DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Investmentmanagement

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15. Oktober 2021

Hinweise:

- Die Klausur ist als *Open-Book-Klausur* konzipiert. Als weiteres Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Raimond Maurer,
Dr. Aristid Neuburger

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][12 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Garantie-Zertifikat auf eine Einheit der YZ-Aktie mit einer Laufzeit von 5 Jahren. Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer des Zertifikats den Marktwert S_5 der YZ-Aktie, *mindestens* jedoch den Betrag 5.000 € (Floor).

Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_5 des Zertifikats zum Zeitpunkt 5 formal dar. Zerlegen Sie diese Position dann alternativ auf *zwei Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese beiden Zerlegungen ein?

(b) *[6 Punkte]* Ein Investor legt sein anfängliches Kapital V_0 auf die folgende Weise an. Er erwirbt 70 DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 und einer Laufzeit von 5 Jahren sowie 30 DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2 und einer Laufzeit von ebenfalls 5 Jahren. Den Restbetrag legt der Investor (mit Zinseszins) über 5 Jahre mit einer Verzinsung in Höhe von 3% p. a. an.

Stellen Sie die Rückfluss-Position V_5 dieses Investments zum Zeitpunkt $T = 5$ dar. Welches Mindest-Endvermögen F („Floor“) hat sich der Investor bei Anwendung dieser Strategie gesichert? Welche Mindestverzinsung r_F („Floor-Zins“) - bezogen auf das anfängliche Kapital - resultiert hieraus?

Lösungsskizze:

(a) Rückfluss-Position:

$$V_5 = \max\{S_5, 5.000\}$$

Zerlegung 1:

$$V_5 = S_5 + \max\{5.000 - S_5, 0\}$$

Zerlegung 1 beinhaltet einen Put auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 5 und Ausübungspreis 5.000.

Zerlegung 2:

$$V_5 = 5.000 + \max\{S_5 - 5.000, 0\}$$

Zerlegung 2 beinhaltet einen Call auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 5 und Ausübungspreis 5.000.

(b) Es bezeichne $C_0 = C_0(K_1)$ den Preis eines DAX-Calls mit Ausübungspreis K_1 sowie $P_0 = P_0(K_2)$ den Preis eines DAX-Puts mit Ausübungspreis K_2, jeweils zum Zeitpunkt $t = 0$.

Rückfluss-Position:

$V_5 = 70\max\{\mathrm{DAX}(5) - K_1, 0\} + 30\max\{K_2 - \mathrm{DAX}(5), 0\} + (V_0 - 70C_0 - 30P_0)(1{,}03)^5$,
wobei DAX(5) den Marktwert des DAX zum Zeitpunkt $t = 5$ bezeichne. Dabei ist vorauszusetzen, dass $V_0 \geq 70C_0 + 30\,P_0$.

Mindest-Endvermögen:

Da $\max\{\mathrm{DAX}(5)-K_1,0\}\geq 0$ und $\max\{K_2-\mathrm{DAX}(5),0\}\geq 0$, gilt

$$V_5 \geq (V_0-70C_0-30P_0)(1{,}03)^5 =: F.$$

Floor-Zins:

Es muss gelten

$$V_0(1+r_F)^5 = F = (V_0-70C_0-30P_0)(1{,}03)^5.$$

Hieraus resultiert

$$\begin{aligned} r_F &= \left[\tfrac{V_0-70C_0-30P_0}{V_0}(1{,}03)^5\right]^{1/5}-1 \\ &= (1{,}03)\left(\tfrac{V_0-70C_0-30P_0}{V_0}\right)^{1/5}-1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [16 Punkte]*

B. Noulli möchte 1.000 € für ein Jahr anlegen und besitzt die beiden folgenden Anlagealternativen:

A: Eine sichere Anlage zum Zinssatz 10%.

B: Eine risikobehaftete Anlage. Hierbei verdoppelt sich entweder das eingesetzte Kapital binnen Jahresfrist oder es halbiert sich. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verdopplung betrage $0 < p < 1$.

B. Noulli besitzt die Nutzenfunktion $u(x) = \ln x$ bezogen auf die Endvermögensposition $V > 0$ nach einem Jahr.

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen das Arrow-Pratt-Maß $r(x)$ für die absolute Risikoaversion von B. Noulli! Ist die absolute Risikoaversion monoton steigend oder monoton fallend in x?

(b) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative A.

(c) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von p - den Erwartungsnutzen und das Sicherheitsäquivalent von Anlagealternative B.

(d) *[2 Punkte]* Für welche Wahrscheinlichkeit p sind die beiden Anlagealternativen für B. Noulli nutzenäquivalent?

(e) *[5 Punkte]* B. Noulli investiert nun einen Bruchteil α $(0 < \alpha < 1)$ seines Anlagebetrags in die risikobehaftete Anlagealternative und den restlichen Betrag in die sichere Anlagealternative. Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von α - die entsprechende Endvermögensposition sowie deren Erwartungsnutzen.

Lösungsskizze:

(a) $r(x) := -u''(x)/u'(x)$

Für $u(x) = \ln x$ gilt $u'(x) = x^{-1}$ und $u''(x) = -x^{-2}$. Mithin gilt

$$r(x) = \tfrac{1}{x}.$$

Hieraus folgt $r'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, d. h. die Risikoaversion ist monoton fallend.

(b) Bezeichne V_A die Endvermögensposition der Anlagealternative A. Dann gilt $V_A = 1.000 \cdot 1{,}1 = 1.100$ und $\mathbb{E}[\ln V_A] = \ln V_A = \ln 1.100 = 7{,}0031$. Für das Sicherheitsäquivalent gilt

$$s(V_A) = u^{-1}(\mathbb{E}[\ln V_A]) = \exp(\ln(V_A)) = V_A = 1.100.$$

(c) Bezeichne V_B die Endvermögensposition der Anlagealternative B. Dann gilt $\mathbb{P}[V_B = 2.000] = p$ und $\mathbb{P}[V_B = 500] = 1 - p$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln V_B] &= p \ln 2.000 + (1-p) \ln 500 \\ &= p \ln \tfrac{2.000}{500} + \ln 500 \\ &= p \ln 4 + \ln 500 \\ &= 1{,}3863p + 6{,}2146.\end{aligned}$$

Für das Sicherheitsäquivalent gilt entsprechend

$$s(V_B) = \exp(6{,}2146 + 1{,}3863p).$$

(d) Es muss gelten

$$1{,}3863p + 6{,}2146 = 7{,}0031.$$

Hieraus folgt $p = 0{,}5688$.

(e) Bezeichne V_α die Endvermögensposition des Mischportfolios in Abhängigkeit von α. Es gilt

$$\begin{aligned}V_\alpha &= \begin{cases} 2.000\alpha + (1-\alpha)1.100 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ \quad 500\alpha + (1-\alpha)1.100 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1.100 + 900\alpha & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 1.100 - 600\alpha & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\mathbb{E}[\ln V_\alpha] = p \ln(1.100 + 900\alpha) + (1-p) \ln(1.100 - 600\alpha).$$

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

Der Solarparkbetreiber „Sonnenschein AG“ beabsichtigt eine Anleihe („Bull-Anleihe“) mit den folgenden Modalitäten zu emittieren:

- Die Laufzeit beträgt 1 Jahr, der Nennwert ist 105.000 € und es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen.
- Steigt der Aktienkurs der Sonnenschein AG in $t = 1$ im Vergleich zum heutigen Aktienkurs, so erhält der Käufer der Anleihe zusätzlich zum Nennwert einen Bonus in Höhe von 30% der einjährigen Aktienrendite auf den Nennwert.
- Die Sonnenschein AG strebt als Ausgabepreis der Anleihe 110.000 € an.

Ihr Finanzvorstand bittet Sie, diese Anlagemöglichkeit zu überprüfen. Sie entscheiden sich für die Modellierung in einem statischen Einperiodenmodell mit den primären Finanztiteln „Sparbuch“ (Produkt 0) und „Aktie“ (Produkt 1).

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie das Auszahlungsprofil C_1 der Bull-Anleihe zur Fälligkeit $t = 1$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_1^1 in $t = 1$ an, wenn der Startpreis der Aktie 100 € beträgt.

(b) *[15 Punkte]* Bei Ihrer Modellierung gehen Sie zunächst für die Anzahl der Sonnentage von zwei Szenarien ω_1, ω_2, die aus Ihrer Sicht mit positiven Wahrscheinlichkeiten eintreten können, und folgenden Preisentwicklungen aus:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} & & & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 126} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \boxed{S_0^1 = 100} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} & & & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 63} \end{tikzcd}$$

(i) *[3 Punkte]* Überprüfen Sie, dass Ihr Finanzmarktmodell arbitrage-frei ist. Geben Sie inklusive Herleitung die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße explizit an.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0 der Bull-Anleihe zum Zeitpunkt $t = 0$ durch risikoneutrale Bewertung.

(iii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für die Bull-Anleihe. Wie hoch sind die Kosten der perfekten Replikation?

(iv) *[4 Punkte]* Der angestrebte Ausgabepreis von 110.000 € führt in Ihrem Modell zu Arbitrage. Geben Sie - inklusive Begründung - explizit eine Arbitragemöglichkeit an.

(v) *[3 Punkte]* Stellen Sie das Auszahlungsprofil C_1^{call} einer Europäischen Call-Option auf die Aktie der Sonnenschein AG mit Fälligkeit in $t = 1$ und Ausübungspreis 100 € mithilfe des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe dar. Leiten Sie daraus den arbitrage-freien Preis der Call-Option ab.

(c) *[7 Punkte]* Alternativ erweitern Sie Ihr Modell um ein drittes Szenario ω_3:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1{,}05} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1{,}05} \\ & \boxed{S_1^0(\omega_3) = 1{,}05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 126} \\ \boxed{S_0^1 = 100} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = \ \ 63} \\ & \boxed{S_1^1(\omega_3) = 168} \end{tikzcd}$$

Berechnen Sie in diesem Modell die Menge der arbitrage-freien Preise der Bull-Anleihe. Ist die Bull-Anleihe in diesem Modell replizierbar?

Lösungsskizze:

(a) Das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \max\{105.000, 105.000(1 + 0{,}3 \cdot \tfrac{S_1^1 - 100}{100})\} \\ &= 105.000 + \max\{0, 105.000 \cdot 0{,}3 \cdot \tfrac{S_1^1 - 100}{100})\}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Alternative Darstellungen sind möglich, siehe auch (b) (v).

(b) (i) Der *1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* besagt, dass ein diskretes Finanzmarktmodell genau dann arbitrage-frei ist, wenn ein äquivalentes risikoneutrales Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Im vorliegenden Finanzmarktmodell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 100 = 120 q_1 + 60 q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$100 = 120 q_1 + 60(1 - q_1) = 60 q_1 + 60$$

und entsprechend $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ für die Gewichte des eindeutig bestimmten äquivalenten risikoneutralen Maßes. Insbesondere ist das Finanzmarktmodell arbitrage-frei.

(ii) Nach (a) beträgt das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe zur Fälligkeit konkret

$$C_1(\omega) = \max\{105.000, 105.000(1 + 0{,}3 \cdot \tfrac{S_1^1 - 100}{100})\} = \begin{cases} 113.190 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 105.000 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel sowie den Gewichten $q_1 = \frac{2}{3}$ und $q_2 = \frac{1}{3}$ ergibt sich der arbitrage-freie Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] = 107.800 q_1 + 100.000 q_2 = \underline{105.200}.$$

(iii) Für die Replikationsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ (beschrieben durch die Stückzahlen von Sparbuch und Aktie) und den zugehörigen Wert V_1^ϑ in $t = 1$ muss gelten

$$C_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega) \cdot \vartheta^0 + S_1^1(\omega) \cdot \vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + 126 \cdot \vartheta^1 &= 113.190, \\ 1{,}05 \cdot \vartheta^0 + \;\; 63 \cdot \vartheta^1 &= 105.000, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \underline{130}$, $\vartheta^0 = \underline{92.200}$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von 130 Aktien sowie der Anlage von 92.200 € im Sparbuch. Das hierfür erforderliche Anfangskapital entspricht dem arbitrage-freien Preis $C_0 = \underline{105.200}$ aus (ii).

(iv) Angenommen, die Bull-Anleihe mit Auszahlungsprofil C_1 wäre zum Preis 110.000 € veräußerbar. In diesem Fall kann man zum Zeitpunkt 0 die Bull-Anleihe für diesen Preis verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis $C_0 = 105.200$ € implementieren und das freie Kapital 4.800 € in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die Auszahlung C_1 der Bull-Anleihe geleistet werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1 und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $1{,}05 \cdot 4.800 = 5.040$. Netto bleibt also für jedes Szenario ein risikofreier Gewinn, d. h. ein Preis 110.000 € ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage.

(v) Umformen des Auszahlungsprofils der Bull-Anleihe liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= 105.000 + \max\{0, 105.000 \cdot 0{,}3 \cdot \tfrac{S_1^1 - 100}{100})\} \\ &= 105.000 + 315 \cdot \max\{0, S_1^1 - 100\} = 105.000 + 315 \cdot C_1^{\text{call}}. \end{aligned}$$

Folglich gilt $C_1^{\text{call}} = \frac{1}{315}(C_1 - 105.000)$, d. h. die Auszahlung der Call-Option ergibt sich modulo Skalierung als Differenz der Auszahlung der Bull-Anleihe und einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 105.000 €. Da die Nullkuponanleihe in $t = 0$ den Wert 100.000 € aufweist, ergibt sich als arbitrage-freier Preis der Call-Option

$$C_0^{\text{call}} = \frac{1}{315}(105.200 - 100.000) = \underline{16{,}5079}.$$

(c) <u>Risikoneutrale Maße:</u>

Im alternativen Modell sind die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3) \cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Durch Einsetzen der konkreten Werte ergibt sich

$$\begin{aligned} 100 &= 120q_1 + 60q_2 + 160q_3 \\ &= 120q_1 + 60q_2 + 160(1 - q_1 - q_2) \\ &= -40q_1 - 100q_2 + 160, \end{aligned}$$

also (parametrisiert über q_1) $q_2 = 0{,}6 - 0{,}4q_1$ und entsprechend

$$q_3 = 1 - q_1 - q_2 = 1 - q_1 - (0{,}6 - 0{,}4q_1) = 0{,}4 - 0{,}6q_1.$$

Aufgrund der Bedingung $q_1, q_2, q_3 \in (0,1)$ muss dabei $q_1 \in (0, \frac{2}{3})$ gelten.

Die Menge der äquivalenten risikoneutralen Maße ist gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q}_\alpha | q_1(\alpha) = \alpha, q_2(\alpha) = 0{,}6 - 0{,}4\alpha, q_3(\alpha) = 0{,}4 - 0{,}6\alpha, \alpha \in (0, \tfrac{2}{3})\}.$$

Bemerkung: Alternative Parametrisierungen sind möglich.

<u>Arbitrage-freie Preise:</u>

Für das Auszahlungsprofil der Bull-Anleihe

$$C_1(\omega_1) = 113.190,\ C_1(\omega_2) = 105.000,\ C_1(\omega_3) = 126.420$$

berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$, einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] \\ &= S_0^0 \left(\frac{C_1(\omega_1)}{S_1^0} \cdot q_1(\alpha) + \frac{C_1(\omega_2)}{S_1^0} \cdot q_2(\alpha) + \frac{C_1(\omega_3)}{S_1^0} \cdot q_3\right) \\ &= 107.800 \cdot \alpha + 100.000 \cdot (0{,}6 - 0{,}4\alpha) + 120.400 \cdot (0{,}4 - 0{,}6\alpha) \\ &= 108.160 - 4.440\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = \underline{(105.200; 108.160)}$, also ein ganzes Preisintervall.

Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der Replikation entsprechen würde.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Zinssensitivitäten] [32 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Ein Aktuar erwartet zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ Zahlungsverpflichtungen in Höhe von $L_1 = 30$ Millionen €, $L_2 = 50$ Millionen € und $L_3 = 60$ Millionen €. Am Markt werden die folgenden Standardbonds gehandelt (die Kurse beziehen sich jeweils auf einen Nennwert von 100 €).

	Kurs	Restlaufzeit	Nominalzins	Yield to Maturity
Bond 1	108,00	1	11,00%	2,78%
Bond 2	105,00	2	5,00%	2,41%
Bond 3	100,00	3	2,00%	2,00%

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie - ausgehend von den drei Standardbonds - die Spot Rates $\{r_0^z(1), r_0^z(2), r_0^z(3)\}$ (zusammengesetzte Verzinsung) in $t = 0$ für Zerobonds mit den Laufzeiten 1, 2 und 3 Jahre.

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie die Stückzahlen $\{N_1, N_2, N_3\}$ eines Portfolios P aus den drei Standardbonds so, dass die Zahlungsverpflichtungen exakt gedeckt sind! Welchen Wert hat das Portfolio P? (Vernachlässigen Sie dabei Ganzzahligkeitsüberlegungen!)

(b) *[10 Punkte]* Gegeben sei eine Anleihe mit unbegrenzter Restlaufzeit, eine sogenannte ewige Anleihe. Die konstante Kuponzahlung betrage $Z = Ni$, wobei N den Nennwert und i den Nominalzins der Anleihe bezeichnen.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Barwert der ewigen Anleihe! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins $r > 0$ aus.

Hinweis: Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P(r,T) = N\left[\tfrac{i}{r} + \left(1 - \tfrac{i}{r}\right)(1+r)^{-T}\right].$$

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die Macaulay-Duration der ewigen Anleihe!

(iii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die (relative) Konvexität der ewigen Anleihe!

(c) *[12 Punkte]* Gegeben seien die Zahlungszeitpunkte $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$, wobei $T_k = k\delta$ für $k = 0, \ldots, n$:

(i) *[3 Punkte]* Definieren Sie die Modalitäten einer variabel verzinslichen Anleihe (VZA) mit Nennwert N!

Hinweis: Verwenden Sie den Marktzins $r^e_{T_{k-1}}(T_k)$ bei einfacher Verzinsung, $k = 1, \ldots, n$.

(ii) *[1 Punkt]* Zu welchem Zeitpunkt ist die Zinszahlung c_k der VZA zum Zeitpunkt T_k, $k = 1, \ldots, n$, bekannt?

(iii) *[1 Punkt]* Welchen Wert nimmt die VZA im Zeitpunkt $T_0 = 0$ an?

(iv) *[7 Punkte]* Beweisen Sie Ihre Aussage aus Aufgabenteil (iii)!

Hinweis: Es gilt
$$r^e_{T_{k-1}}(T_k) = \frac{1}{T_k - T_{k-1}}\left(\frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)} - 1\right),$$
wobei $P(t, u)$ den Preis eines u-fälligen Einheitszerobonds zum Zeitpunkt $t \leq u$ bezeichne.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Spot Rate $r^z_0(1)$ kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden, es gilt: $r^z_0(1) = 0{,}0278$. Die weiteren Spot-Rates können schrittweise aus den Kursen P_2, P_3 der Standardbonds mit den Restlaufzeiten $2, 3$ berechnet werden:

- Es gilt
$$P_2 = 105 = 5(1{,}0278)^{-1} + 105(1 + r^z_0(2))^{-2}.$$
Hieraus resultiert: $r^z_0(2) = 0{,}0240$.

- Ferner gilt:
$$P_3 = 100 = 2(1{,}0278)^{-1} + 2(1{,}0240)^{-2} + 102(1 + r^z_0(3))^{-3}.$$
Hieraus resultiert: $r^z_0(3) = 0{,}0199$.

Die Spot Rates belaufen sich somit auf $\{2{,}78\%; 2{,}40\%; 1{,}99\%\}$.

(ii) Zunächst ist N_3 auf Basis von Bond 3 zu bestimmen. Es muss gelten:
$$102N_3 = 60\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert $N_3 = \underline{588.235{,}29}$.

Weiter gilt
$$105N_2 + 2N_3 = 50\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert: $N_2 = \underline{464.985{,}99}$.

Schließlich gilt
$$111N_1 + 5N_2 + 2N_3 = 30\,\text{Millionen}.$$
Hieraus resultiert: $N_1 = \underline{238.726{,}12}$.

Der Wert des Portfolios beläuft sich damit auf
$$P = 108N_1 + 105N_2 + 100N_3 = \underline{133{,}4295\text{ Millionen}}.$$

(b) (i) Betrachte $\lim_{T\to\infty} P(r,T)$. Es folgt:

$$P(r) := \lim_{T\to\infty} P(r,T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r} = Zr^{-1}.$$

(ii) Es gilt zunächst $P'(r) = dP(r)/dr = -Zr^{-2}$. Hieraus folgt für die modifizierte Duration

$$\mathrm{DUR}^M(r) := -P'(r)/P(r) = r^{-1}$$

und somit für die Macaulay-Duration

$$\mathrm{DUR}^{Mac}(r) = (1+r)\mathrm{DUR}^M(r) = \frac{1+r}{r}.$$

(iii) Es gilt zunächst

$$P''(r) = d^2P(r)/dr^2 = 2Zr^{-3}.$$

Hieraus folgt für die Konvexität

$$\mathrm{CONV}(r) := P''(r)/P(r) = 2r^{-2}.$$

(c) (i) Eine VZA ist definiert durch Kuponzahlungen c_k in den Zeitpunkten T_k, $k = 1, \ldots, n$, sowie den Nennwert N. Für die Kuponzahlungen gilt

$$c_k = \delta r^e_{T_{k-1}}(T_k)N.$$

Der Zahlungsstrom der VZA ist dann gegeben durch $\{c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + N\}$.

(ii) Die Zinszahlung c_k ist (erst) zum Zeitpunkt T_{k-1} bekannt.

(iii) Es gilt $P(0) = N$.

(iv) Nach Hinweis gilt ($k = 1, \ldots, n$)

$$c_k = \left(\frac{1}{P(T_{k-1}, T_k)} - 1\right)N.$$

Der Wert von c_k im Zeitpunkt T_{k-1} beträgt

$$\begin{aligned} c_k P(T_{k-1}, T_k) &= N(1 - P(T_{k-1}, T_k)) \\ &= NP(T_{k-1}, T_{k-1}) - NP(T_{k-1}, T_k). \end{aligned}$$

Dies lässt sich interpretieren als Differenz der Werte in T_{k-1} zweier Nullkuponanleihen mit Nennwert N, fällig in T_{k-1} bzw. T_k.

Der Wert von c_k zum Zeitpunkt $T_0 = 0$ beträgt somit ($k = 1, \ldots, n$)

$$N\left(P(0, T_{k-1}) - P(0, T_k)\right).$$

Der Wert der Nennwertzahlung im Zeitpunkt $T_0 = 0$ beträgt

$$NP(0, T_n).$$

Insgesamt folgt hieraus

$$\begin{aligned} P(0) &= N\sum_{k=1}^{n}(P(0, T_{k-1}) - P(0, T_k)) + NP(0, T_n) \\ &= NP(0,0) = N. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *[Bewertung von Aktienderivaten: Binomialmodell] [25 Punkte]*

Die Aktien des Reisekonzerns „Sonne & Meer AG“ werden heute zum Kurs von 200 € pro Stück gehandelt. Zur Analyse von Aktienderivaten modellieren Sie den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ des Reisekonzerns durch ein mehrperiodiges Binomialmodell, in dem für die Aktie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 40% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 10% mit positiven Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden. Der einperiodige Zinssatz für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 5\%$.

(a) *[20 Punkte]* Im Markt werden eine *Europäische Call-Option* sowie eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie jeweils mit Fälligkeit in $t = 2$ und Ausübungspreis 240 € gehandelt.

   (i) *[2 Punkte]* Geben Sie für alle Szenarien die Auszahlung C_2^{call} der Call-Option zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ an.

   (ii) *[9 Punkte]* Berechnen Sie beginnend in $t = 0$ die Replikationsstrategie für die Call-Option. Geben Sie in jedem Knoten die Kosten der perfekten Replikation an.

   (iii) *[6 Punkte]* Die Auszahlungsprofile der Call- und Put-Option sowie der Aktie sind miteinander verknüpft. Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um mithilfe der Ergebnisse aus (ii) die Replikationsstrategie in allen Knoten sowie den arbitrage-freien Preis in $t = 0$ der Put-Option zu ermitteln.

   (iv) *[3 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis der Put-Option in $t = 0$ alternativ durch risikoneutrale Bewertung.

(b) *[5 Punkte]* Bei einer *Asiatischen Call-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ und Ausübungspreis 200 ist das Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{asian}} := \left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 200\right)^+$$

abhängig vom Durchschnittswert der Aktie zu bestimmten Zeitpunkten. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $u_1, u_2, \ldots$ aus einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ generieren können.

Beschreiben Sie, wie Sie im Kontext des mehrperiodigen Binomialmodells die Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* implementieren können.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit „Down"-Faktor $d = 0{,}9$ und „Up"-Faktor $u = 1{,}4$ ist der Kursverlauf S_0, S_1, S_2 der Aktie gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = u^2 S_0 = 392} \\
 & \boxed{S_1 = uS_0 = 280} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 200} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = udS_0 = 252} \\
 & \boxed{S_1 = dS_0 = 180} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = d^2 S_0 = 162}
\end{tikzcd}$$

Hieraus ist die terminale Auszahlung der Call-Option für alle vier Szenarien $\omega \in \Omega = \{(u,u), (u,d), (d,u), (d,d)\}$ ablesbar:

$$C_2^{\text{call}}(\omega) = (S_2(\omega) - 240)^+ = \begin{cases} 152 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 12 & \text{für } \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 0 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

(ii) Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1; 1+r; (1+r)^2) = (1; 1{,}05; 1{,}1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u, \cdot):}$

$$\begin{aligned} 392x + 1{,}1025y &= 152 \\ 252x + 1{,}1025y &= 12 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{1}$, $y = \underline{-217{,}6871}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((u,\cdot)) = 280x + 1{,}05y = \underline{51{,}4286}.$$

$\underline{t = 1, \omega = (d, \cdot):}$

$$\begin{aligned} 252x + 1{,}1025y &= 12 \\ 162x + 1{,}1025y &= 0 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{0{,}1333}$, $y = \underline{-19{,}5918}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_1((d,\cdot)) = 180x + 1{,}05y = \underline{3{,}4286}.$$

$\underline{t = 0:}$

$$\begin{aligned} 280x + 1{,}05y &= 51{,}4286 \\ 180x + 1{,}05y &= 3{,}4286 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = \underline{0{,}4800}$, $y = \underline{-79{,}0204}$. Die Kosten der Replikation betragen

$$V_0 = 200x + y = \underline{16{,}9796}.$$

Dies ist der arbitrage-freie Preis C_0^{call} der Call-Option in $t = 0$.

(iii) Aufgrund der Identität $(S_2 - 240)^+ - (240 - S_2)^+ = S_2 - 240$ besteht auf der Ebene der Auszahlungsprofile der Optionen der Zusammenhang

$$C_T^{\text{put}} = C_T^{\text{call}} - S_2 + 240,$$

d. h. die Auszahlung der Put-Option ergibt sich als Kombination der Call-Option, einer Short-Position von einer Aktie sowie dem Vermögen aus der Anlage von $240 \cdot (1{,}05)^{-2} = 217{,}6871$ € in $t = 0$ im Sparbuch („buy-and-hold").

- Mithilfe dieser Darstellung ist aus der Replikationsstrategie der Call-Option die Replikation der Put-Option direkt ablesbar:

		$t=0$	$t=1, \omega=(u,\cdot)$	$t=1, \omega=(d,\cdot)$
Call-Option	Einheiten Aktie	0,4800	1,0000	0,1333
	Einheiten Sparbuch	-79,0204	-217,6871	-19,5918
Put-Option	Einheiten Aktie	-0,5200	0,0000	-0,8867
	Einheiten Sparbuch	138,6667	0,0000	198,0952

- Für den Preis der Put-Option besteht die *Put-Call-Parität*

$$C_0^{\text{put}} = C_0^{\text{call}} - S_0 + 240 \cdot 1{,}05^{-2},$$

die sich aus obiger Darstellung durch risikoneutrale Bewertung bzw. das „Law of One Price" ergibt. Einsetzen der Werte liefert

$$C_0^{\text{put}} = 16{,}9796 - 200 + 240 \cdot 1{,}05^{-2} = \underline{34{,}6667}.$$

(iv) Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ sind gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = 0{,}3$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1 - q = 0{,}7$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt $\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1-q)^{2-N(\omega)} q^{N(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $N(\omega)$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet. Für die Put-Option mit den Auszahlungen

$$C_2^{\text{put}}(\omega) = (240 - S_2(\omega))^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u),\ \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 78 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

liefert die risikoneutrale Bewertungsformel somit (übereinstimmend mit (iii)) den Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_2}{S_0^2}\right] = \frac{1}{(1{,}05)^2} 78 \cdot \mathbb{Q}[\{(d,d)\}] = \frac{1}{(1{,}05)^2} 78 \cdot (0{,}7)^2 = \underline{34{,}6667}.$$

(b) Der arbitrage-freie Preis der Asiatischen Call-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem eindeutigen risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T^{\text{asian}}}{S_T^0}\right] = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 200\right)^+\right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten Pfaden $\{s_1(j), s_2(j), \ldots, s_T(j)\}$, $j = 1, \ldots, n$, des Aktienpreisprozesses $\{S_1, \ldots, S_T\}$ approximiert werden:

$$C_0 = (1+r)^{-T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 200\right)^+\right] \approx (1+r)^{-T}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} s_k(j) - 200\right)^+.$$

Grundlage dieser Monte-Carlo-Approximation ist das starke Gesetz der großen Zahlen, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Der Aktienpreisprozess besitzt die Form

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k, \quad t = 1, \ldots, T,$$

wobei die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_T$ unter $\mathbb{Q}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{Q}[Y_k = u] = q$ und $\mathbb{Q}[Y_k = d] = 1 - q$ sind. Basierend auf unabhängigen Zufallszahlen $u_1(j), \ldots, u_T(j)$, $j = 1, \ldots, n$, aus einer stetigen Gleichverteilung auf $[0, 1]$ können nun Pfade wie folgt simuliert werden.

- Setze $y_k(j) = u$, falls $u_k(j) \le q$, und $y_k(j) = d$, falls $u_k(j) > q$.
- Erzeuge Pfade $j = 1, \ldots, n$ des Aktienpreisprozesses durch

$$s_t(j) = S_0 \prod_{k=1}^{t} y_k(j), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Aufgabe 6. *[Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [25 Punkte]*

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ und die Dichte φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi^{-1}(0{,}005) = -2{,}5758$, $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}3263$, $\varphi(-2{,}3263) = 0{,}0267$.

(a) *[7 Punkte]* Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1 und X_2, deren Verteilungen spezifiziert sind durch:

$$\mathbb{P}[X_i = 60] = 0{,}97, \mathbb{P}[X_i = -150] = 0{,}03 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Bestimmen Sie zum Niveau $\lambda = 0{,}05$ den Value at Risk für die Finanzpositionen X_1 und X_2 sowie für die aggregierte Position $X_1 + X_2$. Erläutern Sie *kurz*, welche Implikation Ihr Berechnungsergebnis für die Praxisanwendung des Value at Risk hat.

(b) *[12 Punkte]* Im einem Bericht finden Sie für eine Finanzposition X Angaben zum Value at Risk zum Niveau 0,005 sowie zum SCR (definiert über den Mean Value at Risk zum Niveau 0,005):

$$\text{V@R}_{0{,}005}(X) = 1.045.480, \quad \text{SCR}(X) = 1.545.480.$$

Sie interessieren sich jedoch zusätzlich für das Risiko, das mit dem Average Value at Risk gemessen wird. Nehmen Sie für Ihre weiteren Berechnungen vereinfachend an, dass X normalverteilt ist.

(i) *[3 Punkte]* Definieren Sie das Risikomaß AV@R formal. Erläutern Sie *kurz* anhand von zwei Fakten, welche Defizite des V@R der AV@R behebt.

(ii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie den AV@R von X zum Niveau 0,01.

(iii) *[3 Punkte]* Eine weitere in der Praxis gebräuchliche Alternative zum V@R ist der Tail Value at Risk (TV@R). Geben Sie die formale Definition des TV@R sowie eine ökonomische Interpretation an. Bestimmen Sie den TV@R von X zum Niveau 0,01.

(c) *[6 Punkte]* Ihre Versicherung hält ein Teilportfolio, das aus 2.000 Aktien des Sportartikelherstellers „Easy Runner AG“ und 5 ausfallfreien Nullkuponanleihen (Nennwert pro Anleihe: 100.000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) besteht. Der aktuelle Preis pro Aktie beträgt $S_0 = 50$ € und statistische Analysen deuten darauf hin, dass die jährliche Log-Rendite R normalverteilt mit Erwartungswert 6% und Standardabweichung 10% ist.

Berechnen Sie für dieses Teilportfolio den Value at Risk zum Niveau 0,5% im Einjahreshorizont.

Lösungsskizze:

(a) Aus der Definition $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}[X+m<0] \le \lambda\}$ folgt unmittelbar $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -60$. Die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ nimmt nur die folgenden Werte an:

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 120 & \text{wenn } X_1 = X_2 = 60 \\ -90 & \text{wenn } X_1 = 60, X_2 = -150 \text{ oder } X_1 = -150, X_2 = 60 \\ -300 & \text{wenn } X_1 = X_2 = -150 \end{cases}$$

Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten gilt hierbei:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 = 120] &= \mathbb{P}[X_1 = 60, X_2 = 60] = \mathbb{P}[X_1 = 60]\mathbb{P}[X_2 = 60] \\ &= (0{,}97)^2 = 0{,}9409 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -90] &= \mathbb{P}[X_1 = 60, X_2 = -150] + \mathbb{P}[X_1 = -150, X_2 = 60] \\ &= 2 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 60]\mathbb{P}[X_2 = -150] \\ &= 2 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 0{,}0582 \\ \mathbb{P}[X_1 + X_2 = -300] &= \mathbb{P}[X_1 = -150, X_2 = -150] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = -150]\mathbb{P}[X_2 = -150] \\ &= (0{,}03)^2 = 0{,}0009 \end{aligned}$$

Hieraus ist ablesbar: $\mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) = 90$. Insbesondere gilt:

$$90 = \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1 + X_2) > \mathrm{V@R}_{0,05}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,05}(X_2) = -120.$$

Das Ergebnis verdeutlicht, dass das Risikomaß V@R im Allgemeinen nicht sub-additiv ist. Damit kann V@R ökonomisch sinnvolle Diversifikation zwischen Risiken bestrafen. Hieraus können Probleme bei der Steuerung, z. B. im Kontext von Limit- und Schwellenwertsystemen, resultieren.

(b) (i) Der Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\, d\alpha.$$

Dieses Risikomaß ist erstens *kohärent* und setzt insofern - im Gegensatz zum im Allgemeinen nicht sub-additiven Value at Risk - Anreize für ökonomisch sinnvolle Diversifikation. Zweitens berücksichtigt der AV@R im Gegensatz zum V@R den gesamten unteren Tail der Verteilung, sodass extreme Verluste, die mit sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten auftreten, erfasst werden.

(ii) Für die normalverteilte Finanzpositionen mit Standardabweichung $\sigma(X)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X), \\ \mathrm{SCR}(X) &= -\Phi^{-1}(0{,}005)\sigma(X), \\ \mathrm{AV@R}_\lambda(X) &= -\mathbb{E}[X] + \tfrac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma(X). \end{aligned}$$

Damit folgt aus dem gegebenen Zahlenwerk

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{SCR}(X) - \mathrm{V@R}_{0,005}(X) = 500.000, \sigma(X) = -\frac{\mathrm{SCR}(X)}{\Phi^{-1}(0{,}005)} = 600.000$$

und entsprechend

$$\mathrm{AV@R}_{0,01} = -500.000 + \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0{,}01))}{0{,}01} \cdot 600.000 = \underline{1.102.000}.$$

(iii) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathbb{E}[-X | -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet. Für stetige Zufallsvariablen stimmt der TV@R mit dem Risikomaß AV@R überein, d. h., es gilt gemäß (ii) $\mathrm{TV@R}_{0,01}(X) = \underline{1.102.000}$.

(c) Das Teilportfolio hat im Einjahreshorizont den Wert

$$V_1 = 2.000 \cdot S_0 \exp(R) + 5 \cdot 100.000 = 100.000 \exp(R) + 500.000,$$

wobei der Zufall nur die zufällige Rendite $R \sim \mathcal{N}(0{,}06; (0{,}1))^2$ getrieben wird. Mit $q_{0,005}$ als Notation für das Quantil einer Zufallsvariable zum Niveau 0,005 und den Rechenregeln der Quantiltransformation folgt somit

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_{0,005}(V_1) &= -q_{0,005}(V_1) \\ &= -q_{0,005}(100.000 \exp(R) + 500.000) \\ &= -(100.000 \exp(q_{0,005}(R)) + 500.000) \\ &= -100.000 \exp(0{,}06 + 0{,}1\Phi^{-1}(0{,}005)) - 500.000 \\ &= \underline{\text{-582.071,2076}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *[Axiomatische Theorie der Risikomaße] [15 Punkte]*

Sie befassen sich konzeptionell mit der Entwicklung von Risikomaßen auf einer Menge von Finanzpositionen $\mathcal{X}$ (aufgefasst als Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$) und deren Eigenschaften.

(a) *[7 Punkte]* Für ein monetäres Risikomaß ρ auf $\mathcal{X}$ ist $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$ die Akzeptanzmenge von ρ. Sie möchten gerne umgekehrt eine Menge von akzeptablen Finanzpositionen festlegen und das zugehörige Risikomaß definieren.

(i) *[2 Punkte]* Wie kann ein monetäres Risikomaß ρ durch Vorgabe einer geeigneten Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ definiert werden? Interpretieren Sie diese Definition ökonomisch.

(ii) *[2 Punkte]* Eine zentrale Anforderung an Risikomaße ist die Konvexität. Formulieren Sie diese Eigenschaft mathematisch und würdigen Sie diese *kurz* hinsichtlich Ihrer ökonomischen Bedeutung.

(iii) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass das in (i) definierte monetäre Risikomaß konvex ist, falls die geeignet vorgegebene Akzeptanzmenge konvex ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $X, Y \in \mathcal{X}$ beliebige $m, n \in \mathbb{R}$ mit $X + m \in \mathcal{A}$ und $Y + n \in \mathcal{A}$ und nutzen Sie die Cash-Invarianz des monetären Risikomaßes.

(b) *[8 Punkte]* Mithilfe einer Teilmenge $\mathcal{Q}$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und einer Straffunktion $\alpha : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ konstruieren Sie ein Risikomaß auf $\mathcal{X}$ durch die „robuste Darstellung"

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\}.$$

(i) *[2 Punkte]* Interpretieren Sie anhand dieser robusten Darstellung, wie das Risikomaß ρ Risiken quantifiziert.

(ii) *[3 Punkte]* Zeigen Sie anhand der robusten Darstellung, dass das Funktional ρ in der Tat ein monetäres, konvexes Risikomaß ist.

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, durch welche Eigenschaft sich konvexe und kohärente Risikomaße unterscheiden, und würdigen Sie diese Eigenschaft ökonomisch. Wie müssen Sie Ihre Straffunktion spezifizieren, sodass ρ ein kohärentes Risikomaß ist?

Lösungsskizze:

(a) (i) Durch Vorgabe einer geeigneten Akzeptanzmenge $\mathcal{A}$ kann ein monetäres Risikomaß ρ durch die Vorschrift

$$\rho(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} \tag{1}$$

definiert werden. Definition (1) assoziiert das monetäre Risikomaß mit Kapitalanforderungen: $\rho(X)$ ist das kleinste Kapital, das zur Finanzposition X hinzugefügt werden muss, sodass X akzeptabel wird.

Bemerkung: Technisch muss die Akzeptanzmenge folgenden Bedingungen genügen:

1. $\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty$,
2. $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{X}$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$.

(ii) Ein monetäres Risikomaß heißt konvex, falls gilt:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{X},\ \lambda \in [0,1].$$

Konvexität spiegelt wider, dass ökonomisch sinnvolle Diversifikation das Risiko reduzieren kann, und ist insbesondere zentral für wirksame Limit- und Schwellenwertsysteme in der Praxis.

(iii) Für beliebige $X, Y \in \mathcal{X}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt für alle $m, n \in \mathbb{R}$ mit $X + m \in \mathcal{A}$ und $Y + n \in \mathcal{A}$ aufgrund der Konvexität von $\mathcal{A}$ auch $\lambda(X+m) + (1-\lambda)(Y+n) \in \mathcal{A}$. Dies impliziert aufgrund der Cash-Invarianz

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho(\lambda(X+m) + (1-\lambda)(Y+n)) \\ &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y + \lambda m + (1-\lambda)n) \\ &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) - \lambda m - (1-\lambda)n \end{aligned}$$

bzw. $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda m + (1-\lambda)n$. Mit Definition (1) aus Lösung (a) (i) folgt insbesondere $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$, d. h. ρ ist konvex.

(b) (i) Die Maße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ repräsentieren mögliche probabilistische Modelle, die entsprechend der Straffunktion α mehr oder weniger ernst genommen werden. Die Kapitalanforderung $\rho(X)$ wird als „worst-case" des pönalisierten erwarteten Verlustes $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$ über alle Modelle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ berechnet.

(ii) Nachzuweisen sind drei Eigenschaften:

(A) *Inverse Monotonie:* $X \leq Y$ f. s. $\Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$

(B) *Cash-Invarianz:* Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.

(C) *Konvexität:* Für Finanzpositionen X, Y und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

zu (A): Die Inverse Monotonie folgt unmittelbar aus $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$.

zu (B): Es gilt

$$\begin{aligned}\rho(X+m) &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-(X+m)] - \alpha(\mathbb{Q})\}) \\ &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\} - m = \rho(X) - m.\end{aligned}$$

zu (C):

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-(\lambda X + (1-\lambda)Y)] - \alpha(\mathbb{Q})\} \\ &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\lambda(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})) + (1-\lambda)(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y] - \alpha(\mathbb{Q}))\} \\ &\leq \lambda \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\} + (1-\lambda) \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y] - \alpha(\mathbb{Q})\} \\ &= \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\end{aligned}$$

(iii) Kohärente Risikomaße sind konvexe Risikomaße, die zusätzlich positiv homogen sind, d. h. $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$. Die positive Homogenität besagt, dass eine Erhöhung des Exposures das Risiko um denselben Faktor erhöht. Diese Eigenschaft kann jedoch bedingt durch Konzentrations- und Liquiditätsrisiken verletzt sein und ist insofern im Allgemeinen kritisch zu sehen.

Für die positive Homogenität von ρ muss für die relevanten Maße die Straffunktion verschwinden. Insofern besteht Kohärenz genau dann, wenn $\alpha(\mathbb{Q}) \in \{0, \infty\}$ für jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ gilt.

Bemerkung: In diesem Fall reduziert sich die robuste Darstellung zu

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\widetilde{\mathcal{Q}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$$

für die Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\widetilde{\mathcal{Q}} := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} | \alpha(\mathbb{Q}) = 0\}$.

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [17 Punkte]*

(a) *[14 Punkte]* Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Für den Korrelationskoeffizienten $\rho := \rho(R_1, R_2)$ gelte $-1 < \rho < 1$.

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie zunächst die Größe x_{MVP}, wobei $(x_{\text{MVP}}, 1-x_{\text{MVP}})$ die Investmentgewichte des global varianzminimalen Portfolios bezeichnen!

(ii) *[1 Punkt]* Begründen Sie, warum der erhaltene Ausdruck für x_{MVP} wohldefiniert ist!

(iii) *[3 Punkte]* Welchen Wert muss die Kovarianz $C := \text{Cov}(R_1, R_2)$ annehmen, sodass $x_{\text{MVP}} = \frac{1}{5}$ beträgt?

(iv) *[3 Punkte*] Unter welchen Bedingungen an die Kovarianz $C = \text{Cov}(R_1, R_2)$ gilt $0 \leq x_{\text{MVP}} \leq 1$, d. h., es können sowohl Leerverkäufe als auch eine Kreditaufnahme ausgeschlossen werden?

(v) *[3 Punkte*] Weisen Sie nach, dass im Zwei-Aktien-Fall mit Investmentgewichten $(x, 1-x)$ für jedes $0 \leq x \leq 1$ die Portfolio-Varianz $\sigma_P^2(x)$ monoton steigend im Korrelationskoeffizienten ρ ist.

(b) *[3 Punkte*] Gegeben seien die beiden riskanten Wertpapiere A und B, deren Renditen R_A und R_B eine Korrelation $\rho = \rho(R_A, R_B)$ in Höhe von $\rho = 0{,}25$ aufweisen. Die erwarteten Renditen μ_A bzw. μ_B sowie die zugehörigen Standardabweichungen σ_A bzw. σ_B weisen die folgenden Werte auf:

$$\mu_A = 0{,}05 \qquad \sigma_A = 0{,}10$$
$$\mu_B = 0{,}10 \qquad \sigma_B = 0{,}20.$$

Ein Investor besitze die Präferenzfunktion $U(R) = \mathbb{E}[R] - 4\text{Var}(R)$. Ermitteln Sie die Struktur (Investmentgewichte) des für den Investor optimalen Portfolios!

Lösungsskizze:

(a) Es bezeichne $R = xR_1 + (1-x)R_2$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien. Es bezeichnen ferner $\sigma^2 = \text{Var}(R)$, $\sigma_1^2 = \text{Var}(R_1)$, $\sigma_2^2 = \text{Var}(R_2)$, $C = \text{Cov}(R_1, R_2)$. Es gilt damit

$$\sigma^2 = \sigma^2(x) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)C.$$

(i) Bestimmung der varianzminimalen Position:

$$0 = \tfrac{d\sigma^2}{dx} = 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2C - 4xC.$$

Es folgt

$$2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 4xC = 2\sigma_2^2 - 2C$$

und damit

$$x_{\mathrm{MVP}} = \frac{\sigma_2^2 - C}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C}.$$

(ii) Der Ausdruck für x_{MVP} ist wohldefiniert, falls der Nenner

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C = \mathrm{Var}(R_1 - R_2)$$

positiv ist. Die Bedingung $\mathrm{Var}(R_1 - R_2) > 0$ ist jedoch genau dann erfüllt, wenn $R_1 - R_2$ eine nicht-degenerierte Zufallsgröße ist, d. h. es gilt nicht $R_1 - R_2 = c$ bzw. $R_1 = R_2 + c$ für eine Konstante c. Die perfekte lineare Abhängigkeit von R_1 und R_2 ist ausgeschlossen, da nach Voraussetzung $|\rho| < 1$ gilt.

(iii) Aus $x_{\mathrm{MVP}} = \frac{1}{5}$ folgt

$$5(\sigma_2^2 - C) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C) \quad \text{bzw.} \quad 4\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = 3C.$$

Damit gilt insgesamt

$$C = \tfrac{1}{3}(4\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \tfrac{4}{3}\sigma_2^2 - \tfrac{1}{3}\sigma_1^2.$$

(iv)

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{MVP}} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 \geq C \\ x_{\mathrm{MVP}} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_2^2 - C \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2C \quad \Leftrightarrow \quad C \leq \sigma_1^2 \end{aligned}$$

Fazit: $0 \leq x_{\mathrm{MVP}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad C \leq \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$.

(v)

$$\sigma_P^2(x) = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 (1-x)^2 + 2\rho x(1-x)\sigma_1\sigma_2$$

$$\tfrac{d\sigma_P^2(x)}{d\rho} = 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2 \geq 0$$

Damit ist σ_P^2 monoton steigend in ρ.

(b) Es bezeichnen $R = xR_A + (1-x)R_B$ die Rendite eines beliebigen Portfolios aus den beiden Aktien und $\mu := \mathbb{E}[R]$ bzw. $\sigma^2 := \mathrm{Var}(R)$ Erwartungswert bzw. Varianz der Portfoliorendite.

Es gilt $\mu = x\mu_A + (1-x)\mu_B = 0{,}1 - 0{,}05x$ sowie

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_A\sigma_B \\ &= 0{,}01x^2 + 0{,}04(1-x)^2 + 2x(1-x)\cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}01x^2 + 0{,}04(1-x)^2 + 0{,}01x(1-x). \end{aligned}$$

Mit $U(R) = \mu - 4\sigma^2$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \tfrac{dU(R)}{dx} &= -0{,}05 - 4\,[0{,}02x - 0{,}08(1-x) + 0{,}01 - 0{,}02x] \\ &= 0{,}23 - 0{,}32x. \end{aligned}$$

Hieraus resultiert $x = 0{,}7188$ und für die Investmentgewichte des optimalen Portfolios gilt $(0{,}7188; 0{,}2813)$.

Aufgabe 9. *[Portfoliotheorie mit sicherer Anlage und CAPM] [13 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Auf der Grundlage einer Lagrange-Optimierung ergibt sich die folgende funktionale Form des effizienten Rands im Rahmen der Markowitz'schen Portfoliotheorie ($\sigma^2 \geq 0{,}0009$):

$$\mu = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1(\sigma^2 - 0{,}0009)}.$$

Nehmen Sie nun an, dass zusätzlich eine risikolose Anlage zu einem sicheren Zins von $r_0 = 0{,}1$ existiert und bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialgeraden!

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass ein Schnittpunkt von Tangentialgerade und dem effizienten Rand existieren muss.

(b) *[7 Punkte]* Gegeben seien die Einperiodenrenditen R_i ($i = 1, \ldots, m$) der Aktien $i = 1, \ldots, m$ sowie eine Indexrendite R_I der Form $R_I = \sum_{i=1}^m x_i R_i$ ($0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, m$; $\sum x_i = 1$).

(i) *[1 Punkt]* Definieren Sie das systematische Risiko S_i von Aktie i in Bezug auf die Indexrendite R_I.

(ii) *[2 Punkte]* In welcher Beziehung stehen die Standardabweichung $\sigma(R_I)$ der Indexrendite R_I und die systematischen Risiken S_i der Aktien i, $i = 1, \ldots, n$? Interpretieren Sie auf dieser Grundlage das systematische Risiko S_i!

(iii) *[4 Punkte]* Weisen Sie die Beziehung aus Aufgabenteil (ii) nach!

Lösungsskizze:

(a) Die Schnittpunktbedingung lautet

$$0{,}1 + a\sigma = 0{,}16 + \sqrt{0{,}1\sigma^2 - 0{,}0009}.$$

Auflösung nach σ ergibt:

$$(a\sigma - 0{,}06)^2 = 0{,}1\sigma^2 - 0{,}0009$$
$$(a^2 - 0{,}1)\sigma^2 - 0{,}12a\sigma + 0{,}0045 = 0$$

Da eine Tangente vorliegt, darf nur „ein Schnittpunkt“ existieren. Eine einwertige Nullstelle liegt dann vor, wenn die Diskriminate $B^2 - 4AC$ der quadratischen Gleichung $A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$ null ist. Hieraus folgt

$$0{,}0144a^2 - 0{,}018a^2 + 0{,}0018 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad a^2 = \frac{0{,}0018}{0{,}0036} = 0{,}5.$$

Aufgrund von $\alpha > 0$ folgt hieraus $\alpha \approx 0{,}7071$.

Die Gleichung der Tangentialgeraden ist somit gegeben durch

$$\mu = 0{,}1 + 0{,}7071\sigma.$$

(b) (i) Das systematische Risiko von Aktie i in Bezug auf R_I ist definiert durch

$$S_i = \rho(R_i, R_I)\sigma(R_i).$$

(ii) Es gilt

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^{m} x_i S_i.$$

Damit erfasst S_i den Beitrag von Aktie i zum Risiko des durch den Index I repräsentierten Portfolios.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(R_I) &= \mathrm{Cov}(R_I, R_I) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i R_i, R_I\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \mathrm{Cov}(R_i, R_I) = \sum_{i=1}^{m} x_i \rho(R_i, R_I)\sigma(R_i)\sigma(R_I). \end{aligned}$$

Division der linken und rechten Seite durch $\sigma(R_I)$ ergibt schließlich

$$\sigma(R_I) = \sum_{i=1}^{m} x_i S_i.$$