Call- und Put-Option sowie der Aktie sind miteinander verknüpft. Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um mithilfe der Ergebnisse aus (ii) die Replikationsstrategie in allen Knoten sowie den arbitrage-freien Preis in $t = 0$ der Put-Option zu ermitteln.
- (iv) [3 Punkte] Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis der Put-Option in $t = 0$ alternativ durch risikoneutrale Bewertung.
- (b) [5 Punkte] Bei einer *Asiatischen Call-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t \geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ und Ausübungspreis 200 ist das Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{asian}} := \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T S_k - 200 \right)^+$$

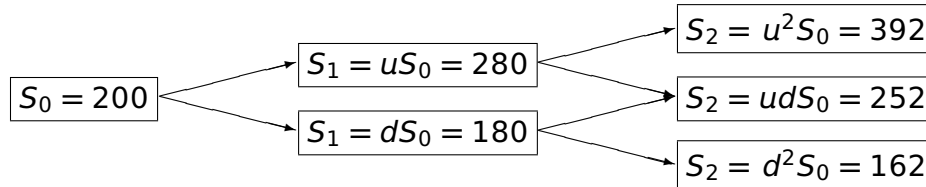
abhängig vom Durchschnittswert der Aktie zu bestimmten Zeitpunkten. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen u_1, u_2, \dots aus einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ generieren können.

Beschreiben Sie, wie Sie im Kontext des mehrperiodigen Binomialmodells die Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* implementieren können.



Lösungsskizze:

- (a) (i) Mit „Down“-Faktor $d = 0,9$ und „Up“-Faktor $u = 1,4$ ist der Kursverlauf S_0, S_1, S_2 der Aktie gegeben durch:



Hieraus ist die terminale Auszahlung der Call-Option für alle vier Szenarien $\omega \in \Omega = \{(u, u), (u, d), (d, u), (d, d)\}$ ablesbar:

$$C_2^{\text{call}}(\omega) = (S_2(\omega) - 240)^+ = \begin{cases} 152 & \text{für } \omega = (u, u), \\ 12 & \text{für } \omega = (u, d) \text{ und } \omega = (d, u), \\ 0 & \text{für } \omega = (d, d). \end{cases}$$

- (ii) Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1,05; 1,1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$t = 1, \omega = (u, \cdot)$:

$$\begin{aligned} 392x + 1,1025y &= 152 \\ 252x + 1,1025y &= 12 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{1}$, $y = \underline{-217,6871}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((u, \cdot)) = 280x + 1,05y = \underline{51,4286}.$$

$t = 1, \omega = (d, \cdot)$:

$$\begin{aligned} 252x + 1,1025y &= 12 \\ 162x + 1,1025y &= 0 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{0,1333}$, $y = \underline{-19,5918}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((d, \cdot)) = 180x + 1,05y = \underline{3,4286}.$$

$t = 0$:

$$\begin{aligned} 280x + 1,05y &= 51,4286 \\ 180x + 1,05y &= 3,4286 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{0,4800}$, $y = \underline{-79,0204}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_0 = 200x + y = \underline{16,9796}.$$

Dies ist der arbitrage-freie Preis C_0^{call} der Call-Option in $t = 0$.



- (iii) Aufgrund der Identität $(S_2 - 240)^+ - (240 - S_2)^+ = S_2 - 240$ besteht auf der Ebene der Auszahlungsprofile der Optionen der Zusammenhang

$$C_T^{\text{put}} = C_T^{\text{call}} - S_2 + 240,$$

d. h. die Auszahlung der Put-Option ergibt sich als Kombination der Call-Option, einer Short-Position von einer Aktie sowie dem Vermögen aus der Anlage von $240 \cdot (1,05)^{-2} = 217,6871 \text{ €}$ in $t = 0$ im Sparbuch („buy-and-hold“).

- Mithilfe dieser Darstellung ist aus der Replikationsstrategie der Call-Option die Replikation der Put-Option direkt ablesbar:

		$t = 0$	$t = 1, \omega = (u, \cdot)$	$t = 1, \omega = (d, \cdot)$
Call-Option	Einheiten Aktie	0,4800	1,0000	0,1333
	Einheiten Sparbuch	-79,0204	-217,6871	-19,5918
Put-Option	Einheiten Aktie	-0,5200	0,0000	-0,8867
	Einheiten Sparbuch	138,6667	0,0000	198,0952

- Für den Preis der Put-Option besteht die *Put-Call-Parität*

$$C_0^{\text{put}} = C_0^{\text{call}} - S_0 + 240 \cdot 1,05^{-2},$$

die sich aus obiger Darstellung durch risikoneutrale Bewertung bzw. das „Law of One Price“ ergibt. Einsetzen der Werte liefert

$$C_0^{\text{put}} = 16,9796 - 200 + 240 \cdot 1,05^{-2} = \underline{34,6667}.$$

- (iv) Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen risikoneutralen Maß \mathbb{Q} sind gegeben durch

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0,3$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = 0,7$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt $\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1 - q)^{2-N(\omega)} q^{N(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $N(\omega)$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet. Für die Put-Option mit den Auszahlungen

$$C_2^{\text{put}}(\omega) = (240 - S_2(\omega))^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u, u), \omega = (u, d) \text{ und } \omega = (d, u), \\ 78 & \text{für } \omega = (d, d). \end{cases}$$

liefert die risikoneutrale Bewertungsformel somit (übereinstimmend mit (iii)) den Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_2}{S_0^2} \right] = \frac{1}{(1,05)^2} 78 \cdot \mathbb{Q}[\{(d, d)\}] = \frac{1}{(1,05)^2} 78 \cdot (0,7)^2 = \underline{34,6667}.$$



- (b) Der arbitrage-freie Preis der Asiatischen Call-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem eindeutigen risikoneutralen Maß \mathbb{Q} :

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_T^{\text{Asian}}}{S_T^0} \right] = (1+r)^{-T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T S_k - 200 \right)^+ \right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten Pfaden $\{s_1(j), s_2(j), \dots, s_T(j)\}, j = 1, \dots, n$, des Aktienpreisprozesses $\{S_1, \dots, S_T\}$ approximiert werden:

$$C_0 = (1+r)^{-T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T S_k - 200 \right)^+ \right] \approx (1+r)^{-T} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T s_k(j) - 200 \right)^+.$$

Grundlage dieser Monte-Carlo-Approximation ist das starke Gesetz der großen Zahlen, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Der Aktienpreisprozess besitzt die Form

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^t Y_k, \quad t = 1, \dots, T,$$

wobei die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_T unter \mathbb{Q} unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{Q}[Y_k = u] = q$ und $\mathbb{Q}[Y_k = d] = 1 - q$ sind. Basierend auf unabhängigen Zufallszahlen $u_1(j), \dots, u_T(j), j = 1, \dots, n$, aus einer stetigen Gleichverteilung auf $[0, 1]$ können nun Pfade wie folgt simuliert werden.

- Setze $y_k(j) = u$, falls $u_k(j) \leq q$, und $y_k(j) = d$, falls $u_k(j) > q$.
- Erzeuge Pfade $j = 1, \dots, n$ des Aktienpreisprozesses durch

$$s_t(j) = S_0 \prod_{k=1}^t y_k(j), \quad t = 1, \dots, T.$$

Aufgabe 6. [Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [25 Punkte]

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ und die Dichte φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi^{-1}(0,005) = -2,5758$, $\Phi^{-1}(0,01) = -2,3263$, $\varphi(-2,3263) = 0,0267$.

- (a) [7 Punkte] Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2 , deren Verteilungen spezifiziert sind durch:

$$\mathbb{P}[X_i = 60] = 0,97, \mathbb{P}[X_i = -150] = 0,03 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda = 0,05$ den Value at Risk für die Finanzpositionen X_1 und X_2 sowie für die aggregierte Position $X_1 + X_2$. Erläutern Sie *kurz*, welche Implikation Ihr Berechnungsergebnis für die Praxisanwendung des Value at Risk hat.

- (b) [12 Punkte] Im einem Bericht finden Sie für eine Finanzposition X Angaben zum Value at Risk zum Niveau 0,005 sowie zum SCR (definiert über den Mean Value at Risk zum Niveau 0,005):

$$V@R_{0,005}(X) = 1.045.480, \quad \text{SCR}(X) = 1.545.480.$$

Sie interessieren sich jedoch zusätzlich für das Risiko, das mit dem Average Value at Risk gemessen wird. Nehmen Sie für Ihre weiteren Berechnungen vereinfachend an, dass X normalverteilt ist.

- (i) [3 Punkte] Definieren Sie das Risikomaß $AV@R$ formal. Erläutern Sie *kurz* anhand von zwei Fakten, welche Defizite des $V@R$ der $AV@R$ behebt.
- (ii) [6 Punkte] Berechnen Sie den $AV@R$ von X zum Niveau 0,01.
- (iii) [3 Punkte] Eine weitere in der Praxis gebräuchliche Alternative zum $V@R$ ist der Tail Value at Risk ($TV@R$). Geben Sie die formale Definition des $TV@R$ sowie eine ökonomische Interpretation an. Bestimmen Sie den $TV@R$ von X zum Niveau 0,01.
- (c) [6 Punkte] Ihre Versicherung hält ein Teilportfolio, das aus 2.000 Aktien des Sportartikelherstellers „Easy Runner AG“ und 5 ausfallfreien Nullkuponanleihen (Nennwert pro Anleihe: 100.000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) besteht. Der aktuelle Preis pro Aktie beträgt $S_0 = 50$ € und statistische Analysen deuten darauf hin, dass die jährliche Log-Rendite R normalverteilt mit Erwartungswert 6% und Standardabweichung 10% ist.

Berechnen Sie für dieses Teilportfolio den Value at Risk zum Niveau 0,5% im Einjahreshorizont.



Lösungsskizze:

- (a) Aus der Definition $V@R_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\}$ folgt unmittelbar $V@R_{0,05}(X_1) = V@R_{0,05}(X_2) = -60$. Die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ nimmt nur die folgenden Werte an:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 120 & \text{wenn } X_1 = X_2 = 60 \\ -90 & \text{wenn } X_1 = 60, X_2 = -150 \text{ oder } X_1 = -150, X_2 = 60 \\ -300 & \text{wenn } X_1 = X_2 = -150 \end{cases}$$

Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten gilt hierbei:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 120] &= \mathbb{P}[X_1 = 60, X_2 = 60] = \mathbb{P}[X_1 = 60] \mathbb{P}[X_2 = 60] \\ &= (0,97)^2 = 0,9409 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -90] &= \mathbb{P}[X_1 = 60, X_2 = -150] + \mathbb{P}[X_1 = -150, X_2 = 60] \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 60] \mathbb{P}[X_2 = -150] \\ &= 2 \cdot 0,03 \cdot 0,97 = 0,0582 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -300] &= \mathbb{P}[X_1 = -150, X_2 = -150] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = -150] \mathbb{P}[X_2 = -150] \\ &= (0,03)^2 = 0,0009 \end{aligned}$$

Hieraus ist ablesbar: $V@R_{0,05}(X_1 + X_2) = 90$. Insbesondere gilt:

$$90 = V@R_{0,05}(X_1 + X_2) > V@R_{0,05}(X_1) + V@R_{0,05}(X_2) = -120.$$

Das Ergebnis verdeutlicht, dass das Risikomaß $V@R$ im Allgemeinen nicht sub-additiv ist. Damit kann $V@R$ ökonomisch sinnvolle Diversifikation zwischen Risiken bestrafen. Hieraus können Probleme bei der Steuerung, z. B. im Kontext von Limit- und Schwellenwertsystemen, resultieren.

- (b) (i) Der Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ ist definiert durch

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda V@R_\alpha(X) d\alpha.$$

Dieses Risikomaß ist erstens *kohärent* und setzt insofern - im Gegensatz zum im Allgemeinen nicht sub-additiven Value at Risk - Anreize für ökonomisch sinnvolle Diversifikation. Zweitens berücksichtigt der $AV@R$ im Gegensatz zum $V@R$ den gesamten unteren Tail der Verteilung, sodass extreme Verluste, die mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten auftreten, erfasst werden.

- (ii) Für die normalverteilte Finanzpositionen mit Standardabweichung $\sigma(X)$ gilt

$$\begin{aligned} V@R_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X), \\ SCR(X) &= -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X), \\ AV@R_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] + \frac{1}{\lambda}\phi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(X). \end{aligned}$$



Damit folgt aus dem gegebenen Zahlenwerk

$$\mathbb{E}[X] = \text{SCR}(X) - V@R_{0,005}(X) = 500.000, \sigma(X) = -\frac{\text{SCR}(X)}{\Phi^{-1}(0,005)} = 600.000$$

und entsprechend

$$AV@R_{0,01} = -500.000 + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0,01))}{0,01} \cdot 600.000 = \underline{1.102.000}.$$

(iii) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ ist definiert durch

$$TV@R_{\lambda}(X) := \mathbb{E}[-X | -X > V@R_{\lambda}(X)].$$

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $V@R_{\lambda}(X)$ überschreitet. Für stetige Zufallsvariablen stimmt der $TV@R$ mit dem Risikomaß $AV@R$ überein, d. h., es gilt gemäß (ii) $TV@R_{0,01}(X) = \underline{1.102.000}$.

(c) Das Teilportfolio hat im Einjahreshorizont den Wert

$$V_1 = 2.000 \cdot S_0 \exp(R) + 5 \cdot 100.000 = 100.000 \exp(R) + 500.000,$$

wobei der Zufall nur die zufällige Rendite $R \sim \mathcal{N}(0,06; (0,1))^2$ getrieben wird. Mit $q_{0,005}$ als Notation für das Quantil einer Zufallsvariable zum Niveau 0,005 und den Rechenregeln der Quantiltransformation folgt somit

$$\begin{aligned} V@R_{0,005}(V_1) &= -q_{0,005}(V_1) \\ &= -q_{0,005}(100.000 \exp(R) + 500.000) \\ &= -(100.000 \exp(q_{0,005}(R)) + 500.000) \\ &= -100.000 \exp(0,06 + 0,1\Phi^{-1}(0,005)) - 500.000 \\ &= \underline{-582.071,2076}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. [Axiomatische Theorie der Risikomaße] [15 Punkte]

Sie befassen sich konzeptionell mit der Entwicklung von Risikomaßen auf einer Menge von Finanzpositionen \mathcal{X} (aufgefasst als Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F})) und deren Eigenschaften.

(a) [7 Punkte] Für ein monetäres Risikomaß ρ auf \mathcal{X} ist $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$ die Akzeptanzmenge von ρ . Sie möchten gerne umgekehrt eine Menge von akzeptablen Finanzpositionen festlegen und das zugehörige Risikomaß definieren.

(i) [2 Punkte] Wie kann ein monetäres Risikomaß ρ durch Vorgabe einer geeigneten Akzeptanzmenge \mathcal{A} definiert werden? Interpretieren Sie diese Definition ökonomisch.

(ii) [2 Punkte] Eine zentrale Anforderung an Risikomaße ist die Konvexität. Formulieren Sie diese Eigenschaft mathematisch und würdigen Sie diese kurz hinsichtlich Ihrer ökonomischen Bedeutung.

(iii) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das in (i) definierte monetäre Risikomaß konvex ist, falls die geeignet vorgegebene Akzeptanzmenge konvex ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $X, Y \in \mathcal{X}$ beliebige $m, n \in \mathbb{R}$ mit $X + m \in \mathcal{A}$ und $Y + n \in \mathcal{A}$ und nutzen Sie die Cash-Invarianz des monetären Risikomaßes.

(b) [8 Punkte] Mithilfe einer Teilmenge \mathcal{Q} aller Wahrscheinlichkeitsmaße \mathcal{M}_1 auf (Ω, \mathcal{F}) und einer Straffunktion $\alpha : \mathcal{M}_1 \rightarrow (-\infty, \infty]$ konstruieren Sie ein Risikomaß auf \mathcal{X} durch die „robuste Darstellung“

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \{E_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}.$$

(i) [2 Punkte] Interpretieren Sie anhand dieser robusten Darstellung, wie das Risikomaß ρ Risiken quantifiziert.

(ii) [3 Punkte] Zeigen Sie anhand der robusten Darstellung, dass das Funktional ρ in der Tat ein monetäres, konvexes Risikomaß ist.

(iii) [3 Punkte] Erläutern Sie, durch welche Eigenschaft sich konvexe und kohärente Risikomaße unterscheiden, und würdigen Sie diese Eigenschaft ökonomisch. Wie müssen Sie Ihre Straffunktion spezifizieren, sodass ρ ein kohärentes Risikomaß ist?

Lösungsskizze:

(a) (i) Durch Vorgabe einer geeigneten Akzeptanzmenge \mathcal{A} kann ein monetäres Risikomaß ρ durch die Vorschrift

$$\rho(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} \quad (1)$$



definiert werden. Definition (1) assoziiert das monetäre Risikomaß mit Kapitalanforderungen: $\rho(X)$ ist das kleinste Kapital, das zur Finanzposition X hinzugefügt werden muss, sodass X akzeptabel wird.

Bemerkung: Technisch muss die Akzeptanzmenge folgenden Bedingungen genügen:

1. $\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty$,
2. $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{X}, Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.

(ii) Ein monetäres Risikomaß heißt konvex, falls gilt:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{X}, \lambda \in [0, 1].$$

Konvexität spiegelt wider, dass ökonomisch sinnvolle Diversifikation das Risiko reduzieren kann, und ist insbesondere zentral für wirksame Limit- und Schwellenwertsysteme in der Praxis.

(iii) Für beliebige $X, Y \in \mathcal{X}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{R}$ mit $X + m \in \mathcal{A}$ und $Y + n \in \mathcal{A}$ aufgrund der Konvexität von \mathcal{A} auch $\lambda(X + m) + (1 - \lambda)(Y + n) \in \mathcal{A}$. Dies impliziert aufgrund der Cash-Invarianz

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho(\lambda(X + m) + (1 - \lambda)(Y + n)) \\ &= \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y + \lambda m + (1 - \lambda)n) \\ &= \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) - \lambda m - (1 - \lambda)n \end{aligned}$$

bzw. $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda m + (1 - \lambda)n$. Mit Definition (1) aus Lösung (a) (i) folgt insbesondere $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$, d. h. ρ ist konvex.

(b) (i) Die Maße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ repräsentieren mögliche probabilistische Modelle, die entsprechend der Straffunktion α mehr oder weniger ernst genommen werden. Die Kapitalanforderung $\rho(X)$ wird als „worst-case“ des pönalisierten erwarteten Verlustes $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$ über alle Modelle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ berechnet.

(ii) Nachzuweisen sind drei Eigenschaften:

(A) *Inverse Monotonie:* $X \leq Y$ f. s. $\Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$

(B) *Cash-Invarianz:* Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

(C) *Konvexität:* Für Finanzpositionen X, Y und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$



zu (A): Die Inverse Monotonie folgt unmittelbar aus $\mathbb{E}_Q[-X] \geq \mathbb{E}_Q[-Y]$ für alle $Q \in \mathcal{Q}$.

zu (B): Es gilt

$$\begin{aligned}\rho(X + m) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q[-(X + m)] - \alpha(Q) \} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q) \} - m = \rho(X) - m.\end{aligned}$$

zu (C):

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q[-(\lambda X + (1 - \lambda)Y)] - \alpha(Q) \} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \lambda(\mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q)) + (1 - \lambda)(\mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q)) \} \\ &\leq \lambda \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q) \} + (1 - \lambda) \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q) \} \\ &= \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y)\end{aligned}$$

- (iii) Kohärente Risikomaße sind konvexe Risikomaße, die zusätzlich positiv homogen sind, d. h. $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$. Die positive Homogenität besagt, dass eine Erhöhung des Exposures das Risiko um denselben Faktor erhöht. Diese Eigenschaft kann jedoch bedingt durch Konzentrations- und Liquiditätsrisiken verletzt sein und ist insofern im Allgemeinen kritisch zu sehen.

Für die positive Homogenität von ρ muss für die relevanten Maße die Straffunktion verschwinden. Insofern besteht Kohärenz genau dann, wenn $\alpha(Q) \in \{0, \infty\}$ für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ gilt.

Bemerkung: In diesem Fall reduziert sich die robuste Darstellung zu

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \tilde{\mathcal{Q}}} \mathbb{E}_Q[-X]$$

für die Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\tilde{\mathcal{Q}} := \{Q \in \mathcal{Q} | \alpha(Q) = 0\}$.



Aufgabe 8. [Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [17 Punkte]

- (a) [14 Punkte] Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2 . Für den Korrelationskoeffizienten $\rho := \rho(R_1, R_2)$ gelte $-1 < \rho < 1$.
- (i) [4 Punkte] Bestimmen Sie zunächst die Größe x_{MVP} , wobei $(x_{MVP}, 1 - x_{MVP})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!
- (ii) [1 Punkt] Begründen Sie, warum der erhaltene Ausdruck für x_{MVP} wohldefiniert ist!
- (iii) [3 Punkte] Welchen Wert muss die Kovarianz $C := \text{Cov}(R_1, R_2)$ annehmen, sodass $x_{MVP} = \frac{1}{5}$ beträgt?
- (iv) [3 Punkte] Unter welchen Bedingungen an die Kovarianz $C = \text{Cov}(R_1, R_2)$ gilt $0 \leq x_{MVP} \leq 1$, d. h., es können sowohl Leerverkäufe als auch eine Kreditaufnahme ausgeschlossen werden?
- (v) [3 Punkte] Weisen Sie nach, dass im Zwei-Aktien-Fall mit Investmentgewichten $(x, 1 - x)$ für jedes $0 \leq x \leq 1$ die Portfolio-Varianz $\sigma_p^2(x)$ monoton steigend im Korrelationskoeffizienten ρ ist.
- (b) [3 Punkte] Gegeben seien die beiden riskanten Wertpapiere A und B , deren Renditen R_A und R_B eine Korrelation $\rho = \rho(R_A, R_B)$ in Höhe von $\rho = 0,25$ aufweisen. Die erwarteten Renditen μ_A bzw. μ_B sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_A bzw. σ_B weisen die folgenden Werte auf:

$$\begin{aligned} \mu_A &= 0,05 & \sigma_A &= 0,10 \\ \mu_B &= 0,10 & \sigma_B &= 0,20. \end{aligned}$$

Ein Investor besitze die Präferenzfunktion $U(R) = \mathbb{E}[R] - 4\text{Var}(R)$. Ermitteln Sie die Struktur (Investmentgewichte) des für den Investor optimalen Portfolios!

Lösungsskizze:

- (a) Es bezeichne $R = xR_1 + (1-x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 = \text{Var}(R)$, $\sigma_1^2 = \text{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 = \text{Var}(R_2)$, $C = \text{Cov}(R_1, R_2)$. Es gilt damit

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)C.$$

- (i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \frac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2C - 4xC.$$

Es folgt

$$2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 4xC = 2\sigma_2^2 - 2C$$



und damit

$$x_{MVP} = \frac{\sigma_2^2 - C}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C}$$

(ii) Der Ausdruck für x_{MVP} ist wohldefiniert, falls der Nenner

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C = \text{Var}(R_1 - R_2)$$

positiv ist. Die Bedingung $\text{Var}(R_1 - R_2) > 0$ ist jedoch genau dann erfüllt, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d. h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$ für eine Konstante c . Die perfekte lineare Abhängigkeit von R_1 und R_2 ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

(iii) Aus $x_{MVP} = \frac{1}{5}$ folgt

$$5(\sigma_2^2 - C) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C) \quad \text{bzw.} \quad 4\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 3C.$$

Damit gilt insgesamt

$$C = \frac{1}{3}(4\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \frac{4}{3}\sigma_2^2 - \frac{1}{3}\sigma_1^2.$$

(iv)

$$x_{MVP} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 \geq C$$

$$x_{MVP} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 - C \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C \quad \Leftrightarrow \quad C \leq \sigma_1^2$$

$$\text{Fazit: } 0 \leq x_{MVP} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \leq \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}.$$

(v)

$$\sigma_p^2(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\rho x(1-x)\sigma_1\sigma_2$$

$$\frac{d\sigma_p^2(x)}{d\rho} = 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \geq 0$$

Damit ist σ_p^2 monoton steigend in ρ .

(b) Es bezeichnen $R = xR_A + (1-x)R_B$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien und $\mu := \mathbb{E}[R]$ bzw. $\sigma^2 := \text{Var}(R)$ Erwartungswert bzw. Varianz der Portfoliorendite.

Es gilt $\mu = x\mu_A + (1-x)\mu_B = 0,1 - 0,05x$ sowie

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_A\sigma_B \\ &= 0,01x^2 + 0,04(1-x)^2 + 2x(1-x) \cdot 0,25 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \\ &= 0,01x^2 + 0,04(1-x)^2 + 0,01x(1-x). \end{aligned}$$

Mit $U(R) = \mu - 4\sigma^2$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \frac{dU(R)}{dx} &= -0,05 - 4[0,02x - 0,08(1-x) + 0,01 - 0,02x] \\ &= 0,23 - 0,32x. \end{aligned}$$

Hieraus resultiert $x = 0,7188$ und für die Investmentgewichte des optimalen Portfolios gilt $(0,7188; 0,2813)$.

Aufgabe 9. [Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [13 Punkte]

- (a) [6 Punkte] Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form des effizienten Rands im Rahmen der Markowitz'schen Portfoliotheorie ($\sigma^2 \geq 0,0009$):

$$\mu = 0,16 + \sqrt{0,1(\sigma^2 - 0,0009)}.$$

Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich eine risikolose Anlage zu einem sicheren Zins von $r_0 = 0,1$ existiert und bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden!

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Schnittpunkt von Tangentialgerade und dem effizienten Rand existieren muss.

- (b) [7 Punkte] Gegeben seien die Einperiodenrenditen R_i ($i = 1, \dots, m$) der Aktien $i = 1, \dots, m$ sowie eine Indexrendite R_I der Form $R_I = \sum_{i=1}^m x_i R_i$ ($0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, m$; $\sum x_i = 1$).
- (i) [1 Punkt] Definieren Sie das systematische Risiko S_i von Aktie i in Bezug auf die Indexrendite R_I .
- (ii) [2 Punkte] In welcher Beziehung stehen die Standardabweichung $\sigma(R_I)$ der Indexrendite R_I und die systematischen Risiken S_i der Aktien i , $i = 1, \dots, n$? Interpretieren Sie auf dieser Grundlage das systematische Risiko S_i !
- (iii) [4 Punkte] Weisen Sie die Beziehung aus Aufgabenteil (ii) nach!

Lösungsskizze:

- (a) Die Schnittpunktbedingung lautet

$$0,1 + a\sigma = 0,16 + \sqrt{0,1\sigma^2 - 0,0009}.$$

Auflösung nach σ ergibt:

$$\begin{aligned} (a\sigma - 0,06)^2 &= 0,1\sigma^2 - 0,0009 \\ (a^2 - 0,1)\sigma^2 - 0,12a\sigma + 0,0045 &= 0 \end{aligned}$$

Da eine Tangente vorliegt, darf nur „ein Schnittpunkt“ existieren. Eine einwertige Nullstelle liegt dann vor, wenn die Diskriminate $B^2 - 4AC$ der quadratischen Gleichung $A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$ null ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 0,0144a^2 - 0,018a^2 + 0,0018 &= 0 \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{0,0018}{0,0036} = 0,5. \end{aligned}$$



Aufgrund von $a > 0$ folgt hieraus $a \approx 0,7071$.

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist somit gegeben durch

$$\mu = 0,1 + 0,7071\sigma.$$

(b) (i) Das systematische Risiko von Aktie i in Bezug auf R_I ist definiert durch

$$S_i = \rho(R_i, R_I)\sigma(R_i).$$

(ii) Es gilt

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^m x_i S_i.$$

Damit erfasst S_i den Beitrag von Aktie i zum Risiko des durch den Index I repräsentierten Portfolios.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_I) &= \text{Cov}(R_I, R_I) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^m x_i R_i, R_I\right) \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \text{Cov}(R_i, R_I) = \sum_{i=1}^m x_i \rho(R_i, R_I) \sigma(R_i) \sigma(R_I). \end{aligned}$$

Division der linken und rechten Seite durch $\sigma(R_I)$ ergibt schließlich

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^m x_i S_i.$$