Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Grundlagen und quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 12. Juni 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey, Dr. I. Merk,
E. Müller, Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Aufgabe 1. Fallstudie: Analyse und Kommunikation im Zusammenhang mit einem neu erworbenen Tochterunternehmen. *[60 Punkte]*

Situation: Eine große international tätige Versicherung will sich regional diversifizieren und hat daher in einem Land, in dem sie bisher nicht vertreten ist, ein neues Tochterunternehmen erworben.

Das Tochterunternehmen betreibt Schaden/Unfall-Versicherung im Privatkunden- und auch Industriegeschäft, ersteres profitabel, letzteres nicht, was aber mit Blick auf Volumenziele nicht aufgegeben wird.

Der CEO wie auch große Teile des Managements des Tochterunternehmens sind lange bei ihrem Unternehmen mit entsprechend alten Verträgen. Dies gilt auch für die Bonusvereinbarungen des Managements des Tochterunternehmens, die vor allem auf Wachstum, Größe und Marktanteile des jeweils aktuellen Geschäftsjahres ausgerichtet sind.

Das Tochterunternehmen war jahrelang erfolgreich auf Basis der gezeigten Abschlüsse. Der CEO ist eine charismatische und auf Basis seines Erfolgs eher dominante Persönlichkeit, an deren Gebaren sich folglich bisher auch wenig Kritik oder kritisches Hinterfragen ergeben hat.

Risikomanagement (RM) existiert, befasst sich aber überwiegend mit weniger wichtigen Themen wie Prozesse der Reisekostenabrechnung etc. Risikomanagement, interne Revision und Versicherungsgeschäft liegen im Vorstandsbereich des CEO.

Die neue Muttergesellschaft sieht nunmehr gewisse Probleme, da aufgrund von Preiskampf das Privatkundengeschäft deutlich unter Druck gerät sowie das Industriegeschäft durch Silent-Cyber-Deckungen noch defizitärer wird, so dass auch das Gesamtergebnis sich deutlich schwächer darstellt und sich der Verlustgrenze nähert. Es gibt Anzeichen, dass mangelnde Profitabilität im Kerngeschäft durch „innovative“ Kapitalanlageprodukte kompensiert werden soll.

Des Weiteren hat sich bei der Muttergesellschaft der Eindruck verfestigt, dass der Informationsfluss des Tochterunternehmens sehr stark gesteuert wird und nicht gerade von Offenheit gekennzeichnet ist – sowohl gegenüber der Muttergesellschaft als auch intern.

Daher werden Sie als externer Berater von der Muttergesellschaft engagiert, um die Lage vor Ort zu analysieren sowie Empfehlungen zu möglichen Verbesserungen des ERM des Tochterunternehmens zu geben, die aufgrund der Ergebnisentwicklung notwendig sein wird.

Muttergesellschaft und Tochterunternehmen haben ihren Sitz innerhalb der Europäischen Union. Darüber hinaus ist die Muttergesellschaft an der US-amerikanischen Börse gelistet, dies ist für das Tochterunternehmen nicht der Fall, auch hat diese bisher nur nach lokalem Recht bilanziert.

(a) *[15 Punkte]* Nennen Sie drei regulatorische Standards, denen die Muttergesellschaft und damit ggf. auch das Tochterunternehmen unterliegt. Welche weiteren Standards könnten einschlägig sein? Welche Governance-Funktionen würden Sie mindestens erwarten? Welche Bereiche hat das Risikomanagementsystem unter diesen gesetzlichen Anforderungen abzudecken? Welche zentralen Aufgaben hat das Risikomanagement?

(b) *[15 Punkte]* Welche möglichen Probleme sehen Sie aufgrund der Fallbeschreibung im ERM des Tochterunternehmens? Nennen Sie drei Beispiele.

(c) *[20 Punkte]* Falls sich diese Erwartungen bestätigen, welche Empfehlungen zur Änderung geben Sie? Bitte gehen Sie dabei insbesondere ein auf: Vergütung, Risikomanagement, Governance und Risikokultur sowie Geschäftsausrichtung.

(d) *[5 Punkte]* Welche Prinzipien sollten bei der generellen Kommunikation nach außen genutzt werden? Begründen Sie dies.

(e) *[5 Punkte]* Ausmaß und Ausprägungen von Cyber-Risk sind derzeit weiter in Entwicklung. Welche Prinzipien für Maßnahmen in Prozessen und Kontrollen würden Sie dem Unternehmen mitgeben?

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung. *[21 Punkte]* Ein Rückversicherer berechne seine Prämien als das 1.2-fache der erwarteten Rückversicherungsleistung und verwende die Kennzahl RORAC zur Unternehmenssteuerung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass keine Kosten beim Rückversicherer anfallen.

(a) *[6 Punkte]* Der Rückversicherer hat bereits die Zahlungsverpflichtung $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$ übernommen, wobei die Schadengröße X_1 die folgende Verteilung hat:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1500) = 0.02.$$

Berechnen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk und Expected Shortfall von Y_1.

(b) *[5 Punkte]* Berechnen Sie zu beiden Risikomaßen aus (a) den RORAC, d.h. $RORAC_1$ bezüglich $VaR_{0.97}$ und $RORAC_2$ bezüglich $ES_{0.97}$.

(c) *[10 Punkte]* Der Rückversicherer hat die Möglichkeit, zusätzlich das Risiko $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$ zu versichern, wobei die Schadengröße X_2 unabhängig von X_1 ist und dieselbe Verteilung wie X_1 hat. Prüfen Sie für beide Varianten, $RORAC_1$ bzw. $RORAC_2$, jeweils, ob er diese Möglichkeit wahrnimmt, d.h. ob er die Verteilung von $Y_1 + Y_2$ der Verteilung von Y_1 vorzieht? Erklären Sie, welche Eigenschaften der verwendeten Größen die unterschiedlichen Entscheidungen des Rückversicherers ausgelöst hat, und beurteilen Sie die Auswirkungen der Entscheidungen aus Risiko- und Ertragssicht.

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko. *[24 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen führt eine Police zur Versicherung eines neuartigen Risikos ein. Da keine Beobachtungsdaten vorliegen, zieht das Unternehmen für die Kalkulation ein Bayesianisches Modell heran und macht dabei die folgenden Annahmen:

- Die Schadenhöhe X, gegeben den Wert θ des unbekannten Parameters Θ, sei $LN(\theta, 4)$-verteilt.
- Auf Basis von Experteneinschätzungen des neuartigen Risikos wird a priori $\Theta \sim \mathcal{N}(2, 1)$ angenommen.

Hinweis.

- Die Lognormalverteilung $LN(\theta, \sigma^2)$ hat die Dichte
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$
- Gilt $X \mid \Theta = \theta \sim LN(\theta, \sigma^2)$ und $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, so hat X die unbedingte Verteilung $LN(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.
- Quantil der Standardnormalverteilung: $\Phi^{-1}(0.97) = 1.880794$

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk der unbedingten Verteilung von X und der bedingten Verteilung von X, gegeben $\Theta = 2$. Geben Sie eine ökonomische Interpretation der Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2)$ an.

(b) *[8 Punkte]* Zeigen Sie: Die a posteriori Verteilung von Θ, gegeben die beobachteten Schadenhöhen $x_1, \ldots, x_n$, ist $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) *[2 Punkte]* Begründen Sie kurz, weshalb die Vorhersageverteilung von X, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, gleich $LN\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), 4 + \frac{4}{4+n}\right)$ ist.

(d) *[8 Punkte]* Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten des Value at Risk der Vorhersageverteilung zum Niveau 0.97 für $n \to \infty$ und geben Sie eine ökonomische Interpretation dafür an. Welche Schwierigkeiten könnten in der Praxis der Anwendbarkeit dieser Interpretation entgegenstehen?

Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT). *[14 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* “EVT ist ein nützliches Hilfsmittel im aktuariellen Risikomanagement”. Erläutern Sie kurz diese These anhand eines selbstgewählten Risikomanagementproblems aus der Schadensversicherung oder aus dem ERM.

(b) *[5 Punkte]* Für eine Zufallsvariable X und $u \in \mathbb{R}$ mit $P(X > u) > 0$ ist die excess-Verteilung zur Schranke u definiert durch $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u)$, $x \geq 0$; falls $E(|X|) < \infty$ ist die mean excess Funktion $e(u)$ der Erwartungswert der Verteilung F_u.

  (i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die excess Verteilung für die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD). (Die GPD-Verteilung mit Parametern ξ, β hat Überlebensfunktion $\bar{F}_{\xi,\beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, $x > 0$.)

  (ii) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass für eine Zufallsvariable X mit stetiger Verteilung der folgenden Zusammenhang zwischen VaR, ES und der mean excess Funktion gilt:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = e(\mathrm{VaR}_\alpha(X)) + \mathrm{VaR}_\alpha(X), \quad \alpha \in (0, 1),$$

(c) *[6 Punkte]* Erläutern Sie kurz die Rolle der GPD-Verteilung für die peaks over threshold (POT) Methode in der Extremwerttheorie und erklären Sie die Hauptidee des zugehörigen tail-Schätzers. Diskutieren Sie eventuell entstehende Probleme bei der Verwendung der POT Methode.

Aufgabe 5. Risikoaggregation und copulas. *[27 Punkte]* Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1, \dots, L_d$. Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit $\mathrm{EC}_1, \dots, \mathrm{EC}_d$ bezeichnet.

(a) *[9 Punkte]* Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.

(b) *[13 Punkte]* Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass L_2 log-normal verteilt ist mit Parametern μ_2, σ_2^2, d.h. $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden.

   (i) *[4 Punkte]* Für die copula muss das quantitative Risikomanagement zwischen einem Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) und einem Meta t Modell (basierend auf $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$) wählen. Welche Modellklasse ist (bei gleichem ρ) die konservativere Wahl im Hinblick auf die Modellierung von tail Risiken (Antwort mit kurzer Begründung)?

   (ii) *[2 Punkte]* Geben Sie für fixe Parameter ρ und ν die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im meta t Modell an.

   (iii) *[7 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert und Sie können unabhängig von z_1 und z_2 eine Realisierung v einer gemäß χ_ν^2 verteilte Zufallsvariable V simulieren. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisation $(L_1, L_2)'$ generiert, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.

(c) *[5 Punkte]* Sie haben die folgenden 5 Beobachtungen von L_1 und L_2.

data point	1	2	3	4	5
L_1	-1.05	-0.84	0.20	-0.79	-0.26
L_2	0.26	0.18	0.31	0.34	0.25

   (i) *[3 Punkte]* Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für den Korrelationsparameter ρ von $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$.

   (ii) *[2 Punkte]* Wie könnte der Parameter ν geschätzt werden?

Aufgabe 6. Kreditrisiko. *[15 Punkte]*

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der mit m ausfallbehafteten Rückversicherern $R^1, \ldots, R^m$ Rückversicherungsverträge abgeschlossen hat; mit Ausfallsindikatoren $Y^1, \ldots, Y^m$. Falls Rückversicherer i ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e^i, wobei die Zufallsvariable e^i das exposure gegenüber R^i darstellt.

(a) *[4 Punkte]* Zur Absicherung dieses Risiko könnte der Erstversicherer CDS Kontrakte einsetzen. Diskutieren Sie Vorteile und Probleme einer derartigen Absicherungsstrategie.

(b) *[11 Punkte]* Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Gegenparteirisiko verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle von $R^1, \ldots, R^m$ zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \leq i \leq m\,. \tag{1}$$

(i) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen von $R^1, \ldots, R^m$ erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (1) an.

(ii) *[4 Punkte]* Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}^i = P(Y^i = 1)$ und die Kovarianz $\mathrm{cov}(Y^i, Y^j)$ als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.

(iii) *[4 Punkte]* Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Simulation der Verteilung der Zufallsvariable $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$, die den Gesamtverlust durch Gegenparteirisiko darstellt. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $e^1, \ldots, e^m$ deterministisch sind (deterministisches exposure). Geben Sie in einem ersten Schritt einen Algorithmus der Simulation der Ausfallindikatoren an. Dabei steht Ihnen ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der sowohl normalverteilte als auch Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen simulieren kann.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. *[19 Punkte]* Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß $\mathbb{P}$ im Vasicek-Modell mit den Parametern a, b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Sei ferner λ der Marktpreis des Risikos. Dann folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{(RN)}$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Ein Versicherungsunternehmen hat zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kollektiv von N Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe S mit Fälligkeit im Alter 60 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit einer 50jährigen Person, das Alter 60 zu erreichen, beträgt ${}_{10}p_{50}$. Zur Bedeckung der Zahlungsverpflichtungen für dieses Kollektiv hat das Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Rückstellung in Höhe des Marktwerts der Verpflichtungen gebildet und in einen Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ investiert.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A(t,T) - B(t,T) \cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A(t,T)$ und $B(t,T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T) \cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t,T)$ und $B_\lambda(t,T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $a_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Betrag L der Rückstellung unter der Annahme, dass die tatsächliche Zahl der Toten gleich der erwarteten ist.

(b) *[8 Punkte]* Ermitteln Sie unter der Annahme, dass die tatsächliche Zahl der Toten gleich der erwarteten ist, zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit α ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der Verpflichtungen infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

(c) *[8 Punkte]* Zur Absicherung gegen das Zinsänderungsrisiko bei Wiederanlage der Auszahlung des Zerobonds zum Zeitpunkt 1 erwägt das Versicherungsunternehmen, bei einer Investmentbank eine OTC-Receiver-Swaption mit Fälligkeitszeitpunkt 1, dem **einzigen** Zahlungszeitpunkt $t = 10$ und dem festen Zinssatz $K = F(0, 1, 10)$ über den Nominalbetrag der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds zu kaufen. Dabei bezeichnet $F(0, 1, 10)$ den einfachen Terminzins zum Zeitpunkt 0 für den Zeitraum $[1, 10]$. Beurteilen Sie die Wirksamkeit dieser Strategie. Gehen Sie dabei auf Zinsänderungsrisiko, versicherungstechnisches Risiko und Gegenparteirisiko und deren Zusammenspiel ein.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Fallstudie: Analyse und Kommunikation im Zusammenhang mit einem neu erworbenen Tochterunternehmen.

(a) Regulatorische Standards: Aufgrund des Sitzes in der EU ist Solvency II relevant. Als internationale Gruppe ist nach IFRS zu berichten. Aufgrund der Notierung an der US-Börse ist SOX einschlägig. (3 Punkte)

Weitere Standards: Da COSO-IKS unter SOX als IKS anerkannt ist, wird die Gruppe sich vermutlich an COSO-ERM orientieren. Auch ist davon auszugehen, dass die Gruppe mindestens ein interaktives Rating hat. Die entsprechenden Standards sind zu bedienen. (2 Punkte)

Unter Solvency II sind mindestens die Risikomanagementfunktion (RMF), versicherungsmathematische Funktion (VMF), Compliance-Funktion und interne Revision einzurichten. (4 Punkte)

Das Risikomanagement hat mindestens folgende Bereiche abzudecken (vgl. Artikel 44 SII-Richtlinie):

- Risikoübernahme und Rückstellungsbildung
- Aktiv-Passiv-Management
- Anlagen, insbesondere Derivate und ähnliche Verpflichtungen
- Liquiditäts- und Konzentrationsmanagement
- operationelle Risiken
- Rückversicherung und andere Risikominderungstechniken

(Mindestens 3 nennen; 3 Punkte)

Kernaufgaben des Risikomanagements (Artikel 269 DVO):

- Unterstützung der Geschäftsführung
- Überwachung des Risikomanagementsystems
- Überwachung des allgemeinen Risikoprofils des Unternehmens als Ganzes
- detaillierte Berichterstattung über Risikoexponierungen und Beratung der Geschäftsführung in Fragen des Risikomanagements, unter anderem in strategischen Belangen, die die Unternehmensstrategie, Fusionen und Übernahmen oder größere Projekte und Investitionen betreffen

- Ermittlung und Bewertung sich abzeichnender Risiken („Emerging Risks“).

(Mindestens 3 nennen, 3 Punkte)

(b)
- CEO als OpRisk: Ausrichtung auf eine Person birgt insbesondere hohes Ausfallrisiko und das Risiko, neue Entwicklungen nicht rechtzeitig zu erkennen.
- Ungünstige Bonusregelungen bzw. unangemessene Anreizpolitik: Ausrichtung auf Wachstum und Volumen entsprechen nicht den ERM-Zielen einer risikoorientierten Geschäftspolitik. Ausrichtung der Ziele auf jeweils aktuelles Jahr nicht vereinbar mit nachhaltiger Unternehmensentwicklung und Profitabilität
- Risikomanagement nicht risikoorientiert ausgerichtet, Verankerung im tatsächlichen Geschäft scheint nicht gegeben zu sein.
- Governance-Struktur wenig geeignet: Risikomanagement nicht Kernbestandteil der Prozesse, Vorstand nicht wirklich in gemeinsamer Verantwortung, nicht adäquate ERM Kultur, fehlende interne Kommunikation und Risikobewusstsein auf allen Ebenen.
- Schwächen im Pricing- und Entwicklungsprozess: Produktgestaltung bei Industriegeschäft, Markt/Wettbewerb bei Privatkunden

(c)
- alte Verträge anpassen (andere Bonusregelung), insbesondere ausrichten auf Risiko und langfristige Profitabilität, Ziele auf drei bis fünf Jahre ausrichten
- Risikomanagement adäquater ausrichten: Schwerpunkte in operativem Versicherungsgeschäft sowie im Kapitalanlageprozess. In letzterem entweder kurzfristig Know-How bzgl. der innovativen Kapitalanlageprozesse schaffen oder Kapitalanlagestrategie konservativer ausrichten.
- Voraussetzungen für eine bessere ERM Kultur schaffen inkl. verbessertem Informationsfluss, Risikomanagement und Risikokennzahlen als Kernbestandstandteil der Unternehmenssteuerung stärken
- Erarbeitung einer angemessenen Governance-Struktur, ggf. CEO auswechseln und zumindest alte Seilschaften aufbrechen, Komitee-Lösungen schaffen, Vorstandsbereich des CEO aufteilen, Verantwortung für Versicherungsgeschäft und Risikomanagement in unterschiedlichen Ressorts
- Erarbeitung angemessener Reaktion im Privatmarkt, Produktanpassung im Industriebereich, Verbesserung der Ergebnissituation, Rückversicherungslösungen für bestehende Deckungen prüfen

- Überprüfung aller Prozesse auf SOX-Compliance.
- Integration in die Berichterstattung nach IFRS.

(d) In Fällen, in denen ungünstige, negative unternehmensinterne Vorgänge mit Wirkung auf Ergebnis und öffentlicher Wahrnehmung nach außen nicht kommuniziert wurden, zeigt die Erfahrung, dass dies nur kurzfristig Probleme wie etwa Absturz des Aktienkurses vermeidet, mittel- bis längerfristig aber zu größeren Schwierigkeiten führt. Daher empfiehlt sich eine offene Darstellung.

(e) Cyber-Risk ist zwar mittlerweile als Risiko bekannt, auf Grund der schnell und stark zunehmenden Bedeutung im Zuge der fortschreitenden Digitalisierung sollten die Entwicklungen speziell und enger erfasst werden als bei anderen Risiken, Zuständige sollten regelmäßig weitergebildet werden. Austausch in externen Arbeitsgruppen, mit Rückversicherungen, etc. ist anzustreben.

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung.

(a) Die Leistung des Rückversicherers hat die Verteilung

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 500) = 0.02.$$

Wegen $\mathbb{P}(Y_1 < 200) = 0.8 < 0.97 < 0.98 = \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)$ gilt $VaR_{0.97}(Y_1) = 200$. Ferner ist

$$ES_{0.97} = \frac{1}{1-0.97}\int_{0.97}^{1} VaR_z(Y_1)\,dz = \frac{200\cdot 0.01 + 500\cdot 0.02}{0.03} = 400.$$

(b) Die erwartete Rückversicherungsleistung beträgt $\mathbb{E}(Y_1) = 200\cdot 0.18 + 500\cdot 0.02 = 46$, die Prämie $P = 1.2\cdot 46 = 55.2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} RORAC_1 &= \frac{P-\mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1-P)} = \frac{55.2-46}{200-55.2} = 0.0635, \\ RORAC_2 &= \frac{P-\mathbb{E}(Y_1)}{ES_{0.97}(Y_1-P)} = \frac{55.2-46}{400-55.2} = 0.0267, \end{aligned}$$

(c) Wird zusätzlich X_2 rückversichert, so wird die Gesamtleistung des Rückversicherers $Y_1 + Y_2$ durch folgende Verteilung beschrieben:

z	$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$
0	$0.8^2 = 0.64$
200	$2\cdot 0.8\cdot 0.18 = 0.288$
400	$0.18^2 = 0.0324$
500	$2\cdot 0.8\cdot 0.02 = 0.032$
700	$2\cdot 0.18\cdot 0.02 = 0.0072$
1000	$0.02^2 = 0.0004$

Mit Hilfe der Definitionen bestimmen wir $VaR_{0.97}(Y_1+Y_2)=500$ und $ES_{0.97}(Y_1+Y_2)=\frac{1}{0.03}(500\cdot 0.0224+700\cdot 0.0072+1000\cdot 0.0004)=554.67$. Daraus folgen die neuen Kennzahlen $RORAC_1=\frac{2\cdot 9.2}{500-2\cdot 55.2}=0.0472$, der niedriger ausfällt als vorher, und $RORAC_2=\frac{2\cdot 9.2}{554.67-2\cdot 55.2}=0.0414$, der höher ausfällt als vorher.

Bei Verwendung von $RORAC_1$ wird der Rückversicherer auf die neue Geschäftsmöglichkeit und damit auf zusätzlichen Ertrag und auf die Diversifikation durch ein unabhängiges neues Risiko verzichten.

Die Steuerung durch den $RORAC_1$ schafft also hier einen falschen Anreiz. Grund dafür ist, dass sich das Risikomaß $VaR_{0.97}$ in dieser Situation als nicht subadditiv erweist.

Im Gegensatz dazu ist der Expected Shortfall subadditiv, so dass die Steuerung durch den $RORAC_2$ die Gelegenheit zur Diversifikation ergreift und mit der Versicherung von Y_2 einen zusätzlichen Ertrag erwirtschaftet.

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko.

(a) Die bedingte Verteilung von $X \mid \Theta = 2$ ist $LN(2,4)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = \exp(2 + 2\cdot\Phi^{-1}(0.97)) = 317.85$.

Die unbedingte Verteilung von X ist nach dem Hinweis $LN(2, 4+1)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X) = \exp(2+\sqrt{5}\cdot\Phi^{-1}(0.97)) = 495.51$.

Die Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = 177.66$ reflektiert eine Schätzung des Parameterrisikos, da die Unsicherheit bezüglich des Parameterwertes nur in die unbedingte Verteilung einfließt.

(b) Bis auf eine Konstante ist die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta|x_1,x_2,x_2,\ldots,x_n)\\
&\propto\ f_\Theta(\theta)\cdot\prod_{i=1}^n f_{X|\Theta}(x_i|\theta)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)\cdot\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(\ln(x_i)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\theta^2+\frac{n\theta^2}{4}\right)-2\theta\left(2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right]\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta^2-2\theta\left(\frac{8}{4+n}+\frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right)\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta-\left(\frac{8}{4+n}+\frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) Die Vorhersageverteilung von X ergibt sich durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte des Parameters. Daher folgt das Resultat unmittelbar aus b) und dem Hinweis.

(d) Für $n \to \infty$ erhalten wir folgende Grenzwerte für die Parameter der Vorhersageverteilung:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \mathbb{E}(\ln(X)) =: \theta^*,\\ \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{4+n}\right) &= 4.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Konvergenz des Value at Risk der Vorhersageverteilung

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sqrt{4 + \frac{4}{4+n}}\cdot\Phi^{-1}(\alpha)\right) = \exp\left(\theta^* + 2\cdot\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

gegen den Value at Risk der Schadenhöhenverteilung bei Kenntnis des wahren Parameters θ^*.

Die Varianz $\frac{4}{4+n}$ der a posteriori Verteilung des Parameters geht gegen 0, so dass keine Parameterunsicherheit vorliegt.

Der erste Parameter der Vorhersageverteilung konvergiert gegen θ^*, den wahren Parameter der Schadenhöhenverteilung. Eine eventuell verzerrte a priori Verteilung auf Basis der Experteneinschätzungen spielt keine Rolle mehr. Die Information der unendlich vielen Beobachtungen ermöglicht die Korrektur auf den wahren Wert.

Der zweite Parameter konvergiert gegen 4, den Wert der bedingten Beobachtungsverteilung. Es liegt keine zusätzliche Unsicherheit über den Parameter mehr vor.

In der Praxis ist fraglich, ob genügend Daten beobachtet werden können, um in die Nähe des asymptotischen Verhaltens zu kommen. Zudem können Änderungen in der Zeit und Strukturbrüche die Konvergenzen stören.

Aufgabe 4. Extremwerttheorie.

(a) EVT bietet einen systematischen, theoriebasierten Ansatz zur Schätzung von Rändern von Verteilungen in Situationen, in denen auf Grund von nicht ausreichenden Daten die empirische Verteilungsfunktion als Approximation für tail Wahrscheinlichkeiten nicht ausreicht. Mögliche Anwendungen: Bewertung von

Rückversicherungsverträgen (excess of loss); Bestimmung von Risikomaßen im tail einer Verlustverteilung (verschiedene andere Antworten sind auch möglich).

b) i) Die excess Verteilung wird am besten mit Hilfe ihrer Überlebensfunktion $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u) = \bar{F}(x+u)/\bar{F}(u)$ bestimmt. Für die GPD gilt $\bar{F}_{\xi,\beta}(x) = \left(1 + \xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, so dass wir

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\bar{F}(x+u)}{\bar{F}(u)} = \left(\frac{1 + \xi\frac{u}{\beta} + \xi\frac{x}{\beta}}{1 + \xi\frac{u}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \left(1 + \xi\frac{x}{\beta(1 + \xi\frac{u}{\beta})}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

erhalten. Folglich ist die excess Verteilung eine GPD-Verteilung mit Parametern ξ und $\tilde{\beta}(u) = \beta + \xi u$.

ii) Es gilt, da X eine stetige Verteilung hat,

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + E(X - \mathrm{VaR}_\alpha \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + e(\mathrm{VaR}_\alpha)\,.$$

c) Für eine sehr große Klasse von Verteilungen ist die GPD die Grenzverteilung der excess Verteilung für $u \to \infty$ und daher die natürliche Wahl bei der Modellierung von excess Verteilungen über große Schranken. Man hat für $x > u$ die Darstellung $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$. Falls u groß, aber nicht sehr groß ist, kann $\bar{F}(u)$ einfach durch den Prozentsatz der Daten größer als u geschätzt werden (empirische Überlebensfunktion). Die excess-Verteilung wird durch GPD-Verteilung modelliert, die Parameter ξ und β können etwa durch Maximum Likelihood bestimmt werden. Das Hauptproblem - insbesondere bei knapper Datenlage - ist die Wahl der Schranke u (tradeoff zwischen bias und Varianz).

Aufgabe 5. Risikoaggregation und copulas.

(a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht principles based, keine Berücksichtigung von Diversifikation.

- Correlation adjusted summations $\mathrm{EC} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij}\,\mathrm{EC}_i\,\mathrm{EC}_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteil: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.

- Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteil: Modellrisiko bei Wahl der copula, schwer zu erklären.
- Structural Models (factor based) Vorteil: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht natürlich. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.

(b) (i) Die t copula ist wegen der 'eingebauten' tail dependence konservativer.

(ii) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}\Big(\phi((\ell_1 - \mu_1)/\sigma_1), \phi((\log \ell_2 - \mu_2)/\sigma_2)\Big)$.

(iii) Schritt 1: Konstruktion von t^ν_ρ verteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $w = \nu/\mathrm{v}$ und $x_1 = \sqrt{w} z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2)$.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Setze $(u_1, u_2) = (t^{-1}_\nu(x_1), t^{-1}_\nu(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2 ist durch $u \mapsto= \exp(\sigma\phi^{-1}(u) + \mu)$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\ell_1, \ell_2) = \left(\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\left(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)\right)\right)$$

die gewünschten Realisierungen.

(c) Man erhält für Kendalls tau, dass $\hat{\rho}_\tau = 0.2$ und somit $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_\tau) = 0.31$. ν kann dann mit MLE geschätzt werden.

Aufgabe 6. Kreditrisiko und Gegenparteirisiko

(a) i) Vorteile: Die Auszahlung des CDS wird genau dann fällig, wenn Verluste durch Gegenparteirisiko eintreten; der Erstversicherer kann die Absicherungsstrategie unilateral einsetzen (ohne Mitwirkung des Rückversicherers).

ii) mögliche Probleme: Höhe des Verlustes durch Gegenparteirisiko (und damit Höhe der benötigten Absicherung) unbekannt; Basisrisiko; fehlende Liquidität am CDS Markt.

(b) (i) Abhängigkeit kann beispielsweise entstehen durch Eintreten eines Katastrophenereignisses, das von mehreren Rückversicherern abgedeckt wird, oder durch schlechte Entwicklung der Finanzmärkte (Auswirkung auf die asset-Seite der Bilanz).

(ii) Es gilt $\bar{p}^i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\, dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Für die Kovarianz gilt

$$\mathrm{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}^i \bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\, dx - \bar{p}^i \bar{p}^j\,.$$

(iii) Zur Erzeugung einer Realisierung von $Y^1, \ldots, Y^m$ generiert man zunächst $\psi \sim N(0,1)$ und dann m unabhängige Bernoulli- Zufallsvariablen $Y^1, \ldots, Y^m$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_i(\psi)$. Der zugehörige Verlust ergibt sich dann als $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$. N mal unabhängiges Wiederholen ergibt dann eine Approximation der Verteilung von L.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass mit der erwarteten Anzahl der Überlebenden $N \cdot {}_{10}p_{50}$ gerechnet wird. Der Marktwert der Verpflichtungen ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} L &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(0,10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,10) - B_\lambda(0,10) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

(b) Auf Grund der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ist das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten aus dem alleinigen Treiber eines Zinsrückgangs zu bestimmen. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit t ist dann gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot D(t,10).$$

Das α-Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das $1-\alpha$-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß erhalten wir als $1-\alpha$- Quantil

$$r_{1-\alpha}(1) = \mathbb{E}(a(1)) + \sqrt{b(1)} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten unter dem risikoneutralen Maß

$$\begin{aligned} MV_\alpha(1) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(PV(1) \mid r_{1-\alpha}(1)\right) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20) \cdot r_{1-\alpha}(1)\right). \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit α puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\Delta MV) = MV_\alpha(1) \cdot P(0,1) - L$$

mit dem Zerobondpreis $P(0,1) = \exp\left(-A_\lambda(0,1) - B_\lambda(0,1)\right)$ zu stellen.

(c) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds beträgt

$$Nom := \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot P(0,10)}{P(0,1)} = \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}}{1 + 9F(0,1,10)}.$$

Dies ist der Nominalbetrag der Receiver-Swaption, die das Versicherungsunternehmen kauft.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 9 und Nominalbetrag

$$Nom_1 := \frac{Nom}{P(1,10)} = Nom \cdot (1 + 9L(1,10))$$

kaufen.

Im Zinsanstiegsszenario gilt $L(1,10) > F(0,1,10)$, so dass die Versicherungsverpflichtungen bedeckt sind: $Nom_1 > S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}$. Die Receiver-Swaption ist wertlos.

Im Zinsrückgangsszenario ergeben die Zahlungen der Zerobonds und der Receiver-Swaption zum Zeitpunkt 10 zusammen den erwarteten Wert der Versicherungsverpflichtungen:

$$\begin{aligned} Nom_1 + Nom \cdot 9 \cdot (F(0,1,10) - L(1,10)) &= Nom \cdot (1 + 9F(0,1,10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \end{aligned}$$

Die Receiver-Swaption eliminiert das Zinsänderungsrisiko insoweit, dass sie den Terminzins $F(0,1,10)$ als Mindestverzinsung in der Periode $[1,10]$ garantiert. In Abhängigkeit vom Verlauf des versicherungstechnischen Risikos kann der Nominalbetrag der Receiver-Swaption jedoch zu hoch oder zu niedrig sein, d.h. es liegt keine perfekte Absicherung gegen fallende Zinsen vor.

Ferner ist das Versicherungsunternehmen dem Ausfallrisiko der Gegenpartei der Swaption ausgesetzt, da die Swaption über die lange Laufzeit OTC abgeschlossen wird.

Written exam CERA module A

Foundations and Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.1
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

12 June 2020

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 10 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Only write your answers on the answer papers provided. Answers that are written on the question paper will not be marked / assessed.

Examination board members:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey, Dr. I. Merk,
E. Müller, Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Question 1. Case Study – Analysis and communication in connection with a newly acquired subsidiary. *[60 points]*

Situation: A major international insurer wants to diversify geographically and has therefore acquired a new subsidiary in a country in which it has thus far had no activities.

The subsidiary writes property / casualty insurance for retail and commercial customers with the former being profitable and the latter not. Given the company's volume targets it, however, does not intend to exit this line of business.

The CEO and much of the management have been with the company for a long time and have old contracts. The same is true for the bonus agreements of the management of the subsidiary, which are mainly geared towards growth, size and market share in the respective current financial year.

In terms of sales the subsidiary has been successful for years. The CEO is a charismatic and, as a result of his success, a rather dominant figure. As a consequence of this there has been little criticism nor questioning of his conduct.

Risk Management (RM) exists but mainly deals with less important issues such as travel expenses etc. Risk management, internal audit and underwriting are located in the division headed by the CEO.

The new parent company has now identified certain problems since, owing to keen price competition, the retail business is coming under considerable pressure and the commercial business is making more losses as a result of silent cyber cover, meaning that overall results are much weaker and tending towards losses. There are indications that the company is looking to compensate for poor profitability in its core business by means of "innovative" investment products.

Furthermore, the parent company has gained the impression that the flow of information at the subsidiary is being very strongly managed and that there is a distinct lack of openness and transparency – both towards the parent company and internally.

Thus the parent company has hired you as an external consultant to analyse the situation in the subsidiary and to make recommendations on possible improvements to the subsidiary's ERM, which will be necessary given its current performance.

Both parent company and subsidiary are headquartered within the European Union. The parent company is listed on the American stock exchange though the subsidiary is not. And to date the subsidiary has only produced its financial accounts in accordance with local GAAP / law.

(a) *[15 points]* List three regulatory standards to which the parent company and thus possibly the subsidiary are subject. Which further standards could be relevant? Which governance functions would you expect as a minimum? Under these legal requirements which areas should the risk management system cover? What are the central tasks of risk management?

(b) *[15 points]* On the basis of the information in the case study what potential problems do you identify in the subsidiary's ERM? Give three examples.

(c) *[20 points]* If your expectations are confirmed what recommendations for changes would you make? Please make particular reference to: remuneration, risk management, governance and risk culture as well as business focus.

(d) *[5 points]* What principles should be applied when it comes to general communication outside the company. Give reasons for your answer.

(e) *[5 points]* The extent and characteristics of cyber risk are currently still developing. What principles for measures concerning processes and controls would you recommend to the company?

Question 2. Risk Measures and Management. *[21 points]* Suppose that a reinsurer calculates its premiums as 1.2 times the expected claim payments and uses the performance measure RORAC for steering its business activities. For simplification, assume that the reinsurer incurs no costs.

(a) *[6 points]* The reinsurer has already assumed the payment obligation $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$, where the claim variable X_1 has the following distribution:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1500) = 0.02.$$

Choosing the confidence level 0.97, compute the Value at Risk and the Expected Shortfall of Y_1.

(b) *[5 points]* For both risk measures from (a), compute the performance measure RORAC, i.e., $RORAC_1$ with respect to $VaR_{0.97}$ and $RORAC_2$ with respect to $ES_{0.97}$.

(c) *[10 points]* The reinsurer has the opportunity of writing a second risk $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$, where the claim variable X_2 is independent of X_1 and has the same distribution as X_1. For each of the two variants, i.e. for $RORAC_1$ and $RORAC_2$, examine whether the reinsurer takes this opportunity, i.e. whether it prefers the distribution of $Y_1 + Y_2$ to the distribution of Y_1. Analyze the decision of the reinsurer arguing both from the perspectives of risk and yield and explain, what property of the quantities involved leads to this decision.

Question 3. Risk Measures and Parameter Risk. *[24 points]* An insurance company introduces a policy protecting against an emerging risk. Since there is no claims experience available, the company opts for a Bayesian model to price the policy. It makes the following assumptions.

- The claim size X, given the value θ of the unknown parameter Θ, is supposed to be $LN(\theta, 4)$-distributed.
- Based on expert judgement on the emerging risk, the prior distribution of the parameter Θ is supposed to be $\mathcal{N}(2, 1)$.

Hint.

- The lognormal distribution $LN(\theta, \sigma^2)$ has the density

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

  and the expected value $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.
- If $X|\Theta = \theta \sim LN(\theta, \sigma^2)$ and $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, then the unconditional distribution of X is $LN(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.
- quantile of the standard normal distribution: $\Phi^{-1}(0.97) = 1.880794$

(a) *[6 points]* For the confidence level 0.97, determine the Value at Risk of the unconditional distribution of X and the Value at Risk of the conditional distribution of X, given $\Theta = 2$. Explain the difference $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2)$ from an economic perspective.

(b) *[8 points]* Show that the posterior distribution of Θ, given the observed claim sizes $x_1, \ldots, x_n$, is given by $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) *[2 points]* Give a short explanation why the predictive distribution of X, given $x_1, \ldots, x_n$, is equal to $LN\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), 4 + \frac{4}{4+n}\right)$.

(d) *[8 points]* Analyze the asymptotic behaviour of the Value at Risk of the predictive distribution at the confidence level 0.97 for $n \to \infty$ and state a short economic interpretation for that behaviour. What difficulties might arise in practice that could undermine this interpretation?

Question 4. Extreme Value Theory (EVT). *[14 points]*

(a) *[3 points]* "EVT is a useful tool for actuarial risk management". Briefly explain this statement using a risk management problem of your choice from the fields of ERM or non life insurance.

(b) *[5 points]* Given a random variable X and $u \in \mathbb{R}$ with $P(X > u) > 0$, the excess distribution with threshold u has survivor function $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u)$, $x \geq 0$; if $E(|X|) < \infty$ the mean excess function $e(u)$ is defined as the expected value of the excess distribution with threshold u.

(i) *[2 points]* Determine the excess distribution for the generalized Pareto distribution (GPD). (The GPD-with parameters ξ, β has survival function $\bar{F}_{\xi,\beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, $x > 0$.)

(ii) *[3 points]* Show that for a random variable X with continuous distribution the following relation between VaR, ES and the mean excess function holds:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = e(\mathrm{VaR}_\alpha(X)) + \mathrm{VaR}_\alpha(X), \quad \alpha \in (0,1).$$

(c) *[6 points]* Briefly discuss the role of the GPD for the peaks over threshold (POT) method in EVT and explain the main idea underlying the corresponding tail estimator. Discuss potential problems for the use of the method with real data.

Question 5. Risk Aggregation and Copulas. *[27 points]* Consider an insurance company with d business units and associated loss $L_1, \dots, L_d$. The risk capital of the business units is denoted by $\mathrm{EC}_1, \dots, \mathrm{EC}_d$.

(a) *[9 points]* Discuss three methods for determining the aggregated risk capital EC and discuss pros and cons of each method.

(b) *[13 points]* For simplicity, we restrict ourselves to $d = 2$ business units in the sequel. Assume that $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and that L_2 is log-normally distributed with parameters μ_2, σ_2^2, that is $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. For risk aggregation the company wants to use the copula approach.

(i) *[4 points]* In choosing the copula the risk management team has to decide between a meta Gauss model (based on the Gauss copula C_ρ^{Ga}) and a meta t model (based on $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$). Which model class is more conservative with respect to the modelling of tail risk (for equal ρ)? Please justify your answer briefly.

(ii) *[2 points]* Give for fixed parameters ρ and ν the distribution function $F_{\mathbf{L}}$ of $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ in the meta t model.

(iii) *[7 points]* You have a random number generator at your disposal that generates independent realisations z_1, z_2 of a one-dimensional standard normal distribution and you are able to generate independently of z_1 and z_2 a realisation v of a random variable $V \sim \chi_\nu^2$. Develop an algorithm for generating a realisation $(L_1, L_2)'$ that is distributed according to $F_{\mathbf{L}}$.

(c) *[5 points]* You have the following 5 observations of L_1 and L_2 at your disposal.

data point	1	2	3	4	5
L_1	-1.05	-0.84	0.20	-0.79	-0.26
L_2	0.26	0.18	0.31	0.34	0.25

(i) *[3 points]* Compute Kendalls τ and an estimator for the correlation parameter ρ of $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$.

(ii) *[2 points]* How could one estimate the parameter ν?

Question 6. Credit Risk *[15 points]*

Consider an insurance company I that has entered into reinsurance contracts with m defaultable reinsurance companies $R^1, \dots, R^m$; the associated default indicators are denoted $Y^1, \dots, Y^m$. In case that reinsurer i defaults ($Y^i = 1$), the insurer I suffers a loss of size e^i, where the random variable e^i represents the exposure of I towards the reinsurer R^i.

(a) *[4 points]* In order to hedge this risk, I could use credit default swaps (CDS). Discuss pros and cons of such a hedging strategy.

(b) *[11 points]* I uses a probit-normal Bernoulli mixture model to compute the economic capital for counterparty credit risk and to model the joint distribution of the defaults of $R^1, \dots, R^m$. It is assumed that the conditional default probability equals

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ for } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,. \tag{1}$$

(i) *[3 points]* Discuss economic reasons for dependence between the defaults of $R^1, \dots, R^m$, and provide an intuitive motivation for the model (1).

(ii) *[4 points]* Represent the default probability $\bar{p}^i = P(Y^i = 1)$ and the covariance $\mathrm{cov}(Y^i, Y^j)$ as integral with respect to the distribution of ψ.

(iii) *[4 points]* Develop an algorithm for simulating the random variable $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$ describing the loss due to counterparty risk. Assume for simplicity that $e^1, \dots, e^m$ are deterministic. Describe as a first step an algorithm for simulating the default indicators, assuming that you have a random number generator at your disposal that is able to generate standard normal random variables and Bernoulli random variables.

Question 7. Interest rate risk and term structure models. *[19 points]* The short rate $r(t)$ is supposed to follow the Vasicek model with parameters a, b and σ under the real world measure $\mathbb{P}$:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Further, assume that λ is the market price of risk. Then, under the risk neutral measure $\mathbb{Q}$, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{(RN)}$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

At time $t = 0$, consider a portfolio of N insured persons aged 50 that hold a paid-up pure endowment policy paying the sum S at the age of 60. Suppose that the probability of reaching the age of 60 is ${}_{10}p_{50}$. In order to cover the obligation to pay out the insurance benefits, the insurance company has built a provision at time $t = 0$ that equals the market value L of the liabilities and invested L in a zero bond with maturity $T = 1$.

Hint. In the Vasicek model, the expected value of the stochastic discounting factor $D(t, T)$ is given by:

- under the **real world measure**:

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A(t,T)$ and $B(t,T)$,

- under the **risk neutral measure**:

  $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A_\lambda(t,T) - B_\lambda(t,T)\cdot r(t)\right)$$

  with deterministic functions $A_\lambda(t,T)$ and $B_\lambda(t,T)$.

Further, the short rate follows a normal distribution:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ with deterministic functions $a(t)$ and $b(t)$ under the **real world measure**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ with deterministic functions $a_\lambda(t)$ and $b_\lambda(t)$ under the **risk neutral measure**.

(a) *[3 points]* Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, determine the amount L of the provision.

(b) *[8 points]* Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number, determine the amount of risk capital at time 0 that is needed in order to buffer the potential increase in insurance liabilities at time 1 due to interest rate risk with probability α.

(c) *[8 points]* In order to protect against changes in interest rate occuring at the reinvestment date, the insurance company considers buying an OTC-receiver swaption, whose nominal amount equals the nominal amount of the zero-coupon bonds maturing at $t = 1$, from an investment bank. The swaption has maturity 1. Its **unique** payment date is $t = 10$ and the fixed interest rate is $K = F(0, 1, 10)$, the simply-compounded forward rate for the time interval $[1, 10]$. Analyze the efficiency of this protection strategy evaluating interest rate risk, insurance risk, counterparty risk and discussing their interplay.

Proposal for solution

Question 1. Case study – Analysis and communication in connection with a newly acquired subsidiary.

(a) Regulatory standards: Because the companies are headquartered in the EU Solvency II is relevant. As an international Group reporting should be done using IFRS. The US stock exchange listing means that SOX is relevant. (3 points)

Further standards: Since SOX recognises the COSO Internal Control System (ICS) as an ICS the Group will probably apply COSO-ERM. One can also assume that the Group will have at least one interactive rating. The appropriate standards should be used. (2 points)

Solvency II requires a company to create a Risk Management Function (RMF), Actuarial Function (AF), a Compliance Function and an Internal Audit Function. (4 points)

Risk management should cover at least the following areas (cf. Article 44 of the SII Directive):

- Underwriting and reserving
- Asset–liability management
- Investment, in particular derivatives and similar commitments
- Liquidity and concentration risk management
- Operational risk management
- Reinsurance and other risk mitigation techniques

(List at least 3; 3 marks)

Core tasks of risk management (as per Article 269: Commission Delegated Regulation):

- Assisting the administrative, management or supervisory body;
- Monitoring the risk management system;
- Monitoring the general risk profile of the undertaking as a whole;
- Detailed reporting on risk exposures and advising the administrative, management or supervisory body on risk management matters, including in relation to strategic affairs such as corporate strategy, mergers and acquisitions and major projects and investments;

- Identifying and assessing emerging risks.

(List at least 3, 3 marks)

(b)
- CEO as an Operational Risk: Concentration in one person brings, in particular, a high default risk if anything befalls that person as well as the risk of new developments not being recognised in time.
- Bonus arrangements are not ideal / inappropriate incentive policy: the fact that it is geared towards growth and volume does not correspond to the ERM targets of a risk-based business policy. The fact that targets are geared towards the current financial year is not compatible with sustainable business development and profitability.
- Risk management not risk-based, does not appear to be embedded in actual business.
- Governance structure is not ideal: risk management is not a core component of processes, Board does not really have joint responsibility, inappropriate ERM culture, lack of internal communication and poor awareness of risk at all levels.
- Weaknesses in the pricing and development process: product design in commercial lines, market / competition in retail business

(c)
- Adapt old contracts (different bonus arrangements), in particular gear them towards risk and long-term profitability; set targets at three to five years
- Redesign Risk Management more appropriately: focus on operative underwriting business as well as on the investment process. In terms of the latter, either buy in know-how for the short term to support the "innovative" investment processes or make the investment strategy more conservative.
- Create conditions for a better ERM culture including improved flow of information, strengthen risk management and risk indicators to become core components of enterprise management and steering
- Develop an appropriate governance structure, possibly replace the CEO and break up the existing system whereby managers make use of internal connections / ("old-boy network"), create committee-based solutions, split up the Division headed by the CEO, place responsibility for underwriting and risk management in different Divisions
- Develop an appropriate response for the retail market, product modifications in the commercial lines, improve results, examine reinsurance solutions for existing coverage

- Review all processes for SOX compliance.
- Integrate in IFRS reporting.

(d) In cases where unfavourable, negative internal company processes impacting on results and public perception have not been communicated outside the company, experience has shown that this only avoids short-term problems such as a drop in the share price but in the medium to long term results in greater difficulties. Therefore, a more open communication approach is recommended.

(e) Cyber risk has meanwhile been recognised as a risk; because of its rapidly growing significance as a result of digitalisation, developments should be monitored specially and more closely than those for other risks; staff responsible for cyber risk should undergo regular training. Exchanging experience and best practice in external working groups, with reinsurers etc is recommended.

Question 2. Risk Measures and Management.

(a) The claim payment of the reinsurer has the distribution

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 500) = 0.02.$$

Because of $\mathbb{P}(Y_1 < 200) = 0.8 < 0.97 < 0.98 = \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)$, it holds that $VaR_{0.97}(Y_1) = 200$. Furthermore, we get

$$ES_{0.97}(Y_1) = \frac{1}{1-0.97}\int_{0.97}^{1} VaR_z(Y_1)\,dz = \frac{200 \cdot 0.01 + 500 \cdot 0.02}{0.03} = 400.$$

(b) The expected claim payment equals $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 500 \cdot 0.02 = 46$, the premium $P = 1.2 \cdot 46 = 55.2$. It follows that

$$\begin{aligned} RORAC_1 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{200 - 55.2} = 0.0635, \\ RORAC_2 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{ES_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{400 - 55.2} = 0.0267. \end{aligned}$$

(c) If, in addition, the reinsurer enters the contract on the risk X_2, its total claim payment $Y_1 + Y_2$ has the distribution:

z	$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$
0	$0.8^2 = 0.64$
200	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$
400	$0.18^2 = 0.0324$
500	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$
700	$2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$
1000	$0.02^2 = 0.0004$

Using the definition, we determine $VaR_{0.97}(Y_1+Y_2) = 500$ and $ES_{0.97}(Y_1+Y_2) = \frac{1}{0.03}(500\cdot 0.0224 + 700\cdot 0.0072 + 1000\cdot 0.0004) = 554.67$. This entails the new figures $RORAC_1 = \frac{2\cdot 9.2}{500-2\cdot 55.2} = 0.0472$ that turns out to be lower than before. and $RORAC_2 = \frac{2\cdot 9.2}{554.67-2\cdot 55.2} = 0.0414$, that turns out to be higher than before.

When using $RORAC_1$, the reinsurer abstains from the new business opportunity, thus renouncing the additional profit and the diversification effect arising from the new independent risk.

Management based on $RORAC_1$ follows a wrong incentive in this situation. The reason for that is that the risk measure $VaR_{0.97}$ fails to be subadditive.

On the contrary, Expected Shortfall is subadditive. When using $RORAC_2$, the management seizes the opportunity of gaining an additional profit and achieving a higher degree of diversification by entering the new contract Y_2.

Question 3. Risk Measures and Parameter Risk.

(a) The conditional distribution of $X \mid \Theta = 2$ is $LN(2,4)$. Its Value at Risk is given by $VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = \exp(2 + 2\cdot\Phi^{-1}(0.97)) = 317.85$.

Die unconditional distribution of X is $LN(2, 4+1)$ according to the hint. Its Value at Risk is given by $VaR_{0.97}(X) = \exp(2 + \sqrt{5}\cdot\Phi^{-1}(0.97)) = 495.51$.

The difference $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = 177.66$ reflects an estimation of the parameter risk, since the uncertainty about the parameter value is only captured by the unconditional distribution.

(b) Up to a constant, the posterior density of Θ, given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, is given by

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta|x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n)\\
&\propto\ f_\Theta(\theta)\cdot\prod_{i=1}^{n} f_{X|\Theta}(x_i|\theta)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta-2)^2\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{(\ln(x_i)-\theta)^2}{2\cdot 4}\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\theta^2 + \frac{n\theta^2}{4}\right) - 2\theta\left(2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)\right]\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)\right)\right)\\
&\propto\ \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta - \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Up to a constant, this is the density of $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) The predictive distribution of X is obtained by averaging the sample density over the posterior density of the parameter. Therefore, the result immediately follows from part b) and the hint.

(d) For $n \to \infty$, we obtain the following limits for the parameters of the predictive distribution:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{4+n}+\frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=\mathbb{E}(\ln(X)) =: \theta^*, \\ \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{4+n}\right) &= 4. \end{aligned}$$

It follows that the Value at Risk of the predictive distribution converges to the Value at Risk of the claim size distribution with the true parameter θ^*:

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{8}{4+n}+\frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)+\sqrt{4+\frac{4}{4+n}}\cdot\Phi^{-1}(\alpha)\right)=\exp\left(\theta^*+2\cdot\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

The variance $\frac{4}{4+n}$ of the posterior distribution of the parameter converges to 0, such that parameter uncertainty vanishes.

The first parameter of the predictive distribution converges to θ^*, which is the true parameter of the claim size distribution. A possibly biased prior distribution based on the expert judgements gets irrelevant in the limit. The information provided by the infinitely many observations allows to deduce the true value of the parameter.

The second parameter converges to 4, the value of the conditional sample distribution. There is no longer any additional uncertainty about the parameter.

In practice, it might be questionable whether enough data could be observed to ensure that the predictive distribution may be considered to model a close approximation to the asymptotic behaviour. Furthermore, trends and change points might disturb the above convergences.

Question 4 EVT.

(a) EVT provides a systematic and theory-based approach for estimating tails of distributions in situations where the empirical distribution function is not sufficient as approximation for tail probabilities due to insufficient data. Potential applications: valuation of reinsurance claims (excess of loss); computation of risk measures in the tail of a loss disribution (other answers are possible as well).

b) i) The excess function is characterized in terms of its survivor function $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u) = \bar{F}(x+u)/\bar{F}(u)$. For the GPD it holds that $\bar{F}_{\xi,\beta}(x) = \left(1 + \xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, which leads to

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\bar{F}(x+u)}{\bar{F}(u)} = \left(\frac{1+\xi\frac{u}{\beta}+\xi\frac{x}{\beta}}{1+\xi\frac{u}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \left(1+\xi\frac{x}{\beta(1+\xi\frac{u}{\beta})}\right)^{-\frac{1}{\xi}} .$$

Hence the excess distribution is again a GPD, but with 'new' parameters ξ and $\tilde{\beta}(u) = \beta + \xi u$.

ii) Since X has a continuous distribution it holds that

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + E(X - \mathrm{VaR}_\alpha \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha + e(\mathrm{VaR}_\alpha).$$

c) For a big class of distributions the GPD is the limiting distribution of the excess distribution as $u \to \infty$ and hence the natural choice for modelling the excess distribution for large thresholds u. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$. For u moderately large $\bar{F}(u)$ can be estimated by the percentage of data exceeding u (empirical survival function). The excess distribution is then modelled as a GPD; the parameters ξ and β can be determined by Maximum Likelihood. The main problem, in particular with scarce data is the choice of the threshold u (tradeoff between bias and variance).

Question 5. Risk Aggregation and Copulas.

(a) Denote by EC_i the risk capital of subunit i and by EC the overall capital. Different possibilities for risk aggregation: (3 are sufficient)

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$. Advantages: Simple, conservative, at least if EC_i is computed using a subadditive risk measure. Drawbacks: not principles based, diversification is not taken into account.

- Correlation adjusted summations

$$\mathrm{EC} = \Big(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\rho_{ij}\mathrm{EC}_i\mathrm{EC}_j\Big)^{\frac{1}{2}},$$

  where ρ_{ij} is often interpreted as *correlation* of L_i and L_j. Pro: simple, diversification is taken into account. Con: in general not principles based; correlations are hard to determine and need to satisfy consistency conditions.

- Copula methods. Pro: principles-based. Con: model risk in choosing the copula and its parameters, harder to communicate.

- Structural Models (factor based). Pro: principles based, natural from an economic point of view. Con: very complex in practical applications.

(b) (i) The t copula is more conservative due to tail dependence.

(ii) According to Sklar's theorem it holds that

$$F_{\mathbf{L}}(\ell_1,\ell_2)=C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}\Big(\phi((\ell_1-\mu_1)/\sigma_1),\phi((\log\ell_2-\mu_2)/\sigma_2)\Big)$$

(iii) Step 1: Construction of $(x_1,x_2)\sim t^{\nu}_{\rho}$: Put $w=\nu/\mathrm{v}$ and $x_1=\sqrt{w}z_1$, $x_2=\sqrt{w}(\rho z_1+\sqrt{1-\rho^2}z_2)$.
Step 2: Construction of $(u_1,u_2)\sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Put $(u_1,u_2)=(t^{-1}_{\nu}(x_1),t^{-1}_{\nu}(x_2))$.
Step 3: The quantile function of the lognormal distribution with parameters μ, σ^2 is given by $u\mapsto=\exp(\sigma\phi^{-1}(u)+\mu)$. Following the second part of Sklar's theorem,

$$(\ell_1,\ell_2)=\left(\mu_1+\sigma_1\phi^{-1}(u_1),\exp\left(\mu_2+\sigma_2\phi^{-1}(u_2)\right)\right)$$

are the realisations of L_1,L_2.

(c) One gets for Kendalls tau, that $\hat\rho_\tau=0.2$ and hence $\hat\rho=\sin(\frac{\pi}{2}\hat\rho_\tau)=0.31$. ν can be estimated via MLE.

Question 6. Credit Risk

(a) i) Advantages. The CDS pays off at the same time as losses due to the default of a reinsurer arise; the hedging can be done unilaterally (without consent of the reinsurer)

ii) Potential problems: The size of the loss (and hence the size of the CDS position needed) is unknown as of today; CDS markets might not be sufficiently liquid.

(b) (i) Dependence between the default of different reinsurers could be caused by a catastrophic event that is insured by several reinsurance companies or by a financial crisis (decline of the asset side of all reinsurers).

(ii) It holds that $\bar p^i=E(p_i(\psi))=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\mu_i+\sigma x)\varphi(x)\,dx$,where φ denotes the density of the standard normal distribution. We get for the covariance that

$$\mathrm{cov}(Y^i,Y^j)=E(Y^iY^j)-\bar p^i\bar p^j=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\mu_i+\sigma x)\phi(\mu_j+\sigma x)\varphi(x)\,dx-\bar p^i\bar p^j\,.$$

(iii) In order to generate a realization of $Y^1, \ldots, Y^m$ one first generates $\psi \sim N(0,1)$ and then m independent Bernoulli-variates $Y^1, \ldots, Y^m$ with success probability $p_i(\psi)$. The associated loss is $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$. Repeating this N times (N large) gives an approximation of the distribution of L.

Question 7. Interest rate risk and term structure models.

(a) Assuming that the actual number of deaths is equal to the expected number means that we do not take into account insurance risk. Consequently, we use the expected number of survivors $N \cdot {}_{10}p_{50}$ in our calculations. The market value is determined under the risk neutral measure. At time 0, the market value is given by

$$\begin{aligned} L &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(0,10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(0,10) - B_\lambda(0,10) \cdot r(0)\right). \end{aligned}$$

(b) As we assume that the actual number of deaths is equal to the expected number the required risk capital needed to buffer an increase in market value of insurance liabilities is determined by considering exclusively a decrease in interest rates. Then, the stochastic present value of the insurance benefits at time t is given by

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot D(t,10).$$

The α-quantile of the market value of liabilities at time 1 derives from the $1-\alpha$-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real world measure we obtain the $1-\alpha$-quantile

$$r_{1-\alpha}(1) = \mathbb{E}(a(1)) + \sqrt{b(1)} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

In this VaR-scenario, the market value of insurance liabilities is given by

$$\begin{aligned} MV_\alpha(1) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(PV(1) \mid r_{1-\alpha}(1)\right) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp\left(-A_\lambda(1,20) - B_\lambda(1,20) \cdot r_{1-\alpha}(1)\right). \end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the insurance liabilities with probability α, at time 0, we need the risk capital

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\Delta MV) = MV_\alpha(1) \cdot P(0,1) - L$$

with the zero bond price $P(0,1) = \exp\left(-A_\lambda(0,1) - B_\lambda(0,1)\right)$.

(c) The zero bonds with maturity 1 will pay out

$$Nom := \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot P(0,10)}{P(0,1)} = \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}}{1 + 9F(0,1,10)}.$$

This is the nominal amount of the receiver-swaption that the insurance company buys.

At time 1, the insurance company can buy risk free zero bonds with term 9 and nominal amount

$$Nom_1 := \frac{Nom}{P(1,10)} = Nom \cdot (1 + 9L(1,10)).$$

In the scenario of an increase in interest rates, it holds that $L(1,10) > F(0,1,10)$, such that the insurance liabilities are covered: $Nom_1 > S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}$. The receiver-swaption is out of the money.

In the scenario of a decrease in interest rates, the payments of the zero bonds and the receiver-swaption at time 10 add up to the expected value of the insurance liabilities:

$$\begin{aligned} Nom_1 + Nom \cdot 9 \cdot (F(0,1,10) - L(1,10)) &= Nom \cdot (1 + 9F(0,1,10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \end{aligned}$$

The receiver-swaption eliminates interest rate risk inasmuch as it guarantees the forward rate $F(0,1,10)$ as minimal rate of return in the period $[1,10]$. Depending on the realization of insurance risk, the nominal value of the receiver-swaption may turn out to be too high or too low, i.e. there is no perfect hedge against a decrease in interest rates.

Furthermore, the insurance company is exposed to the risk that the counterparty of the swaption defaults as the swaption is bought OTC and has a long term.