

Prüfungsbericht FIMA I 2021 – V1

Aufgabe 1: (24 min)

- a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit zwei Zuständen, der aus zwei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zum Zins 5% sowie einem risikobehafteten Wertpapier. Das Wertpapier weise einen anfänglichen Preis von 150 Geldeinheiten auf und den Rückflussvektor $(210, 110)^T$ in $t = 1$.
- Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w !
 - Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?
 - Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!
 - Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c^2, c)^T$ auf der Basis einer **risikoneutralen Bewertung**!
 - Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c, c^2)^T$, wobei $c = 5$, durch **Duplikation**!
 - Wie lauten die arbitragefreien Preise der Finanztitel mit den Rückflussvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Argumentieren Sie hier grundsätzlich, d.h. ohne Vornahme einer konkreten Berechnung!

(12 min)

- b) Gegeben sei nun ein allgemeiner einperiodiger State Space-Markt mit s Zuständen und $n+1$ Finanztiteln. Der Markt sei vollständig. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r . Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \dots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

- i) Weisen Sie nach, dass $\sum_{i=1}^s q_i = 1$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

- Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \dots, c_s)^T$ in $t=1$ dem ersten Einheitsvektor entspricht ($c_1 = 1, c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch **risikoneutrale Bewertung**! Interpretieren Sie das Ergebnis!
- Bestimmen Sie den Preis des i -ten Einheitsvektors ($c_i = 1, c_j = 0$ für $j \neq i$) durch **Duplikation**!

(12 min)

Lösung Aufgabe 1:

Aufgabenteil a)

i) $V = \begin{pmatrix} 1,05 & 210 \\ 1,05 & 110 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 150 \end{pmatrix}$

ii) Betrachte LGS $V^T x = w$, d.h.

(I) $1,05x_1 + 1,05x_2 = 1$

(II) $210x_1 + 110x_2 = 150$

Multiplikation von (I) mit 200 ergibt

(I') $210x_1 + 210x_2 = 200$

(I')-(II) ergibt $100x_2 = 50$, d.h. $x_2 = 1/2$.

Aus (I) folgt dann

$$x_1 = \frac{1 - (1,05)(0,5)}{1,05} = \frac{1}{1,05} - 0,5 \\ = 0,952381 - 0,5 = 0,452381$$

Die Lösung des LGS ist strikt positiv, damit ist der Markt arbitragefrei.

iii) $q_1 = 1,05x_1 = 0,475$

$q_2 = 1,05x_2 = 0,525$

iv) Preis auf Basis risikoneutraler Bewertung lautet

$$\frac{1}{1,05} E_Q \left[\begin{pmatrix} c^2 \\ c \end{pmatrix} \right] = \frac{0,475c^2 + 0,525c}{1,05}$$

v) Betrachte LGS

$$x_1 \begin{pmatrix} 1,05 \\ 1,05 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 210 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix},$$

d.h.

(I) $1,05x_1 + 210x_2 = 5$

(II) $1,05x_1 + 110x_2 = 25$

(I)-(II) $100x_2 = -20, x_2 = -2/10$

Weiter:

$$1,05x_1 = 5 + 210(2/10) = 5 + 42 = 47$$

$$x_1 = 44,76$$

Preis: $44,76 + 150(-0,2) = 14,76$.

vi) Die arbitragefreien Preise der Einheitsvektoren entsprechen den Lösungen des Gleichungssystems unter ii), d.h. 0.45238 sowie 0.5.

Aufgabenteil b)

i) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor $(1+r)(1, \dots, 1)$ und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r) \sum_{i=1}^n w_i^* = 1$ und damit gilt $\sum q_i = 1$.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad w_c &= \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^s c_j q_j \\ &= \frac{1}{1+r} c_1 q_1 = \frac{1}{1+r} (1+r) w_1^* = w_1^* . \end{aligned}$$

Der arbitragefreie Preis des ersten Einheitsvektors entspricht dem ersten Wert des preiserzeugenden Vektors.

iii) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder $(s,1)$ -Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = e_i$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ dem i -ten Einheitsvektor entspricht. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum x_i w_i &= w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*T} Vx \\ &= w^{*T} e_i = w_i^* . \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (24 min)

a) Ein fünfjähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe $\{Z, Z, Z, Z, Z+N\}$ seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und $Z = Ni$ die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen, wobei i den Nominalzins des Bonds bezeichne.

i) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert des Bonds unter Benutzung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Markt zins in Höhe von r zu Grunde gelegt wird!

- ii) Weisen Sie auf der Grundlage von a) nach, dass im Falle $r = i$ der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)!
- iii) Bestimmen Sie den fairen Wert des Bonds zum Zeitpunkt s , wobei $0 < s < 5$.
- iv) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die effektive Rendite (Baldwin-Verzinsung) des Bonds bei Annahme der Wiederanlage der Rückflüsse zum Marktzins r und einem Kaufpreis von P_0 ! Benutzen Sie dabei die geometrische Summe.

(12 min)

- b) i) Bestimmen Sie den Barwert einer ewigen (unbegrenzte Restlaufzeit) Anleihe mit konstanter Kuponzahlung $Z = Ni$! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r aus.

Hinweis: Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P_0(r, T) = N \left[\frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) (1 + r)^{-T} \right].$$

- ii) Welchen Wert nimmt die Macaulay-Duration der ewigen Kuponanleihe unter i) an?
- iii) Welchen Wert nimmt die (relative) Konvexität der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

(12 min)

Lösung Aufgabe 2:

- a) i) Definiere den Aufzinsungsfaktor durch $q := 1 + r$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} P_0(r) &= Zq^{-1} + Zq^{-2} + Zq^{-3} + Zq^{-4} + Zq^{-5} + Nq^{-5} \\ &= Zq^{-5} (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{q^5} \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1} \right) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{r} \left(1 - \frac{1}{q^5} \right) + Nq^{-5} \end{aligned}$$

Alternativ: ($v := q^{-1}$)

$$\begin{aligned} P_0(r) &= Z(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + Nv^5 \\ &= Z v(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + Nv^5 \\ &= Z v \frac{1 - v^5}{1 - v} + Nv^5 \end{aligned}$$

ii) Für $Z = Ni$ und $r = i$ folgt aus i)

$$P_0(i) = N \left(1 - \frac{1}{q^5} \right) + Nq^{-5} = N$$

iii) $P_s(r) = (1 + r)^s P_0(r) = q^s P_0(r)$

iv) Es muss gelten

$$\begin{aligned} P_0(1 + r_{\text{eff}})^5 &= Zq^4 + Zq^3 + \dots + Z + N \\ &= Z(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) + N \\ &= Z \frac{q^5 - 1}{q - 1} + N \end{aligned}$$

und damit

$$r_{\text{eff}} = \sqrt[5]{\left(Z \frac{q^5 - 1}{r} + N \right) / P_0} - 1$$

b) i) Betrachte $\lim_{T \rightarrow \infty} P_0(r, T)$. Es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_0(r, T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r}$$

ii) Es gilt zunächst:

$$dP_0/dr = -Z r^{-2}$$

Hieraus folgt für die absolute Duration D_A :

$$D_A(r) = -dP/dr_0 = Z r^{-2}$$

Für die Macaulay-Duration folgt hieraus:

$$\begin{aligned} D(r) &= (1 + r) \frac{D_A(r)}{P_0} = (1 + r) \frac{Z}{r^2} \cdot \frac{r}{Z} \\ &= \frac{1 + r}{r} \end{aligned}$$

iii) Es gilt $C(r) = P_0''(r) / P_0(r)$.

Nach ii) folgt $P_0''(r) = d(-Z r^{-2})/dr = 2Z r^{-3}$.

Damit gilt insgesamt:

$$C(r) = 2 \frac{Z}{r^3} \frac{r}{Z} = \frac{2}{r^2}$$

Aufgabe 3: (26 min)

- a) Ein anfänglicher Kreditbetrag der Höhe S_0 soll mit gleichhohen nachschüssigen Zahlungen A (Annuität) in n Jahren inklusive aufgelaufener Zinsen getilgt werden. Der als fristigkeitsunabhängig angenommene Kreditzins beträgt r .
Weisen Sie nach, dass die Annuität A gegeben ist durch

$$A = S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

(3 min)

- b) Vorgegeben seien nunmehr die Größen S_0 , A und r . bestimmen Sie die erforderliche Kreditlaufzeit n .

(5 min)

- c) Weisen Sie nach, dass für $t = 1, \dots, n$ die Restschuld RS_t am Ende der jeweiligen Periode gegeben ist durch

$$RS_t = S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}$$

Hinweis: Gehen Sie von dem Ansatzpunkt aus, dass in einem vollkommenen Kapitalmarkt sich die Restschuld zum Zeitpunkt t als Differenz der aufgezinste Schuld bis t und der aufgezinste Annuitätenzahlungen der Teilaufgabe a) bis zum Zeitpunkt t ergeben muss.

(8 min)

- d) Aktuarin ZZ schließt nun im Alter x (definitionsgemäß $t=0$) eine Risikolebensversicherung ab, deren Auszahlung im Todesfall sich kongruent zur Restschuld nach Teilaufgabe c) entwickelt. Stellen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} dieser Versicherung in Abhängigkeit von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ dar!
Bestimmen Sie den korrespondierenden erwarteten Leistungsbarwert. Verwenden Sie dabei die Größe ${}_tq_x$!

(10 min)

Lösung Aufgabe 3:

- a) Barwert der nachschüssigen Rückzahlungen ($q = 1 + r$)

$$Aq^{-1} + Aq^{-2} + \dots + Aq^{-n}$$

$$= Aq^{-n}(q^{n-1} + \dots + q + 1) = A \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

Damit gilt

$$S_0 = A \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

und hieraus folgt

$$A = S_0 \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

b) Für die Annuität gilt zunächst

$$A = S_0 \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} = \frac{S_0 r}{1 - q^{-n}}.$$

Hieraus folgt

$$A - Aq^{-n} = S_0 r$$

und weiter

$$q^n = \frac{A}{A - S_0 r}$$

sowie

$$n \ln q = \ln(A) - \ln(A - S_0 r)$$

und schließlich

$$n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 r)}{\ln q}.$$

c) Nach Hinweis gilt ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned} RS_t &= S_0 q^t - A (q^{t-1} + \dots + q + 1) \\ &= S_0 q^t - A \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 q^t - S_0 \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 \left[q^t - \frac{q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} \right] \\ &= S_0 \frac{q^t(q^n - 1) - q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} \\ &= S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1} \end{aligned}$$

d) Ist t der Todeszeitpunkt, so erfolgt eine Zahlung der Höhe RS_t . Der Todeszeitpunkt in Termen der gestutzten Lebensdauer entspricht $CT + 1$. Damit ist für $CT = 0, \dots, n-1$ der Barwert der Zahlung in $t = CT + 1$ gegeben durch

$$RS_{CT+1} \cdot q^{-(CT+1)} = S_0 \frac{q^n - q^{CT+1}}{q^n - 1} q^{-(CT+1)}$$

$$= S_0 \frac{q^{n-(CT+1)} - 1}{q^n - 1} = S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1}$$

Insgesamt gilt

$$LBW = \begin{cases} S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} & CT = 0, \dots, n-1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

und ferner

$$\begin{aligned} E(LBW) &= \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1) P(CT = t) \\ &= \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1) {}_t|q_x \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (16 min)

- a) Betrachten Sie eine binäre Put-Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil: Notiert der Basiswert am Ende der Laufzeit auf oder unter dem Schwellenwert $X = 200$, so erhält der Käufer der Option den fixen Betrag N . Ansonsten verfällt die Option wertlos.

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung des Basistitels einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 200$ sowie einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 15% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10%. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage $r = 1\%$.

- i) Skizzieren Sie zunächst die Entwicklung des Basistitels sowie der Option!
- ii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Preis in $t = 0$ der einperiodigen binären Put-Option mit $X = 200$ und $N = 1$. Geben Sie **explizit** die zugrundeliegende Duplikationsstrategie an.
- iii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 eines einperiodigen Forward auf den Basistitel. Interpretieren Sie das Ergebnis!

(6 min)

- b) Versicherungsunternehmen BBB verkauft eine einjährige aktienindexgebundene Lebensversicherung zur Gesamtprämie EUR 40 000 an einen x -jährigen Kunden. Die Modalitäten der Versicherung in Bezug auf den Erlebensfall lauten wie folgt: Es wird eine Rückzahlung der Gesamtprämie garantiert. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung erhält der Versicherte einen Bonus von 50% auf die einjährige DAX-Rendite bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag in Höhe von EUR 38 000.

Das Unternehmen sieht sich der folgenden Anlagesituation in $t = 0$ gegenüber: Es herrscht ein sicherer Zins von 5%, der DAX steht bei 19 000 und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 19 000 weisen eine Optionsprämie von EUR 1 040 auf.

- i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfalleistung in $t = 1$?
- ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?
- iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in $t = 0$?
- iv) Welche faire Prämie resultiert hieraus?
- v) Welcher Betrag verbleibt dem Unternehmen zur Deckung einer Todesfalleistung und von Betriebskosten?

(4 min)

- c) Alternativ wird – bei gleichen Kapitalmarktbedingungen – das Leistungsprofil der aktienindexgebundenen Lebensversicherung im Erlebensfall unter b) wie folgt festgelegt:

Auf einen Betrag in Höhe von EUR 38 000 wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer **positiven** DAX-Entwicklung eine 50%-ige Partizipation, bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag von EUR 38 000 zum Zuge – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

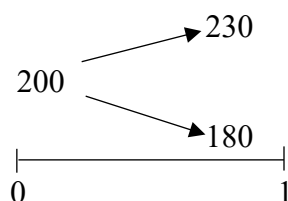
- i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfalleistung in $t = 1$?
- ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?
- iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in $t = 0$?

(6 min)

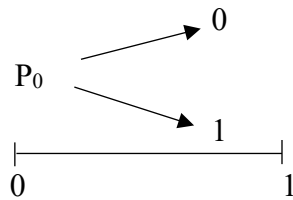
Lösung Aufgabe 4:

Aufgabenteil a)

- i) Entwicklung Basistitel:



Entwicklung Option:



ii) Duplikation:

$$(I) \quad 1,01x_1 + 230x_2 = 0$$

$$(II) \quad 1,01x_1 + 180x_2 = 1$$

$$(I)-(II): \quad 50x_2 = -1, \quad x_2 = -1/50 = -0,02$$

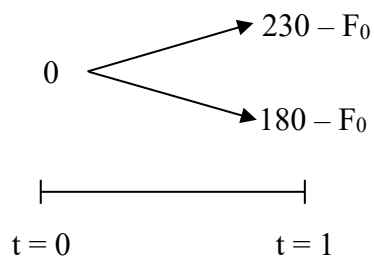
$$(I): \quad x_1 = 4,55$$

Arbitragefreier Preis:

$$1 \cdot x_1 + 200x_2 = 0,55.$$

Duplikationsstrategie in $t = 0$: 0,02 Aktien (short) und risikolose Anlage des Betrags 4,55.

iii) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$$200x + y = 0 \quad (t = 0)$$

$$230x + 1,01 y = 230 - F_0 \quad (t = 1, \text{ Fall a})$$

$$180x + 1,01 y = 180 - F_0 \quad (t = 1, \text{ Fall b})$$

Aus (II) – (III) folgt $x = 1$ und damit $y = -200$. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 202$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinnten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

Aufgabenteil b):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$ ($DAX(0) = 19\ 000$)

$$L_1 = \max \left\{ 40\ 000, 40\ 000 - 38\ 000 \cdot 0,5 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \right\}$$

$$= \max \{ 40\ 000, 40\ 000 + 19\ 000 - DAX(1) \}$$

ii) $L_1 = 40\ 000 + \max \{ 19\ 000 - DAX(1), 0 \}$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit Ausübungspreis $X = 19\ 000$.

iii) $L_1 = 40\ 000(1,05)^{-1} + 1\ 040$
 $= 38\ 095,24 + 1\ 040 = 39\ 135,24$

iv) $39\ 135,24 \cdot p_x$

v) $40\ 000 - 39\ 135,24 \cdot p_x$

Aufgabenteil c):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$

$$L_1 = \max \left\{ 1,04 \cdot 38\ 000, 38\ 000 + 38\ 000 \cdot 0,5 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \right\}$$

$$= \max \{ 39\ 520, 38\ 000 + (DAX(1) - 19\ 000) \}$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$$L_1 = 39\ 520 + \max(0, DAX(1) - 19\ 000 - 1\ 520)$$

$$= 39\ 520 + \max(DAX(1) - 20\ 520, 0)$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis in Höhe von $X = 20\ 520$.

iii) Fairer Wert L_0 in $t = 0$:

$$L_0 = 39\ 520(1,05)^{-1} + C_0(20\ 520) = 37\ 638,10 + C_0(20\ 520).$$

Dabei bezeichnet $C_0(20\ 520)$ den Marktpreis eines einjährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis $X = 20\ 520$ in $t = 0$.

Prüfungsbericht FIMA I 2021 – V2

Aufgabe 1: (24 min)

- a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit zwei Zuständen, der aus zwei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zum Zins 5% sowie einem risikobehafteten Wertpapier. Das Wertpapier weise einen anfänglichen Preis von 225 Geldeinheiten auf und den Rückflussvektor $(315, 165)^T$ in $t = 1$.
- Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w !
 - Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?
 - Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!
 - Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c^2, c)^T$ auf der Basis einer **risikoneutralen Bewertung**!
 - Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c, c^2)^T$, wobei $c = 5$, durch **Duplikation**!
 - Wie lauten die arbitragefreien Preise der Finanztitel mit den Rückflussvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Argumentieren Sie hier grundsätzlich, d.h. ohne Vornahme einer konkreten Berechnung!

(12 min)

- b) Gegeben sei nun ein allgemeiner einperiodiger State Space-Markt mit s Zuständen und $n+1$ Finanztiteln. Der Markt sei vollständig. Der Finanztitel 0 entspreche dabei der risikolosen Anlage zum sicheren Zins r . Der preiserzeugende Vektor $w^* = (w_1^*, \dots, w_s^*)^T$ des State Space-Markts existiere und sei strikt positiv.

- i) Weisen Sie nach, dass $\sum_{i=1}^s q_i = 1$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $V^T w^* = w$, wobei w dem Preisvektor der Finanztitel des Marktes entspricht und V die State Space-Matrix ist.

- ii) Bestimmen Sie den Preis des Finanztitels, dessen Rückflussvektor $C = (c_1, \dots, c_s)^T$

in $t=1$ dem ersten Einheitsvektor entspricht ($c_1 = 1, c_j = 0$ für $j \neq 1$) durch **risiko-neutrale Bewertung!** Interpretieren Sie das Ergebnis!

- iii) Bestimmen Sie den Preis des i -ten Einheitsvektors ($c_i = 1, c_j = 0$ für $j \neq i$) durch **Duplikation!**

(12 min)

Lösung Aufgabe 1:

Aufgabenteil a)

i) $V = \begin{pmatrix} 1,05 & 315 \\ 1,05 & 165 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 225 \end{pmatrix}$

- ii) Betrachte LGS $V^T x = w$, d.h.

(I) $1,05x_1 + 1,05x_2 = 1$

(II) $315x_1 + 165x_2 = 225$

Multiplikation von (I) mit 300 ergibt

(I') $315x_1 + 315x_2 = 300$

(I')-II) ergibt $150x_2 = 75$, d.h. $x_2 = 1/2$.

Aus (I) folgt dann

$$x_1 = \frac{1 - (1,05)(0,5)}{1,05} = \frac{1}{1,05} - 0,5 \\ = 0,952381 - 0,5 = 0,452381$$

Die Lösung des LGS ist strikt positiv, damit ist der Markt arbitragefrei.

iii) $q_1 = 1,05x_1 = 0,475$

$q_2 = 1,05x_2 = 0,525$

- iv) Preis auf Basis risikoneutraler Bewertung lautet

$$\frac{1}{1,05} E_Q \left[\begin{pmatrix} c^2 \\ c \end{pmatrix} \right] = \frac{0,475c^2 + 0,525c}{1,05}$$

- v) Betrachte LGS

$$x_1 \begin{pmatrix} 1,05 \\ 1,05 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 315 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix},$$

d.h.

(I) $1,05x_1 + 315x_2 = 5$

(II) $1,05x_1 + 165x_2 = 25$

$$(I)-(II) \quad 150x_2 = -20, x_2 = -2/15$$

Weiter:

$$1,05x_1 = 5 + 315(2/15) = 5 + 42 = 47$$

$$x_1 = 44,76$$

Preis: $44.76 + 225 (-2/15) = 14,76.$

vi) Die arbitragefreien Preise der Einheitsvektoren entsprechen den Lösungen des Gleichungssystems unter ii), d.h. 0,45238 sowie 0,5.

Aufgabenteil b)

i) Die erste Zeile von V^T ist gegeben durch den Vektor $(1+r)(1, \dots, 1)$ und die erste Zeile von w ist gegeben durch den Skalar 1. Die erste Zeile des Gleichungssystems $V^T w^* = w$ lautet somit $(1+r) \sum_{i=1}^n w_i^* = 1$ und damit gilt $\sum q_i = 1$.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad w_c &= \frac{1}{1+r} E_Q[C] = \frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^s c_j q_j \\ &= \frac{1}{1+r} c_1 q_1 = \frac{1}{1+r} (1+r) w_1^* = w_1^* . \end{aligned}$$

Der arbitragefreie Preis des ersten Einheitsvektors entspricht dem ersten Wert des preiserzeugenden Vektors.

iii) Da der State Space-Markt vollständig ist, d.h. die Matrix V den Rang s hat, lässt sich jeder $(s,1)$ -Vektor als Linearkombination darstellen, d.h. es gibt einen Portfoliovektor x mit $Vx = e_i$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ dem i -ten Einheitsvektor entspricht. Der Preis dieses Portfolios ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum x_i w_i &= w^T x = (V^T w^*)^T x = w^{*T} Vx \\ &= w^{*T} e_i = w_i^* . \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (24 min)

a) Ein fünfjähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe $\{Z, Z, Z, Z, Z+N\}$ seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und $Z = Ni$ die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen, wobei i den Nominalzins des Bonds bezeichne.

- i) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert des Bonds unter Benutzung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Marktzins in Höhe von r zu Grunde gelegt wird!
- ii) Weisen Sie auf der Grundlage von a) nach, dass im Falle $r = i$ der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)!
- iii) Bestimmen Sie den fairen Wert des Bonds zum Zeitpunkt s , wobei $0 < s < 5$.
- iv) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die effektive Rendite (Baldwin-Verzinsung) des Bonds bei Annahme der Wiederanlage der Rückflüsse zum Marktzins r und einem Kaufpreis von P_0 ! Benutzen Sie dabei die geometrische Summe.

(12 min)

- b) i) Bestimmen Sie den Barwert einer ewigen (unbegrenzte Restlaufzeit) Anleihe mit konstanter Kuponzahlung $Z = Ni$! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r aus.
Hinweis: Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P_0(r, T) = N\left[\frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right)(1+r)^{-T}\right].$$

- ii) Welchen Wert nimmt die Macaulay-Duration der ewigen Kuponanleihe unter i) an?
- iii) Welchen Wert nimmt die (relative) Konvexität der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

(12 min)

Lösung Aufgabe 2:

- a) i) Definiere den Aufzinsungsfaktor durch $q := 1 + r$
Es gilt dann

$$\begin{aligned} P_0(r) &= Zq^{-1} + Zq^{-2} + Zq^{-3} + Zq^{-4} + Zq^{-5} + Nq^{-5} \\ &= Zq^{-5} (q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{q^5} \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1} \right) + Nq^{-5} \\ &= \frac{Z}{r} \left(1 - \frac{1}{q^5} \right) + Nq^{-5} \end{aligned}$$

Alternativ: ($v := q^{-1}$)

$$\begin{aligned}
P_0(r) &= Z(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + Nv^5 \\
&= Z v(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + Nv^5 \\
&= Z v \frac{1 - v^5}{1 - v} + Nv^5
\end{aligned}$$

ii) Für $Z = Ni$ und $r = i$ folgt aus i)

$$P_0(i) = N \left(1 - \frac{1}{q^5}\right) + Nq^{-5} = N$$

iii) $P_s(r) = (1 + r)^s P_0(r) = q^s P_0(r)$

iv) Es muss gelten

$$\begin{aligned}
P_0(1 + r_{\text{eff}})^5 &= Zq^4 + Zq^3 + \dots + Z + N \\
&= Z(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) + N \\
&= Z \frac{q^5 - 1}{q - 1} + N
\end{aligned}$$

und damit

$$r_{\text{eff}} = \sqrt[5]{\left(\frac{Z(q^5 - 1)}{r} + N\right) / P_0} - 1$$

b) i) Betrachte $\lim_{T \rightarrow \infty} P_0(r, T)$. Es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_0(r, T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r}$$

ii) Es gilt zunächst:

$$dP_0/dr = -Z r^{-2}$$

Hieraus folgt für die absolute Duration D_A :

$$D_A(r) = -dP/dr_0 = Z r^{-2}$$

Für die Macaulay-Duration folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
D(r) &= (1 + r) \frac{D_A(r)}{P_0} = (1 + r) \frac{Z}{r^2} \cdot \frac{r}{Z} \\
&= \frac{1 + r}{r} .
\end{aligned}$$

iii) Es gilt $C(r) = P_0''(r) / P_0(r)$.

Nach ii) folgt $P_0''(r) = d(-Z r^{-2})/dr = 2Z r^{-3}$.

Damit gilt insgesamt:

$$C(r) = 2 \frac{Z}{r^3} \frac{r}{Z} = \frac{2}{r^2}$$

Aufgabe 3: (26 min)

- a) Ein anfänglicher Kreditbetrag der Höhe S_0 soll mit gleichhohen nachschüssigen Zahlungen A (Annuität) in n Jahren inklusive aufgelaufener Zinsen getilgt werden. Der als fristigkeitsunabhängig angenommene Kreditzins beträgt r .
Weisen Sie nach, dass die Annuität A gegeben ist durch

$$A = S_0 \frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

(3 min)

- b) Vorgegeben seien nunmehr die Größen S_0 , A und r . bestimmen Sie die erforderliche Kreditlaufzeit n .

(5 min)

- c) Weisen Sie nach, dass für $t = 1, \dots, n$ die Restschuld RS_t am Ende der jeweiligen Periode gegeben ist durch

$$RS_t = S_0 \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}$$

Hinweis: Gehen Sie von dem Ansatzpunkt aus, dass in einem vollkommenen Kapitalmarkt sich die Restschuld zum Zeitpunkt t als Differenz der aufgezinste Schuld bis t und der aufgezinste Annuitätzahlungen der Teilaufgabe a) bis zum Zeitpunkt t ergeben muss.

(8 min)

- d) Aktuarin ZZ schließt nun im Alter x (definitionsgemäß $t=0$) eine Risikolebensversicherung ab, deren Auszahlung im Todesfall sich kongruent zur Restschuld nach Teilaufgabe c) entwickelt. Stellen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} dieser Versicherung in Abhängigkeit von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ dar!
Bestimmen Sie den korrespondierenden erwarteten Leistungsbarwert. Verwenden Sie dabei die Größe ${}_t|q_x$!

(10 min)

Lösung Aufgabe 3:

- a) Barwert der nachschüssigen Rückzahlungen ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned} & Aq^{-1} + Aq^{-2} + \dots + Aq^{-n} \\ &= Aq^{-n}(q^{n-1} + \dots + q + 1) = A \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$S_0 = A \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

und hieraus folgt

$$A = S_0 \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1}$$

- b) Für die Annuität gilt zunächst

$$A = S_0 \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} = \frac{S_0 r}{1 - q^{-n}}.$$

Hieraus folgt

$$A - Aq^{-n} = S_0 r$$

und weiter

$$q^n = \frac{A}{A - S_0 r}$$

sowie

$$n \ln q = \ln(A) - \ln(A - S_0 r)$$

und schließlich

$$n = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 r)}{\ln q}.$$

- c) Nach Hinweis gilt ($q = 1 + r$)

$$\begin{aligned} RS_t &= S_0 q^t - A (q^{t-1} + \dots + q + 1) \\ &= S_0 q^t - A \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 q^t - S_0 \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\ &= S_0 \left[q^t - \frac{q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} \right] \\ &= S_0 \frac{q^t(q^n - 1) - q^n(q^t - 1)}{q^n - 1} \\ &= S_0 \frac{q^{n-t} - q^t}{q^n - 1} \end{aligned}$$

- d) Ist t der Todeszeitpunkt, so erfolgt eine Zahlung der Höhe RS_t . Der Todeszeitpunkt in Termen der gestutzten Lebensdauer entspricht $CT + 1$. Damit ist für $CT = 0, \dots, n-1$ der Barwert der Zahlung in $t = CT + 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} RS_{CT+1} \cdot q^{-(CT+1)} &= S_0 \frac{q^n - q^{CT+1}}{q^n - 1} q^{-(CT+1)} \\ &= S_0 \frac{q^{n-(CT+1)} - 1}{q^n - 1} = S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$LBW = \begin{cases} S_0 \frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} & CT = 0, \dots, n-1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

und ferner

$$\begin{aligned} E(LBW) &= \frac{S_0}{q^n - 1} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1) P(CT = t) \\ &= \frac{S_0}{q^n - 1} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-t} - 1) {}_t|q_x \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (16 min)

- a) Betrachten Sie eine binäre Put-Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil: Notiert der Basiswert am Ende der Laufzeit auf oder unter dem Schwellenwert $X = 50$, so erhält der Käufer der Option den fixen Betrag N . Ansonsten verfällt die Option wertlos.

Unterstellen Sie für die Kursentwicklung des Basistitels einen einperiodigen Binomialprozess mit Startwert $s_0 = 50$ sowie einer prozentualen Aufwärtsbewegung von 15% bzw. einer prozentualen Abwärtsbewegung von 10%. Der einperiodige Zinssatz für eine sichere Kapitalanlage bzw. Kapitalaufnahme betrage $r = 1\%$.

- i) Skizzieren Sie zunächst die Entwicklung des Basistitels sowie der Option!
- ii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Preis in $t = 0$ der einperiodigen binären Put-Option mit $X = 50$ und $N = 1$. Geben Sie **explizit** die zugrundeliegende Duplikationsstrategie an.
- iii) Bestimmen Sie auf der Basis des **Duplikationsprinzips** den arbitragefreien Schlussabrechnungspreis F_0 eines einperiodigen Forward auf den Basistitel. Interpretieren Sie das Ergebnis!

(6 min)

- b) Versicherungsunternehmen BBB verkauft eine einjährige aktienindexgebundene Lebensversicherung zur Gesamtprämie EUR 10 000 an einen x -jährigen Kunden. Die Modalitäten der Versicherung in Bezug auf den Erlebensfall lauten wie folgt:

Es wird eine Rückzahlung der Gesamtprämie garantiert. Im Falle einer **negativen** DAX-Entwicklung erhält der Versicherte einen Bonus von 50% auf die einjährige DAX-Rendite bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag in Höhe von EUR 9 500.

Das Unternehmen sieht sich der folgenden Anlagesituation in $t = 0$ gegenüber: Es herrscht ein sicherer Zins von 5%, der DAX steht bei 4 750 und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 4 750 weisen eine Optionsprämie von EUR 260 auf.

- i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfalleistung in $t = 1$?
- ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?
- iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in $t = 0$?
- iv) Welche faire Prämie resultiert hieraus?
- v) Welcher Betrag verbleibt dem Unternehmen zur Deckung einer Todesfalleistung und von Betriebskosten?

(4 min)

- c) Alternativ wird – bei gleichen Kapitalmarktbedingungen – das Leistungsprofil der aktienindexgebundenen Lebensversicherung im Erlebensfall unter b) wie folgt festgelegt:

Auf einen Betrag in Höhe von EUR 9 500 wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer **positiven** DAX-Entwicklung eine 50%-ige Partizipation, bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag von EUR 9 500 zum Zuge – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

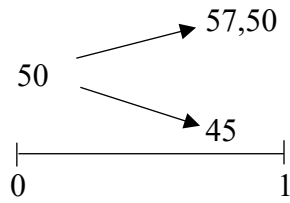
- i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfalleistung in $t = 1$?
- ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?
- iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in $t = 0$?

(6 min)

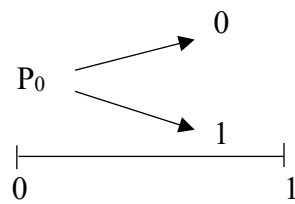
Lösung Aufgabe 4:

Aufgabenteil a)

- i) Entwicklung Basistitel:



Entwicklung Option:



ii) Duplikation:

$$(I) \quad 1,01x_1 + 57,50x_2 = 0$$

$$(II) \quad 1,01x_1 + 45x_2 = 1$$

$$(I)-(II): \quad 12,5x_2 = -1, \quad x_2 = -1/12,5 = -0,08$$

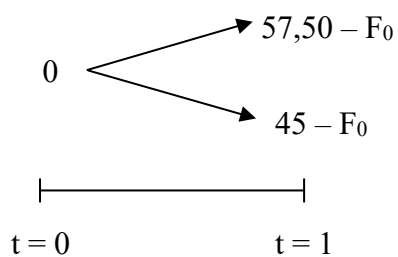
$$(I): \quad x_1 = 4,55$$

Arbitragefreier Preis:

$$1 \cdot x_1 + 50x_2 = 0,5545.$$

Duplikationsstrategie in $t = 0$: 0,08 Aktien (short) und risikolose Anlage des Betrags 4,5545.

iii) Für die Forwardposition gilt aus Sicht des Investors:



Dabei ist F_0 der zu bestimmende Forwardpreis. Erwirbt der Investor x Einheiten des Basistitels und y der sicheren Anlage, so gelten für die Duplikationsposition damit die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} 50x + y &= 0 && (t = 0) \\ 57,50x + 1,01 y &= 57,5 - F_0 && (t = 1, \text{ Fall a}) \\ 45x + 1,01 y &= 45 - F_0 && (t = 1, \text{ Fall b}) \end{aligned}$$

Aus (II) – (III) folgt $x = 1$ und damit $y = -50$. Aus (II) und (III) folgt damit jeweils $F_0 = 50,5$, d.h. der Forwardpreis entspricht dem zum sicheren Zins aufgezinsten heutigen Wert des Basistitels (Cost-of-Carry-Preis).

Aufgabenteil b):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$ ($DAX(0) = 4\,750$)

$$\begin{aligned} L_1 &= \max \left\{ 10\,000, 10\,000 - 9\,500 \cdot 0,5 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \right\} \\ &= \max \{ 10\,000, 10\,000 + 4\,750 - DAX(1) \} \end{aligned}$$

ii) $L_1 = 10\,000 + \max \{ 4\,750 - DAX(1), 0 \}$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit Ausübungspreis $X = 4\,750$.

iii) $L_1 = 10\,000(1,05)^{-1} + 260$
 $= 9\,523,81 + 260 = 9\,783,81$

iv) $9\,783,81 \cdot p_x$

v) $10\,000 - 9\,783,81 \cdot p_x$

Aufgabenteil c):

i) Rückzahlungsprofil in $t = 1$

$$\begin{aligned} L_1 &= \max \left\{ 1,04 \cdot 9\,500, 9\,500 + 9\,500 \cdot 0,5 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)} \right\} \\ &= \max \{ 9\,880, 9\,500 + (DAX(1) - 4\,750) \} \end{aligned}$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$$L_1 = 9\,880 + \max(0, DAX(1) - 4\,750 - 380)$$

$$= 9\,880 + \max(\text{DAX}(1) - 5\,130, 0)$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis in Höhe von $X = 5\,130$.

iii) Fairer Wert L_0 in $t = 0$:

$$L_0 = 9\,880(1,05)^{-1} + C_0(5\,130) = 9\,409,52 + C_0(5\,130).$$

Dabei bezeichnet $C_0(5\,130)$ den Marktpreis eines einjährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis $X = 5\,130$ in $t = 0$.