Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Schadenversicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Mai 2021

Hinweise:

-

Mitglieder der Prüfungskommission:

Christian Hipp, Martin Morlock,
Hanspeter Schmidli, Klaus D. Schmidt

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Die Schadenhöhen $X_1, X_2, \dots, X_n$ von n Schäden eines Bestandes seien unabhängig und Pareto–verteilt mit der Verteilungsfunktion F_X mit

$$F_X(x) := (1 - x^{-\beta})\,\chi_{(1,\infty)}(x)$$

und $\beta \in (1, \infty)$.

(a) Bestimmen Sie für $\beta = 1.3$ und $n = 50$ die Schranke M mit

$$P\Big[\max_{k \in \{1,\dots,n\}} X_k \le M\Big] = 0.99$$

Hinweis: Für hinreichend kleine $z \in (0, \infty)$ gilt $(1 - z)^n \approx 1 - nz$.
(5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie für $\beta = 1.3$ und $n = 50$ den bedingten Erwartungswert

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \,\middle|\, \max_{k \in \{1,\dots,n\}} X_k \le M\right]$$

(7 Punkte)

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (b) mit dem Erwartungswert von X. Welche Gefahr besteht im Fall der vorliegenden Pareto–Verteilung, wenn man das Stichprobenmittel $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ als Schätzer für den Erwartungswert von X verwendet?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Aus der Unabhängigkeit der Schadenhöhen folgt

$$0.99 = P\Big[\max_{k\in\{1,\ldots,n\}} X_k \le M\Big] = P\left[\bigcap_{k=1}^n \{X_k \le M\}\right] = \prod_{k=1}^n P[X_k \le M] = P[X \le M]^n$$

Daraus ergibt sich zunächst $M \in (1,\infty)$ und sodann

$$0.99 = P[X \le M]^n = (1 - M^{-\beta})^n \approx 1 - nM^{-\beta}$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$M \approx \left(\frac{1-0.99}{n}\right)^{-1/\beta} = (100\,n)^{1/\beta}$$

Für $\beta = 1.3$ und $n = 50$ ergibt sich daraus $M \approx 700$.

(b) Aus der Unabhängigkeit der Schadenhöhen folgt

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \,\middle|\, \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} X_k \le M\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E\Big[X_k \,\Big|\, \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i \le M\Big] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{E[X_k\chi_{(-\infty,M]}(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i)]}{P[\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i \le M]} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{E[X_k \prod_{i=1}^n \chi_{(-\infty,M]}(X_i)]}{\prod_{i=1}^n P[X_i \le M]} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{E[X_k\chi_{(-\infty,M]}(X_k)]\prod_{k\ne i=1}^n P[X_i \le M]}{\prod_{i=1}^n P[X_i \le M]} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{E[X_k\chi_{(-\infty,M]}(X_k)]}{P[X_k \le M]} \\
&= \frac{E[X\chi_{(-\infty,M]}(X)]}{P[X \le M]} \\
&= \frac{1}{1-M^{-\beta}}\int_{-\infty}^M x\cdot\beta x^{-\beta-1}\chi_{(1,\infty)}(x)\,dx \\
&= \frac{\beta}{1-M^{-\beta}}\int_1^M x^{-\beta}\,dx \\
&= \frac{\beta}{1-M^{-\beta}}\,\frac{M^{1-\beta}-1}{1-\beta} \\
&= \frac{1-M^{1-\beta}}{1-M^{-\beta}}\,\frac{\beta}{\beta-1}
\end{aligned}$$

Für $\beta = 1.3$ ergibt sich daraus

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \,\middle|\, \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} X_k \le M\right] \approx 3.73$$

(c) Es gilt

$$E[X] = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

Für $\beta = 1.3$ ergibt sich daraus

$$E[X] = 4.33$$

Nach Wahl von M enthalten 99% aller Stichproben vom Umfang n nur Beobachtungen, die unterhalb der Schranke M liegen, und für diese Stichproben liegt der Erwartungswert des Stichprobenmittels deutlich unter dem Erwartungswert von X. Die Verwendung des Stichprobenmittels führt daher in fast allen Fällen zu einer Unterschätzung des Erwartungswertes von X.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Ein Versicherungsvertrag erzeugt in einem Jahr N Schäden mit den Schadenhöhen X_k mit $k \in \mathbb{N}$. Dabei sind alle Zufallsvariablen unabhängig und es gilt

n	0	1	2	3
$P[N = n]$	0.5	0.1	0.3	0.1

und damit

$$E[N] = 1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{var}[N] = 1.2$$

sowie

x	1	2	3	110
$P[X_k = x]$	0.49	0.30	0.20	0.01

Das Solvenzkapital ist das kleinste Kapital s mit

$$P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \leq s\right] \geq 0.995$$

(a) Approximieren Sie das Solvenzkapital mit einer Normalapproximation.
(9 Punkte)

(b) Berechnen Sie

$$P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \leq 99\right]$$

und beurteilen Sie die Qualität der Normalapproximation für die vorliegende Verteilung der Schadenhöhen.
(6 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= 2.79 \\ E[X^2] &= 124.49 \\ \mathrm{var}[X] &= 116.7059 \end{aligned}$$

Für den Gesamtschaden $S := \sum_{k=1}^{N} X_k$ ergibt sich aus den Gleichungen von Wald

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]\, E[X] \\ &= 1 \times 2.79 \\ &= 2.79 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{var}[S] &= E[N]\, \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[N]\, (E[X])^2 \\ &= 1 \times 116.7059 + 1.2 \times 2.79^2 \\ &= 126.0468 \end{aligned}$$

und damit $\sqrt{\mathrm{var}[S]} = 11.23$. Aus der Gleichung

$$\Phi(2.58) = 0.995 = P[S \leq s] = P\left[\frac{S - E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}} \leq \frac{s - 2.79}{11.23}\right] \approx \Phi\left(\frac{s - 2.79}{11.23}\right)$$

ergibt sich zunächst

$$\frac{s - 2.79}{11.23} \approx 2.58$$

und sodann $s = 31.76$.

(b) Im Vergleich zu den anderen Werten der Verteilung der Schadenhöhe ist der sehr selten auftretende Wert 110 ungewöhnlich hoch. Wegen

$$\begin{aligned} P[S \leq 30.65] &\leq P[S \leq 99] \\ &= \sum_{n=0}^{3} P[N = n]\, P\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \leq 99\right] \\ &= P[N = 0] + \sum_{n=1}^{3} P[N = n] \prod_{k=1}^{n} P[X_k \leq 99] \\ &= 0.5 + 0.1 \times 0.99 + 0.3 \times 0.99^2 + 0.1 \times 0.99^3 \\ &= 0.99 \\ &< 0.995 \end{aligned}$$

wird das Solvenzkapital durch die Normalapproximation stark unterschätzt. Daher ist die Normalapproximation für die vorliegende Verteilung der Schadenhöhen nicht geeignet.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen will ein Risiko S mit der Schadenzahl N mit

n	0	1	2
$P[N = n]$	0.5	0.3	0.2

und den untereinander und von N unabhängigen Schadenhöhen X_k mit $k \in \mathbb{N}$ und

x	10	20	100	200
$P[X_k = x]$	0.1	0.2	0.2	0.5

tarifieren.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie.
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass Schäden der Höhe 10 oder 20 nicht erstattet werden.
(3 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall einer Beitragsrückerstattung in Höhe von 25% der Nettorisikoprämie, wenn ein Gesamtschaden bis zur Höhe 40 nicht erstattet wird.
(6 Punkte)

(d) Welche dieser Tarifierungsvarianten erscheint Ihnen für das Versicherungsunternehmen am besten geeignet, welche am wenigsten? Begründen Sie Ihre Wahl in Stichworten.
(4 Punkte)

Lösung: In allen Fällen ist die Nettoprämie der Erwartungswert der Versicherungsleistung T. Sei

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

(a) In diesem Fall ist die Versicherungsleistung T durch

$$T := S$$

gegeben. Wegen $E[N] = 0.7$ und $E[X] = 125$ gilt daher

$$E[T] = E[S] = E[N]\,E[X] = 0.7 \times 125 = 87.50$$

(b) In diesem Fall ist die Versicherungsleistung T durch

$$T := \sum_{k=1}^{N} X_k \chi_{\{X_k > 100\}} = \sum_{k=1}^{N} X'_k$$

mit

$$X'_k := X_k \chi_{\{X_k > 100\}}$$

gegeben. Es gilt

x	0	100	200
$P[X' = x]$	0.3	0.2	0.5

und damit $E[X'] = 120$. Wie unter (a) erhält man nun

$$E[T] = E[N]\,E[X'] = 0.7 \times 120 = 84$$

(c) In diesem Fall ist die Versicherungsleistung T durch

$$\begin{aligned} T &:= 0.25\,E[T]\,\chi_{\{S \le 40\}} + S\,\chi_{\{S > 40\}} \\ &= 0.25\,E[T]\,\chi_{\{S \le 40\}} + S - S\,\chi_{\{S \le 40\}} \end{aligned}$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_{\{S \le 40\}} = \chi_{\{N=0\}} & \\ + \chi_{\{N=1\}}\,\chi_{\{X_1 \le 20\}} & \\ + \chi_{\{N=2\}}\,\chi_{\{X_1 \le 20\}}\,\chi_{\{X_2 \le 20\}} & \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S\,\chi_{\{S \le 40\}} = 10\,\chi_{\{N=1\}}\,\chi_{\{X_1 = 10\}} & \\ + 20\,\chi_{\{N=1\}}\,\chi_{\{X_1 = 20\}} & \\ + 20\,\chi_{\{N=2\}}\,\chi_{\{X_1 = 10\}}\,\chi_{\{X_2 = 10\}} & \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 30\, \chi_{\{N=2\}}\, \chi_{\{X_1=10\}}\, \chi_{\{X_2=20\}} \\
&+ 30\, \chi_{\{N=2\}}\, \chi_{\{X_1=20\}}\, \chi_{\{X_2=10\}} \\
&+ 40\, \chi_{\{N=2\}}\, \chi_{\{X_1=20\}}\, \chi_{\{X_2=20\}}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P[S \leq 40] &= P[N = 0] \\
&\quad + P[N = 1]\, P[X_1 \leq 20] \\
&\quad + P[N = 2]\, P[X_1 \leq 20]\, P[X_2 \leq 20] \\
&= 0.5 + 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 \times 0.3 \\
&= 0.608
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E[S\, \chi_{\{S \leq 40\}}] &= 10 \times 0.3 \times 0.1 \\
&\quad + 20 \times (0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 \times 0.1) \\
&\quad + 30 \times 0.2 \times (0.1 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1) \\
&\quad + 40 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \\
&= 2.10
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
E[T] &= 0.25\, E[T]\, P[S \leq 40] + E[S] - E[S\, \chi_{\{S \leq 40\}}] \\
&= 0.25 \times E[T] \times 0.608 + 87.50 - 2.10
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
E[T] = \frac{87.50 - 2.10}{1 - 0.25 \times 0.608} = 100.71
$$

(d) Die drei Tarifierungsvarianten lassen sich anhand des jeweiligen Regulierungsaufwands vergleichen. Dieser ist in Variante (b) am geringsten, weil in diesem Fall kein Schaden der Höhe 10 oder 20 reguliert werden muss, und er ist in Variante (a) am höchsten, weil in diesem Fall alle Schäden reguliert werden müssen. In Variante (c) muss ein Schaden der Höhe 10 oder 20 reguliert werden, wenn auch ein Schaden der Höhe 100 oder 200 auftritt.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Ein Versicherungsunternehmen mit einem inhomogenen Bestand geht davon aus, dass sich der Bestand aus drei Typen A, B und C von Versicherungsnehmern zusammensetzt. Diese unterscheiden sich durch die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie innerhalb eines Jahres einen Schaden verursachen:

	Schadeneintrittswahrscheinlichkeit	Anteil am Bestand
Typ A	0.1	0.5
Typ B	0.2	0.3
Typ C	0.3	0.2

Bei jedem Versicherungsnehmer tritt innerhalb eines Jahres höchstens ein Schaden auf und die Höhe eines Schadens ist 1200. Es wird angenommen, dass die jährlichen Schadenzahlen bedingt (auf den Typ des Versicherungsnehmers) unabhängig sind. Zur Risikoselektion wird das folgende Bonus–Malus–System mit den drei Klassen 1, 2 und 3 verwendet:

- Im ersten Jahr ist jeder Versicherungsnehmer in der Klasse 1.
- Bei schadenfreiem Verlauf in einem Jahr wird der Versicherungsnehmer eine Klasse höher eingestuft oder bleibt in der höchsten Klasse 3.
- Verursacht der Versicherungsnehmer in einem Jahr einen Schaden, so wird er in die Klasse 1 zurückgestuft.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer ohne Berücksichtigung seiner Schadenhistorie.
(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass ein Versicherungsnehmer mit Schadeneintrittswahrscheinlichkeit p ab dem zweiten Jahr immer mit Wahrscheinlichkeit p in Klasse 1 ist.
(2 Punkte)

(c) Berechnen Sie für das zweite Jahr den Anteil der Versicherungsnehmer des Bestandes in Klasse 1.
(2 Punkte)

(d) Berechnen Sie für das zweite Jahr die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer in Klasse 1.
(3 Punkte)

(e) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für einen Versicherungsnehmer mit drei Schäden in den letzten drei Jahren.
(3 Punkte)

(f) Wie beurteilen Sie die Risikodifferenzierung dieses Bonus–Malus–System aufgrund der Ergebnisse aus (a), (d) und (e)?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Für einen Versicherungsnehmer bezeichne N die Anzahl der Schäden in einem Jahr und S den Gesamtschaden. Für die Nettorisikoprämie $E[S]$ gilt dann

$$E[S] = E[1200\, \chi_{\{N=1\}}] = 1200\, P[N = 1]$$

Wegen

$$\begin{aligned} P[N = 1] &= \sum_{T \in \{A,B,C\}} P[N = 1|T]\, P[T] \\ &= 0.1 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$E[S] = 1200\, P[N = 1] = 1200 \times 0.17 = 204$$

(b) Die Übergangsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} p & p & p \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} p & p & p \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass ein Versicherungsnehmer mit Schadeneintrittswahrscheinlichkeit p im zweiten Jahr mit Wahrscheinlichkeit p in Klasse 1 ist, und aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} p & p & p \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ (1-p)p \\ (1-p)(q+r) \end{pmatrix}$$

mit $q, r \in [0, 1]$ und $p + q + r = 1$ folgt, dass dies auch in jedem weiteren Jahr der Fall ist.

(c) Für einen Versicherungsnehmer bezeichne K die Klasse im zweiten Jahr. Dann gilt

$$\begin{aligned} P[K = 1] &= \sum_{T \in \{A,B,C\}} P[K = 1|T]\, P[T] \\ &= 0.1 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

(d) Für einen Versicherungsnehmer und das zweite Jahr bezeichne K die Klasse, N die Anzahl der Schäden und S den Gesamtschaden. Für die Nettorisikoprämie $E[S|K=1]$ für einen Versicherungsnehmer in Klasse 1 gilt dann aufgrund der bedingten Unabhängigkeit der Schadenzahlen

$$E[S] = E[1200\,\chi_{\{N=1\}}|K=1] = 1200\,P[N=1|K=1]$$

Wegen

$$\begin{aligned}
P[N=1|K=1] &= \frac{P[\{N=1\}\cap\{K=1\}]}{P[K=1]} \\
&= \frac{\sum_{T\in\{A,B,C\}} P\big[\{N=1\}\cap\{K=1\}|T\big]\,P[T]}{P[K=1]} \\
&= \frac{\sum_{T\in\{A,B,C\}} P[N=1|T]\,P[K=1|T]\,P[T]}{P[K=1]} \\
&= \frac{0.1\times 0.1\times 0.5+0.2\times 0.2\times 0.3+0.3\times 0.3\times 0.2}{0.17} \\
&= 0.20588
\end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$E[S] = 1200\,P[N=1|K=1] = 1200\times 0.20588 = 247.06$$

(e) Für einen Versicherungsnehmer bezeichne N_i die Anzahl der Schäden im Jahr $i\in\{1,2,3,4\}$ und S den Gesamtschaden im Jahr 4. Für die Nettorisikoprämie $E[S|\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}]$ für einen Versicherungsnehmer mit drei Schäden in den letzten drei Jahren gilt dann aufgrund der bedingten Unabhängigkeit der Schadenzahlen

$$E[S] = E\Big[1200\,\chi_{\{N_4=1\}}\Big|\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\Big] = 1200\,P\Big[N_4=1\Big|\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\Big]$$

Wegen

$$\begin{aligned}
P\Big[N_4=1\Big|\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\Big] &= \frac{P\big[\bigcap_{i=1}^4\{N_i=1\}\big]}{P\big[\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\big]} \\
&= \frac{\sum_{T\in\{A,B,C\}} P\big[\bigcap_{i=1}^4\{N_i=1\}\ \big|\ T\big]\,P[T]}{\sum_{T\in\{A,B,C\}} P\big[\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\ \big|\ T\big]\,P[T]} \\
&= \frac{\sum_{T\in\{A,B,C\}}(P[N=1|T])^4\,P[T]}{\sum_{T\in\{A,B,C\}}(P[N=1|T])^3\,P[T]} \\
&= \frac{0.1^4\times 0.5+0.2^4\times 0.3+0.3^4\times 0.2}{0.1^3\times 0.5+0.2^3\times 0.3+0.3^3\times 0.2} \\
&= 0.25904
\end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$E[S] = 1200\,P\Big[N_4=1\Big|\bigcap_{i=1}^3\{N_i=1\}\Big] = 1200\times 0.2594 = 310.85$$

(f) Für die Risiken der Klasse 1 zeigt der Vergleich der Ergebnisse aus (a) und (d), dass das vorliegende Bonus–Malus–System eine gewisse Prämiendifferenzierung bewirkt, und für diese Risiken zeigt der Vergleich der Ergebnisse aus (d) und (e), dass die Prämiendifferenzierung durch das Bonus–Malus–System nach drei Jahren schwächer ist als bei der Verwendung von Bayes–Prämien. Dies ist nicht verwunderlich, da das Bonus–Malus–System nur drei Klassen verwendet, während die Bayes–Prämien nach n Jahren $n+1$ mögliche Schadenhistorien unterscheiden.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2016 bis 2020 die Prämien und die in den einzelnen Abwicklungsjahren geleisteten Zahlungen:

Anfall-	**Abwicklungsjahr** k					**Prämie**
jahr i	0	1	2	3	4	π_i
2016	140	100	144	96	96	600
2017	160	64	112	120		600
2018	155	101	104			600
2019	145	95				600
2020	150					600

(a) Schätzen Sie die Reserve für 2021 mit dem additiven Verfahren.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die additive Endschadenquote.
(2 Punkte)

(c) Schätzen Sie die Reserve für 2021 mit dem Chain–Ladder Verfahren.
(7 Punkte)

(d) Wie würde sich eine Korrektur der für 2020 geleisteten Zahlungen auf die beiden Schätzwerte auswirken?
(1 Punkt)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_4^{\mathrm{AD}} &= \frac{96}{600} = 0.16 \\
\zeta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{96+120}{600+600} = 0.18 \\
\zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{144+112+104}{600+600+600} = 0.20 \\
\zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{100+64+101+95}{600+600+600+600} = 0.15
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
R_{(2021)}^{\mathrm{AD}} &= \zeta_1^{\mathrm{AD}}\pi_{2020} + \zeta_2^{\mathrm{AD}}\pi_{2019} + \zeta_3^{\mathrm{AD}}\pi_{2018} + \zeta_4^{\mathrm{AD}}\pi_{2017} \\
&= (\zeta_1^{\mathrm{AD}} + \zeta_2^{\mathrm{AD}} + \zeta_3^{\mathrm{AD}} + \zeta_4^{\mathrm{AD}}) \times 600 \\
&= (0.15 + 0.20 + 0.18 + 0.16) \times 600 \\
&= 414
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\zeta_0^{\mathrm{AD}} = \frac{140+160+155+145+150}{600+600+600+600+600} = 0.25$$

und damit

$$\begin{aligned}
\kappa^{\mathrm{AD}} &= \zeta_0^{\mathrm{AD}} + \zeta_1^{\mathrm{AD}} + \zeta_2^{\mathrm{AD}} + \zeta_3^{\mathrm{AD}} + \zeta_4^{\mathrm{AD}} \\
&= 0.25 + 0.15 + 0.20 + 0.18 + 0.16 \\
&= 0.94
\end{aligned}$$

(c) Aus dem Abwicklungsdreieck für Zuwächse erhält man das folgende Abwicklungsdreieck für Schadenstände:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	4
2016	140	240	384	480	576
2017	160	224	336	456	
2018	155	256	360		
2019	145	240			
2020	150				

Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_4^{\mathrm{CL}} &= \frac{576}{480} = 1.20 \\
\varphi_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{480+456}{384+336} = 1.30
\end{aligned}$$

$$\varphi_2^{\mathrm{CL}} = \frac{384 + 336 + 360}{240 + 224 + 256} = 1.50$$
$$\varphi_1^{\mathrm{CL}} = \frac{240 + 224 + 256 + 240}{140 + 160 + 155 + 145} = 1.60$$

und damit

$$\begin{aligned} R_{(2021)}^{\mathrm{CL}} &= S_{2020,0}(\varphi_1^{\mathrm{CL}} - 1) + S_{2019,0}(\varphi_2^{\mathrm{CL}} - 1) + S_{2018,0}(\varphi_3^{\mathrm{CL}} - 1) + S_{2017,0}(\varphi_4^{\mathrm{CL}} - 1) \\ &= 150 \times 0.6 + 240 \times 0.5 + 360 \times 0.3 + 456 \times 0.2 \\ &= 409.20 \end{aligned}$$

(d) Bei einer Korrektur des Wertes $S_{2020,0} = Z_{2020,0}$ würde sich die Chain–Ladder Reserve für 2021 ändern, die additive Reserve hingegen nicht.

Aufgabe 6 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2018 bis 2020 die Prämien und die aktuellen Schadenstände sowie externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2018			480	540
2019		495		600
2020	450			700
γ_k^{extern}	0.60	0.90	1	

(a) Schätzen Sie die Endschadenstände für 2019 und 2020 sowie die Gesamtreserve mit dem Loss–Development Verfahren.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Cape–Cod Endschadenquote.
(2 Punkte)

(c) Schätzen Sie die Endschadenstände für 2019 und 2020 sowie die Gesamtreserve mit dem Cape–Cod Verfahren.
(5 Punkte)

(d) Erklären Sie die Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus (a) und (c). Nennen Sie insbesondere zwei Gründe dafür, dass die Differenz zwischen den geschätzten Endschadenständen für 2020 größer ist als die für 2019.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$S_{2019,2}^{\mathrm{LD}} = S_{2019,1}/\gamma_1^{\mathrm{extern}} = 495/0.90 = 550$$
$$S_{2020,2}^{\mathrm{LD}} = S_{2020,0}/\gamma_0^{\mathrm{extern}} = 450/0.60 = 750$$

Daraus folgt zunächst

$$R_{2019}^{\mathrm{LD}} = S_{2019,2}^{\mathrm{LD}} - S_{2019,1} = 550 - 495 = 55$$
$$R_{2020}^{\mathrm{LD}} = S_{2020,2}^{\mathrm{LD}} - S_{2020,0} = 750 - 450 = 300$$

und sodann

$$R^{\mathrm{LD}} = R_{2019}^{\mathrm{LD}} + R_{2020}^{\mathrm{LD}} = 55 + 300 = 355$$

(b) Für die verbrauchten Prämien erhält man

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	**Prämie** π_i
2018			540	540
2019		540		600
2020	420			700
$\gamma_k^{\mathrm{extern}}$	0.60	0.90	1	

Daraus ergibt sich die Cape–Cod Endschadenquote

$$\kappa^{\mathrm{CC}} = \frac{450 + 495 + 480}{420 + 540 + 540} = \frac{1425}{1500} = 0.95$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} S_{2019,2}^{\mathrm{CC}} &= S_{2019,1} + (\gamma_2^{\mathrm{extern}} - \gamma_1^{\mathrm{extern}})\kappa^{\mathrm{CC}}\pi_{2019} \\ &= 495 + (1 - 0.90) \times 0.95 \times 600 \\ &= 495 + 57 \\ &= 552 \\ S_{2020,2}^{\mathrm{CC}} &= S_{2020,0} + (\gamma_2^{\mathrm{extern}} - \gamma_0^{\mathrm{extern}})\kappa^{\mathrm{CC}}\pi_{2020} \\ &= 450 + (1 - 0.60) \times 0.95 \times 700 \\ &= 450 + 266 \\ &= 716 \end{aligned}$$

Aus der letzten Rechnung erhält man außerdem

$$R_{2019}^{\mathrm{CC}} = 57$$
$$R_{2020}^{\mathrm{CC}} = 266$$

und damit

$$R^{\mathrm{CC}} = R_{2019}^{\mathrm{CC}} + R_{2020}^{\mathrm{CC}} = 57 + 266 = 323$$

(d) In 2020 ist der Loss–Development Endschadenstand deutlich höher als die Prämie. Dies deutet darauf hin, dass in diesem Jahr die Prämie zu niedrig oder der aktuelle Schadenstand ungewöhnlich hoch ist oder dass der Schätzwert γ_0^{extern} zu klein ist. Im Gegensatz zum Loss–Development Verfahren verwendet das Cape–Cod Verfahren auch die Prämien. Der Einfluss der Prämie auf den Cape–Cod Endschadenstand ist in 2020 größer als in 2019, weil in 2020 sowohl die Prämie als auch der geschätzte Anteil der zukünftigen Schadenzahlungen am Endschadenstand höher ist als in 2019.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M_{\text{XL}} > 0$ und Limit $L_{\text{XL}} > 0$ zahlt bei jedem Einzelschaden der Höhe X den Betrag

$$\widehat{X} := \min\{\max\{X - M_{\text{XL}}, 0\}, L_{\text{XL}}\}$$

Eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität $M_{\text{SL}} > 0$ und Limit $L_{\text{SL}} > 0$ zahlt bei einem Gesamtschaden der Höhe S den Betrag

$$\widehat{S} := \min\{\max\{S - M_{\text{SL}}, 0\}, L_{\text{SL}}\}$$

Ein Erstversicherer hat für einen Bestand eine Schadenexzedentenrückversicherung mit $M_{\text{XL}} = 1\,000$ und $L_{\text{XL}} = 1\,000$ sowie eine Stop–Loss Rückversicherung auf den nach der Schadenexzedentenrückversicherung verbleibenden Gesamtschaden mit $M_{\text{SL}} = 5\,000$ und $L_{\text{SL}} = 10\,000$ abgeschlossen.

(a) Wie viele Schäden der Höhe $2\,000$ kann der Erstversicherer mit einer Reserve von $5\,000$ und den Leistungen der beiden Rückversicherer bezahlen?
(8 Punkte)

(b) Wie ändert sich die Antwort in (a), wenn die Schadenexzedentenrückversicherung auf $M_{\text{XL}} = 500$ und $L_{\text{XL}} = 1\,000$ geändert wird?
(4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Prämie für die Schadenexzedentenrückversicherung in der Version (b) höher sein muss als in der Version (a).
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Bei n Schäden der Höhe 2 000 stehen dem Erstversicherer

- 5 000 aus der Reserve,
- $1\,000\,n$ aus der Schadenexzedentenrückversicherung und
- 10 000 aus der Stop–Loss Rückversicherung

zur Verfügung. Aus der Ungleichung

$$2\,000\,n \leq 5\,000 + 1\,000\,n + 10\,000 = 15\,000 + 1\,000\,n$$

ergibt sich $n \leq 15$. Daher kann der Erstversicherer 15 Schäden der Höhe 2 000 bezahlen.

(b) Für Schäden der Höhe 2 000 ändert sich die Leistung der Schadenexzedentenrückversicherung nicht. Daher kann der Erstversicherer auch in diesem Fall 15 Schäden der Höhe 2 000 bezahlen.

(c) Die Schadenexzedentenrückversicherung zahlt in der Version aus (b) für jeden Schaden mindestens so viel wie in der Version aus (a). Insbesondere zahlt sie für Schäden mit einer Höhe unter 1 000 in der Version aus (b) mehr als in der Version aus (a). Diese höheren Zahlungen müssen mit einer höheren Prämie finanziert werden.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Ein Erstversicherer beschreibt einen Bestand durch ein kollektives Modell mit der Schadenzahl N und den Schadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$. Es nimmt an, dass die Schadenzahl die Poisson–Verteilung mit Erwartungswert 10 besitzt, dass

$$\begin{aligned} P[X = 500] &= 0.8 \\ P[X = 2\,000] &= 0.1 \\ P[X = 6\,000] &= 0.1 \end{aligned}$$

gilt und dass seine Prämieneinnahmen 15 000 betragen werden. Der Erstversicherer will seinen Bestand rückversichern.
Rückversicherer A bietet an, für eine Rückversicherungsprämie von 5 000 bei jedem Schaden größer als 1 000 die Hälfte des Schadens zu erstatten.
Rückversicherer B bietet an, für eine Rückversicherungsprämie von 4 000 bei jedem Schaden der Höhe 6 000 den Betrag von 3 000 zu erstatten.

(a) Welches Angebot, A oder B, ist für den Erstversicherer vorteilhafter, gemessen am Erwartungswert und an der Varianz seines Gewinns?
(9 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns des Erstversicherers für den Fall, dass beide Rückversicherungen abgeschlossen werden.
(4 Punkte)

(c) Wie kann man die Leistung des Rückversicherers B als Schadenexzedentenrückversicherung darstellen?
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Für den Gewinn G_A bei Angebot A gilt

$$\begin{aligned}G_A &= 15\,000 - 5\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\\ &= 10\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}E[G_A] &= 10\,000 - E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X=6\,000\}}\Big)\Big]\\ &= 10\,000 - E[N]\,\Big(500\,P[X=500] + 1\,000\,P[X=2\,000] + 3\,000\,P[X=6\,000]\Big)\\ &= 10\,000 - 10 \times \Big(500 \times 0.8 + 1\,000 \times 0.1 + 3\,000 \times 0.1\Big)\\ &= 2\,000\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[G_A] &= \mathrm{var}\Bigg[\sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\Bigg]\\ &= E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X=6\,000\}}\Big)^2\Big]\\ &= E[N]\,\Big(500^2\,P[X=500] + 1\,000^2\,P[X=2\,000] + 3\,000^2\,P[X=6\,000]\Big)\\ &= 10 \times \Big(500^2 \times 0.8 + 1\,000^2 \times 0.1 + 3\,000^2 \times 0.1\Big)\\ &= 12\,000\,000\end{aligned}$$

Für den Gewinn G_B bei Angebot B gilt

$$\begin{aligned}G_B &= 15\,000 - 4\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 2\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\\ &= 11\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 2\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}E[G_B] &= 11\,000 - E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X=500\}} + 2\,000\,\chi_{\{X=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X=6\,000\}}\Big)\Big]\\ &= 11\,000 - E[N]\,\Big(500\,P[X=500] + 2\,000\,P[X=2\,000] + 3\,000\,P[X=6\,000]\Big)\\ &= 11\,000 - 10 \times \Big(500 \times 0.8 + 2\,000 \times 0.1 + 3\,000 \times 0.1\Big)\\ &= 2\,000\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[G_B] &= \operatorname{var}\left[\sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 2\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X_k=6\,000\}}\Big)\right] \\
&= E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X=500\}} + 2\,000\,\chi_{\{X=2\,000\}} + 3\,000\,\chi_{\{X=6\,000\}}\Big)^2\Big] \\
&= E[N]\,\Big(500^2\,P[X=500] + 2\,000^2\,P[X=2\,000] + 3\,000^2\,P[X=6\,000]\Big) \\
&= 10 \times \Big(500^2 \times 0.8 + 2\,000^2 \times 0.1 + 3\,000^2 \times 0.1\Big) \\
&= 15\,000\,000
\end{aligned}
$$

Daher gilt $E[G_A] = E[G_B]$ und $\operatorname{var}[G_A] < \operatorname{var}[G_B]$. Daher ist Angebot A für den Erstversicherer günstiger als Angebot B.

(b) Für den Gewinn G_{A+B} bei Annahme beider Angebote gilt

$$
\begin{aligned}
G_{A+B} &= 15\,000 - 5\,000 - 4\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}}\Big) \\
&= 6\,000 - \sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}}\Big)
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
E[G_{A+B}] &= 6\,000 - E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}}\Big)\Big] \\
&= 6\,000 - E[N]\,\Big(500\,P[X=500] + 1\,000\,P[X=2\,000]\Big) \\
&= 6\,000 - 10 \times \Big(500 \times 0.8 + 1\,000 \times 0.1\Big) \\
&= 1\,000
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[G_{A+B}] &= \operatorname{var}\left[\sum_{k=1}^{N}\Big(500\,\chi_{\{X_k=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X_k=2\,000\}}\Big)\right] \\
&= E[N]\,E\Big[\Big(500\,\chi_{\{X=500\}} + 1\,000\,\chi_{\{X=2\,000\}}\Big)^2\Big] \\
&= E[N]\,\Big(500^2\,P[X=500] + 1\,000^2\,P[X=2\,000]\Big) \\
&= 10 \times \Big(500^2 \times 0.8 + 1\,000^2 \times 0.1\Big) \\
&= 3\,000\,000
\end{aligned}
$$

(c) Im Fall des Angebotes B liegt eine Schadenexzedentenrückversicherung mit der Priorität 3 000 und einem Limit von mindestens 3 000 vor.