

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Spezialwissen ERM 1

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e.V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 12. Juni 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey, Dr. I. Merk,
E. Müller, Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Aufgabe 1. Fallstudie: Analyse und Kommunikation im Zusammenhang mit einem neu erworbenen Tochterunternehmen. [60 Punkte]

Situation: Eine große international tätige Versicherung will sich regional diversifizieren und hat daher in einem Land, in dem sie bisher nicht vertreten ist, ein neues Tochterunternehmen erworben.

Das Tochterunternehmen betreibt Schaden/Unfall-Versicherung im Privatkunden- und auch Industriegeschäft, ersteres profitabel, letzteres nicht, was aber mit Blick auf Volumenziele nicht aufgegeben wird.

Der CEO wie auch große Teile des Managements des Tochterunternehmens sind lange bei ihrem Unternehmen mit entsprechend alten Verträgen. Dies gilt auch für die Bonusvereinbarungen des Managements des Tochterunternehmens, die vor allem auf Wachstum, Größe und Marktanteile des jeweils aktuellen Geschäftsjahres ausgerichtet sind.

Das Tochterunternehmen war jahrelang erfolgreich auf Basis der gezeigten Abschlüsse. Der CEO ist eine charismatische und auf Basis seines Erfolgs eher dominante Persönlichkeit, an deren Gebaren sich folglich bisher auch wenig Kritik oder kritisches Hinterfragen ergeben hat.

Risikomanagement (RM) existiert, befasst sich aber überwiegend mit weniger wichtigen Themen wie Prozesse der Reisekostenabrechnung etc. Risikomanagement, interne Revision und Versicherungsgeschäft liegen im Vorstandsbereich des CEO.

Die neue Muttergesellschaft sieht nunmehr gewisse Probleme, da aufgrund von Preiskampf das Privatkundengeschäft deutlich unter Druck gerät sowie das Industriegeschäft durch Silent-Cyber-Deckungen noch defizitärer wird, so dass auch das Gesamtergebnis sich deutlich schwächer darstellt und sich der Verlustgrenze nähert. Es gibt Anzeichen, dass mangelnde Profitabilität im Kerngeschäft durch „innovative“ Kapitalanlageprodukte kompensiert werden soll.

Des Weiteren hat sich bei der Muttergesellschaft der Eindruck verfestigt, dass der Informationsfluss des Tochterunternehmens sehr stark gesteuert wird und nicht gerade von Offenheit gekennzeichnet ist – sowohl gegenüber der Muttergesellschaft als auch intern.

Daher werden Sie als externer Berater von der Muttergesellschaft engagiert, um die Lage vor Ort zu analysieren sowie Empfehlungen zu möglichen Verbesserungen des ERM des Tochterunternehmens zu geben, die aufgrund der Ergebnisentwicklung notwendig sein wird.

Muttergesellschaft und Tochterunternehmen haben ihren Sitz innerhalb der Europäischen Union. Darüber hinaus ist die Muttergesellschaft an der US-amerikanischen Börse gelistet, dies ist für das Tochterunternehmen nicht der Fall, auch hat diese bisher nur nach lokalem Recht bilanziert.

- (a) *[15 Punkte]* Nennen Sie drei regulatorische Standards, denen die Muttergesellschaft und damit ggf. auch das Tochterunternehmen unterliegt. Welche weiteren Standards könnten einschlägig sein? Welche Governance-Funktionen würden Sie mindestens erwarten? Welche Bereiche hat das Risikomanagementsystem unter diesen gesetzlichen Anforderungen abzudecken? Welche zentralen Aufgaben hat das Risikomanagement?
- (b) *[15 Punkte]* Welche möglichen Probleme sehen Sie aufgrund der Fallbeschreibung im ERM des Tochterunternehmens? Nennen Sie drei Beispiele.
- (c) *[20 Punkte]* Falls sich diese Erwartungen bestätigen, welche Empfehlungen zur Änderung geben Sie? Bitte gehen Sie dabei insbesondere ein auf: Vergütung, Risikomanagement, Governance und Risikokultur sowie Geschäftsausrichtung.
- (d) *[5 Punkte]* Welche Prinzipien sollten bei der generellen Kommunikation nach außen genutzt werden? Begründen Sie dies.
- (e) *[5 Punkte]* Ausmaß und Ausprägungen von Cyber-Risk sind derzeit weiter in Entwicklung. Welche Prinzipien für Maßnahmen in Prozessen und Kontrollen würden Sie dem Unternehmen mitgeben?

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung. [21 Punkte] Ein Rückversicherer berechne seine Prämien als das 1.2-fache der erwarteten Rückversicherungsleistung und verwende die Kennzahl RORAC zur Unternehmenssteuerung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass keine Kosten beim Rückversicherer anfallen.

- (a) [6 Punkte] Der Rückversicherer hat bereits die Zahlungsverpflichtung $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$ übernommen, wobei die Schadensgröße X_1 die folgende Verteilung hat:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1500) = 0.02.$$

Berechnen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk und Expected Shortfall von Y_1 .

- (b) [5 Punkte] Berechnen Sie zu beiden Risikomaßen aus (a) den RORAC, d.h. $RORAC_1$ bezüglich $VaR_{0.97}$ und $RORAC_2$ bezüglich $ES_{0.97}$.
- (c) [10 Punkte] Der Rückversicherer hat die Möglichkeit, zusätzlich das Risiko $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$ zu versichern, wobei die Schadensgröße X_2 unabhängig von X_1 ist und dieselbe Verteilung wie X_1 hat. Prüfen Sie für beide Varianten, $RORAC_1$ bzw. $RORAC_2$, jeweils, ob er diese Möglichkeit wahrnimmt, d.h. ob er die Verteilung von $Y_1 + Y_2$ der Verteilung von Y_1 vorzieht? Erklären Sie, welche Eigenschaften der verwendeten Größen die unterschiedlichen Entscheidungen des Rückversicherers ausgelöst hat, und beurteilen Sie die Auswirkungen der Entscheidungen aus Risiko- und Ertragssicht.

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko. [24 Punkte] Ein Versicherungsunternehmen führt eine Police zur Versicherung eines neuartigen Risikos ein. Da keine Beobachtungsdaten vorliegen, zieht das Unternehmen für die Kalkulation ein Bayesianisches Modell heran und macht dabei die folgenden Annahmen:

- Die Schadenhöhe X , gegeben den Wert θ des unbekanntes Parameters Θ , sei $LN(\theta, 4)$ -verteilt.
- Auf Basis von Experteneinschätzungen des neuartigen Risikos wird a priori $\Theta \sim \mathcal{N}(2, 1)$ angenommen.

Hinweis.

- Die Lognormalverteilung $LN(\theta, \sigma^2)$ hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

- Gilt $X | \Theta = \theta \sim LN(\theta, \sigma^2)$ und $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, so hat X die unbedingte Verteilung $LN(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.
 - Quantil der Standardnormalverteilung: $\Phi^{-1}(0.97) = 1.880794$
- (a) [6 Punkte] Bestimmen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk der unbedingten Verteilung von X und der bedingten Verteilung von X , gegeben $\Theta = 2$. Geben Sie eine ökonomische Interpretation der Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X | \Theta = 2)$ an.
- (b) [8 Punkte] Zeigen Sie: Die a posteriori Verteilung von Θ , gegeben die beobachteten Schadenhöhen x_1, \dots, x_n , ist $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.
- (c) [2 Punkte] Begründen Sie kurz, weshalb die Vorhersageverteilung von X , gegeben x_1, \dots, x_n , gleich $LN\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i), 4 + \frac{4}{4+n}\right)$ ist.
- (d) [8 Punkte] Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten des Value at Risk der Vorhersageverteilung zum Niveau 0.97 für $n \rightarrow \infty$ und geben Sie eine ökonomische Interpretation dafür an. Welche Schwierigkeiten könnten in der Praxis der Anwendbarkeit dieser Interpretation entgegenstehen?

Aufgabe 4. Extremwerttheorie (EVT). [14 Punkte]

- (a) [3 Punkte] "EVT ist ein nützliches Hilfsmittel im aktuariellen Risikomanagement". Erläutern Sie kurz diese These anhand eines selbstgewählten Risikomanagementproblems aus der Schadensversicherung oder aus dem ERM.
- (b) [5 Punkte] Für eine Zufallsvariable X und $u \in \mathbb{R}$ mit $P(X > u) > 0$ ist die excess-Verteilung zur Schranke u definiert durch $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u)$, $x \geq 0$; falls $E(|X|) < \infty$ ist die mean excess Funktion $e(u)$ der Erwartungswert der Verteilung F_u .
- (i) [2 Punkte] Bestimmen Sie die excess Verteilung für die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD). (Die GPD-Verteilung mit Parametern ξ, β hat Überlebensfunktion $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, $x > 0$.)
- (ii) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass für eine Zufallsvariable X mit stetiger Verteilung der folgenden Zusammenhang zwischen VaR, ES und der mean excess Funktion gilt:

$$ES_\alpha(X) = e(\text{VaR}_\alpha(X)) + \text{VaR}_\alpha(X), \quad \alpha \in (0, 1),$$

- (c) [6 Punkte] Erläutern Sie kurz die Rolle der GPD-Verteilung für die peaks over threshold (POT) Methode in der Extremwerttheorie und erklären Sie die Hauptidee des zugehörigen tail-Schätzers. Diskutieren Sie eventuell entstehende Probleme bei der Verwendung der POT Methode.

Aufgabe 5. Risikoaggregation und copulas. [27 Punkte] Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss L_1, \dots, L_d . Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit EC_1, \dots, EC_d bezeichnet.

- (a) [9 Punkte] Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.
- (b) [13 Punkte] Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass L_2 log-normal verteilt ist mit Parametern μ_2, σ_2^2 , d.h. $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden.
- (i) [4 Punkte] Für die copula muss das quantitative Risikomanagement zwischen einem Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) und einem Meta t Modell (basierend auf $C_{\nu, \rho}^t$) wählen. Welche Modellklasse ist (bei gleichem ρ) die konservativere Wahl im Hinblick auf die Modellierung von tail Risiken (Antwort mit kurzer Begründung)?
- (ii) [2 Punkte] Geben Sie für fixe Parameter ρ und ν die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im meta t Modell an.
- (iii) [7 Punkte] Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert und Sie können unabhängig von z_1 und z_2 eine Realisierung v einer gemäß χ_ν^2 verteilte Zufallsvariable V simulieren. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisation $(L_1, L_2)'$ generiert, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.
- (c) [5 Punkte] Sie haben die folgenden 5 Beobachtungen von L_1 und L_2 .

data point	1	2	3	4	5
L_1	-1.05	-0.84	0.20	-0.79	-0.26
L_2	0.26	0.18	0.31	0.34	0.25

- (i) [3 Punkte] Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für den Korrelationsparameter ρ von $C_{\nu, \rho}^t$.
- (ii) [2 Punkte] Wie könnte der Parameter ν geschätzt werden?

Aufgabe 6. Kreditrisiko. [15 Punkte]

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der mit m ausfallbehafteten Rückversicherern R^1, \dots, R^m Rückversicherungsverträge abgeschlossen hat; mit Ausfallsindikatoren Y^1, \dots, Y^m . Falls Rückversicherer i ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e^i , wobei die Zufallsvariable e^i das exposure gegenüber R^i darstellt.

- (a) [4 Punkte] Zur Absicherung dieses Risiko könnte der Erstversicherer CDS Kontrakte einsetzen. Diskutieren Sie Vorteile und Probleme einer derartigen Absicherungsstrategie.
- (b) [11 Punkte] Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Gegenparteiisiko verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle von R^1, \dots, R^m zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0, 1), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1)$$

- (i) [3 Punkte] Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen von R^1, \dots, R^m erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (1) an.
- (ii) [4 Punkte] Stellen Sie die Ausfallswahrscheinlichkeit $\bar{p}^i = P(Y^i = 1)$ und die Kovarianz $\text{cov}(Y^i, Y^j)$ als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.
- (iii) [4 Punkte] Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Simulation der Verteilung der Zufallsvariable $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$, die den Gesamtverlust durch Gegenparteiisiko darstellt. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass e^1, \dots, e^m deterministisch sind (deterministisches exposure). Geben Sie in einem ersten Schritt einen Algorithmus der Simulation der Ausfallindikatoren an. Dabei steht Ihnen ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der sowohl normalverteilte als auch Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen simulieren kann.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. [19 Punkte] Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß \mathbb{P} im Vasicek-Modell mit den Parametern a , b und σ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW_t \quad (\text{RW})$$

Sei ferner λ der Marktpreis des Risikos. Dann folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t)) dt + \sigma dW_t^\mathbb{Q} \quad (\text{RN})$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Ein Versicherungsunternehmen hat zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kollektiv von N Personen des Alters 50, die eine beitragsfreie reine Erlebensfallversicherung der Höhe S mit Fälligkeit im Alter 60 besitzen. Die Wahrscheinlichkeit einer 50jährigen Person, das Alter 60 zu erreichen, beträgt ${}_{10}p_{50}$. Zur Bedeckung der Zahlungsverpflichtungen für dieses Kollektiv hat das Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Rückstellung in Höhe des Marktwerts der Verpflichtungen gebildet und in einen Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ investiert.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t, T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch:

- unter dem **realen Maß**: $\mathbb{E}_\mathbb{P}(D(t, T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A(t, T)$ und $B(t, T)$,
- unter dem **risikoneutralen Maß**: $\mathbb{E}_\mathbb{Q}(D(t, T)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A_\lambda(t, T) - B_\lambda(t, T) \cdot r(t))$ mit deterministischen Funktionen $A_\lambda(t, T)$ und $B_\lambda(t, T)$.

Ferner ist die Short Rate normalverteilt:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ mit deterministischen Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ unter dem **realen Maß**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ mit deterministischen Funktionen $a_\lambda(t)$ und $b_\lambda(t)$ unter dem **risikoneutralen Maß**.

- (a) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Betrag L der Rückstellung unter der Annahme, dass die tatsächliche Zahl der Toten gleich der erwarteten ist.
- (b) [8 Punkte] Ermitteln Sie unter der Annahme, dass die tatsächliche Zahl der Toten gleich der erwarteten ist, zum Zeitpunkt 0 das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit α ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der Verpflichtungen infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

- (c) [8 Punkte] Zur Absicherung gegen das Zinsänderungsrisiko bei Wiederanlage der Auszahlung des Zerobonds zum Zeitpunkt 1 erwägt das Versicherungsunternehmen, bei einer Investmentbank eine OTC-Receiver-Swaption mit Fälligkeitszeitpunkt 1, dem **einzigen** Zahlungszeitpunkt $t = 10$ und dem festen Zinssatz $K = F(0, 1, 10)$ über den Nominalbetrag der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds zu kaufen. Dabei bezeichnet $F(0, 1, 10)$ den einfachen Terminzins zum Zeitpunkt 0 für den Zeitraum $[1, 10]$. Beurteilen Sie die Wirksamkeit dieser Strategie. Gehen Sie dabei auf Zinsänderungsrisiko, versicherungstechnisches Risiko und Gegenparteiisiko und deren Zusammenspiel ein.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Fallstudie: Analyse und Kommunikation im Zusammenhang mit einem neu erworbenen Tochterunternehmen.

- (a) Regulatorische Standards: Aufgrund des Sitzes in der EU ist Solvency II relevant. Als internationale Gruppe ist nach IFRS zu berichten. Aufgrund der Notierung an der US-Börse ist SOX einschlägig. (3 Punkte)

Weitere Standards: Da COSO-IKS unter SOX als IKS anerkannt ist, wird die Gruppe sich vermutlich an COSO-ERM orientieren. Auch ist davon auszugehen, dass die Gruppe mindestens ein interaktives Rating hat. Die entsprechenden Standards sind zu bedienen. (2 Punkte)

Unter Solvency II sind mindestens die Risikomanagementfunktion (RMF), versicherungsmathematische Funktion (VMF), Compliance-Funktion und interne Revision einzurichten. (4 Punkte)

Das Risikomanagement hat mindestens folgende Bereiche abzudecken (vgl. Artikel 44 SII-Richtlinie):

- Risikoübernahme und Rückstellungsbildung
- Aktiv-Passiv-Management
- Anlagen, insbesondere Derivate und ähnliche Verpflichtungen
- Liquiditäts- und Konzentrationsmanagement
- operationelle Risiken
- Rückversicherung und andere Risikominderungstechniken

(Mindestens 3 nennen; 3 Punkte)

Kernaufgaben des Risikomanagements (Artikel 269 DVO):

- Unterstützung der Geschäftsführung
- Überwachung des Risikomanagementsystems
- Überwachung des allgemeinen Risikoprofils des Unternehmens als Ganzes
- detaillierte Berichterstattung über Risikoexponierungen und Beratung der Geschäftsführung in Fragen des Risikomanagements, unter anderem in strategischen Belangen, die die Unternehmensstrategie, Fusionen und Übernahmen oder größere Projekte und Investitionen betreffen

- Ermittlung und Bewertung sich abzeichnender Risiken („Emerging Risks“).
- (Mindestens 3 nennen, 3 Punkte)
- (b)
- CEO als OpRisk: Ausrichtung auf eine Person birgt insbesondere hohes Ausfallrisiko und das Risiko, neue Entwicklungen nicht rechtzeitig zu erkennen.
 - Ungünstige Bonusregelungen bzw. unangemessene Anreizpolitik: Ausrichtung auf Wachstum und Volumen entsprechen nicht den ERM-Zielen einer risikoorientierten Geschäftspolitik. Ausrichtung der Ziele auf jeweils aktuelles Jahr nicht vereinbar mit nachhaltiger Unternehmensentwicklung und Profitabilität
 - Risikomanagement nicht risikoorientiert ausgerichtet, Verankerung im tatsächlichen Geschäft scheint nicht gegeben zu sein.
 - Governance-Struktur wenig geeignet: Risikomanagement nicht Kernbestandteil der Prozesse, Vorstand nicht wirklich in gemeinsamer Verantwortung, nicht adäquate ERM Kultur, fehlende interne Kommunikation und Risikobewusstsein auf allen Ebenen.
 - Schwächen im Pricing- und Entwicklungsprozess: Produktgestaltung bei Industriegeschäft, Markt/Wettbewerb bei Privatkunden
- (c)
- alte Verträge anpassen (andere Bonusregelung), insbesondere ausrichten auf Risiko und langfristige Profitabilität, Ziele auf drei bis fünf Jahre ausrichten
 - Risikomanagement adäquater ausrichten: Schwerpunkte in operativem Versicherungsgeschäft sowie im Kapitalanlageprozess. In letzterem entweder kurzfristig Know-How bzgl. der innovativen Kapitalanlageprozesse schaffen oder Kapitalanlagestrategie konservativer ausrichten.
 - Voraussetzungen für eine bessere ERM Kultur schaffen inkl. verbessertem Informationsfluss, Risikomanagement und Risikokennzahlen als Kernbestandteil der Unternehmenssteuerung stärken
 - Erarbeitung einer angemessenen Governance-Struktur, ggf. CEO austauschen und zumindest alte Seilschaften aufbrechen, Komitee-Lösungen schaffen, Vorstandsbereich des CEO aufteilen, Verantwortung für Versicherungsgeschäft und Risikomanagement in unterschiedlichen Ressorts
 - Erarbeitung angemessener Reaktion im Privatmarkt, Produktpassung im Industriebereich, Verbesserung der Ergebnissituation, Rückversicherungslösungen für bestehende Deckungen prüfen

- Überprüfung aller Prozesse auf SOX-Compliance.
 - Integration in die Berichterstattung nach IFRS.
- (d) In Fällen, in denen ungünstige, negative unternehmensinterne Vorgänge mit Wirkung auf Ergebnis und öffentlicher Wahrnehmung nach außen nicht kommuniziert wurden, zeigt die Erfahrung, dass dies nur kurzfristig Probleme wie etwa Absturz des Aktienkurses vermeidet, mittel- bis längerfristig aber zu größeren Schwierigkeiten führt. Daher empfiehlt sich eine offene Darstellung.
- (e) Cyber-Risk ist zwar mittlerweile als Risiko bekannt, auf Grund der schnell und stark zunehmenden Bedeutung im Zuge der fortschreitenden Digitalisierung sollten die Entwicklungen speziell und enger erfasst werden als bei anderen Risiken, Zuständige sollten regelmäßig weitergebildet werden. Austausch in externen Arbeitsgruppen, mit Rückversicherungen, etc. ist anzustreben.

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung.

- (a) Die Leistung des Rückversicherers hat die Verteilung

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 500) = 0.02.$$

Wegen $\mathbb{P}(Y_1 < 200) = 0.8 < 0.97 < 0.98 = \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)$ gilt $VaR_{0.97}(Y_1) = 200$.
 Ferner ist

$$ES_{0.97} = \frac{1}{1 - 0.97} \int_{0.97}^1 VaR_z(Y_1) dz = \frac{200 \cdot 0.01 + 500 \cdot 0.02}{0.03} = 400.$$

- (b) Die erwartete Rückversicherungsleistung beträgt $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 500 \cdot 0.02 = 46$, die Prämie $P = 1.2 \cdot 46 = 55.2$. Daraus folgt

$$RORAC_1 = \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{200 - 55.2} = 0.0635,$$

$$RORAC_2 = \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{ES_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{55.2 - 46}{400 - 55.2} = 0.0267,$$

- (c) Wird zusätzlich X_2 rückversichert, so wird die Gesamtleistung des Rückversicherers $Y_1 + Y_2$ durch folgende Verteilung beschrieben:

z	$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$
0	$0.8^2 = 0.64$
200	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$
400	$0.18^2 = 0.0324$
500	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$
700	$2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$
1000	$0.02^2 = 0.0004$

Mit Hilfe der Definitionen bestimmen wir $VaR_{0.97}(Y_1+Y_2) = 500$ und $ES_{0.97}(Y_1+Y_2) = \frac{1}{0.03}(500 \cdot 0.0224 + 700 \cdot 0.0072 + 1000 \cdot 0.0004) = 554.67$. Daraus folgen die neuen Kennzahlen $RORAC_1 = \frac{2 \cdot 9.2}{500 - 2 \cdot 55.2} = 0.0472$, der niedriger ausfällt als vorher, und $RORAC_2 = \frac{2 \cdot 9.2}{554.67 - 2 \cdot 55.2} = 0.0414$, der höher ausfällt als vorher.

Bei Verwendung von $RORAC_1$ wird der Rückversicherer auf die neue Geschäftsmöglichkeit und damit auf zusätzlichen Ertrag und auf die Diversifikation durch ein unabhängiges neues Risiko verzichten.

Die Steuerung durch den $RORAC_1$ schafft also hier einen falschen Anreiz. Grund dafür ist, dass sich das Risikomaß $VaR_{0.97}$ in dieser Situation als nicht subadditiv erweist.

Im Gegensatz dazu ist der Expected Shortfall subadditiv, so dass die Steuerung durch den $RORAC_2$ die Gelegenheit zur Diversifikation ergreift und mit der Versicherung von Y_2 einen zusätzlichen Ertrag erwirtschaftet.

Aufgabe 3. Risikomaße und Parameterrisiko.

- (a) Die bedingte Verteilung von $X | \Theta = 2$ ist $LN(2, 4)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X | \Theta = 2) = \exp(2 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 317.85$.

Die unbedingte Verteilung von X ist nach dem Hinweis $LN(2, 4 + 1)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X) = \exp(2 + \sqrt{5} \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 495.51$.

Die Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X | \Theta = 2) = 177.66$ reflektiert eine Schätzung des Parameterrisikos, da die Unsicherheit bezüglich des Parameterwertes nur in die unbedingte Verteilung einfließt.

- (b) Bis auf eine Konstante ist die a posteriori Dichte von Θ , gegeben die Beobachtungen x_1, x_2, \dots, x_n , gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x_1, x_2, x_2, \dots, x_n) & \propto f_{\theta}(\theta) \cdot \prod_{i=1}^n f_{X|\theta}(x_i | \theta) \\ & \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - 2)^2\right) \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(\ln(x_i) - \theta)^2}{2 \cdot 4}\right) \\ & \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\theta^2 + \frac{n\theta^2}{4}\right) - 2\theta\left(2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right]\right) \\ & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right)\right) \\ & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta - \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right)^2\right). \end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

- (c) Die Vorhersageverteilung von X ergibt sich durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte des Parameters. Daher folgt das Resultat unmittelbar aus b) und dem Hinweis.
- (d) Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir folgende Grenzwerte für die Parameter der Vorhersageverteilung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \mathbb{E}(\ln(X)) =: \theta^*,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{4}{4+n} \right) = 4.$$

Daraus folgt die Konvergenz des Value at Risk der Vorhersageverteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sqrt{4 + \frac{4}{4+n}} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) \right) = \exp(\theta^* + 2 \cdot \Phi^{-1}(\alpha))$$

gegen den Value at Risk der Schadenhöhenverteilung bei Kenntnis des wahren Parameters θ^* .

Die Varianz $\frac{4}{4+n}$ der a posteriori Verteilung des Parameters geht gegen 0, so dass keine Parameterunsicherheit vorliegt.

Der erste Parameter der Vorhersageverteilung konvergiert gegen θ^* , den wahren Parameter der Schadenhöhenverteilung. Eine eventuell verzerrte a priori Verteilung auf Basis der Experteneinschätzungen spielt keine Rolle mehr. Die Information der unendlich vielen Beobachtungen ermöglicht die Korrektur auf den wahren Wert.

Der zweite Parameter konvergiert gegen 4, den Wert der bedingten Beobachtungsverteilung. Es liegt keine zusätzliche Unsicherheit über den Parameter mehr vor.

In der Praxis ist fraglich, ob genügend Daten beobachtet werden können, um in die Nähe des asymptotischen Verhaltens zu kommen. Zudem können Änderungen in der Zeit und Strukturbrüche die Konvergenzen stören.

Aufgabe 4. Extremwerttheorie.

- (a) EVT bietet einen systematischen, theoriebasierten Ansatz zur Schätzung von Rändern von Verteilungen in Situationen, in denen auf Grund von nicht ausreichenden Daten die empirische Verteilungsfunktion als Approximation für tail Wahrscheinlichkeiten nicht ausreicht. Mögliche Anwendungen: Bewertung von

Rückversicherungsverträgen (excess of loss); Bestimmung von Risikomaßen im tail einer Verlustverteilung (verschiedene andere Antworten sind auch möglich).

- b) i) Die excess Verteilung wird am besten mit Hilfe ihrer Überlebensfunktion $\bar{F}_u(x) = P(X - u > x \mid X > u) = \bar{F}(x + u) / \bar{F}(u)$ bestimmt. Für die GPD gilt $\bar{F}_{\xi, \beta}(x) = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$, so dass wir

$$\bar{F}_u(x) = \frac{\bar{F}(x + u)}{\bar{F}(u)} = \left(\frac{1 + \xi \frac{u}{\beta} + \xi \frac{x}{\beta}}{1 + \xi \frac{u}{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = \left(1 + \xi \frac{x}{\beta(1 + \xi \frac{u}{\beta})}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

erhalten. Folglich ist die excess Verteilung eine GPD-Verteilung mit Parametern ξ und $\tilde{\beta}(u) = \beta + \xi u$.

- ii) Es gilt, da X eine stetige Verteilung hat,

$$ES_{\alpha}(X) = E(X \mid X > VaR_{\alpha}) = VaR_{\alpha} + E(X - VaR_{\alpha} \mid X > VaR_{\alpha}) = VaR_{\alpha} + e(VaR_{\alpha}).$$

- c) Für eine sehr große Klasse von Verteilungen ist die GPD die Grenzverteilung der excess Verteilung für $u \rightarrow \infty$ und daher die natürliche Wahl bei der Modellierung von excess Verteilungen über große Schranken. Man hat für $x > u$ die Darstellung $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u)$. Falls u groß, aber nicht sehr groß ist, kann $\bar{F}(u)$ einfach durch den Prozentsatz der Daten größer als u geschätzt werden (empirische Überlebensfunktion). Die excess-Verteilung wird durch GPD-Verteilung modelliert, die Parameter ξ und β können etwa durch Maximum Likelihood bestimmt werden. Das Hauptproblem - insbesondere bei knapper Datenlage - ist die Wahl der Schranke u (tradeoff zwischen bias und Varianz).

Aufgabe 5. Risikoaggregation und copulas.

- (a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):

- Simple summation, $EC = EC_1 + \dots + EC_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht principles based, keine Berücksichtigung von Diversifikation.
- Correlation adjusted summations $EC = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} EC_i EC_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteil: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.

- Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteil: Modellrisiko bei Wahl der copula, schwer zu erklären.
 - Structural Models (factor based) Vorteil: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht natürlich. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.
- (b) (i) Die t copula ist wegen der 'eingebauten' tail dependence konservativer.
- (ii) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(l_1, l_2) = C_{\rho, \nu}^t(\Phi((l_1 - \mu_1)/\sigma_1), \Phi((\log l_2 - \mu_2)/\sigma_2))$.
- (iii) Schritt 1: Konstruktion von t_{ρ}^{ν} verteilten Realisierungen x_1, x_2 : Setze $w = \nu/\nu$ und $x_1 = \sqrt{w}z_1, x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}z_2)$.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C_{\rho, \nu}^t$: Setze $(u_1, u_2) = (t_{\nu}^{-1}(x_1), t_{\nu}^{-1}(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2 ist durch $u \mapsto \exp(\sigma\phi^{-1}(u) + \mu)$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann
- $$(l_1, l_2) = (\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)))$$
- die gewünschten Realisierungen.
- (c) Man erhält für Kendalls tau, dass $\hat{\rho}_{\tau} = 0.2$ und somit $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_{\tau}) = 0.31$. ν kann dann mit MLE geschätzt werden.

Aufgabe 6. Kreditrisiko und Gegenparteiisiko

- (a) i) Vorteile: Die Auszahlung des CDS wird genau dann fällig, wenn Verluste durch Gegenparteiisiko eintreten; der Erstversicherer kann die Absicherungsstrategie unilateral einsetzen (ohne Mitwirkung des Rückversicherers).
- ii) mögliche Probleme: Höhe des Verlustes durch Gegenparteiisiko (und damit Höhe der benötigten Absicherung) unbekannt; Basisrisiko; fehlende Liquidität am CDS Markt.
- (b) (i) Abhängigkeit kann beispielsweise entstehen durch Eintreten eines Katastrophenereignisses, das von mehreren Rückversicherern abgedeckt wird, oder durch schlechte Entwicklung der Finanzmärkte (Auswirkung auf die asset-Seite der Bilanz).
- (ii) Es gilt $\bar{p}^i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x) dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Für die Kovarianz gilt

$$\text{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}^i \bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x) dx - \bar{p}^i \bar{p}^j.$$

- (iii) Zur Erzeugung einer Realisierung von Y^1, \dots, Y^m generiert man zunächst $\psi \sim N(0, 1)$ und dann m unabhängige Bernoulli- Zufallsvariablen Y^1, \dots, Y^m mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_i(\psi)$. Der zugehörige Verlust ergibt sich dann als $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$. N mal unabhängiges Wiederholen ergibt dann eine Approximation der Verteilung von L .

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

- (a) Die Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, blendet das versicherungstechnische Risiko aus, so dass mit der erwarteten Anzahl der Überlebenden $N \cdot {}_{10}p_{50}$ gerechnet wird. Der Marktwert der Verpflichtungen ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} L &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(0, 10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp(-A_{\lambda}(0, 10) - B_{\lambda}(0, 10) \cdot r(0)). \end{aligned}$$

- (b) Auf Grund der Annahme, dass die tatsächliche Anzahl der Toten gleich der erwarteten ist, ist das Risikokapital als Puffer gegen einen Marktwertanstieg der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten aus dem alleinigen Treiber eines Zinsrückgangs zu bestimmen. Der stochastische Barwert der Versicherungsleistungen zur Zeit t ist dann gegeben durch

$$PV(t) = S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot D(t, 10).$$

Das α -Quantil des Marktwertes der Verbindlichkeiten zur Zeit 1 ergibt sich für das $1 - \alpha$ -Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß erhalten wir als $1 - \alpha$ -Quantil

$$r_{1-\alpha}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{b(1)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten unter dem risikoneutralen Maß

$$\begin{aligned} MV_{\alpha}(1) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(PV(1) | r_{1-\alpha}(1)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \exp(-A_{\lambda}(1, 20) - B_{\lambda}(1, 20) \cdot r_{1-\alpha}(1)). \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit α puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\text{VaR}_{\alpha}(\Delta MV) = MV_{\alpha}(1) \cdot P(0, 1) - L$$

mit dem Zerobondpreis $P(0, 1) = \exp(-A_{\lambda}(0, 1) - B_{\lambda}(0, 1))$ zu stellen.

(c) Die Zahlung der zum Zeitpunkt 1 auslaufenden Zerobonds beträgt

$$Nom := \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \cdot P(0, 10)}{P(0, 1)} = \frac{S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}}{1 + 9F(0, 1, 10)}$$

Dies ist der Nominalbetrag der Receiver-Swaption, die das Versicherungsunternehmen kauft.

Zum Zeitpunkt 1 kann das Versicherungsunternehmen ausfallfreie Zerobonds mit Laufzeit 9 und Nominalbetrag

$$Nom_1 := \frac{Nom}{P(1, 10)} = Nom \cdot (1 + 9L(1, 10))$$

kaufen.

Im Zinsanstiegsszenario gilt $L(1, 10) > F(0, 1, 10)$, so dass die Versicherungsverpflichtungen bedeckt sind: $Nom_1 > S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50}$. Die Receiver-Swaption ist wertlos.

Im Zinsrückgangsszenario ergeben die Zahlungen der Zerobonds und der Receiver-Swaption zum Zeitpunkt 10 zusammen den erwarteten Wert der Versicherungsverpflichtungen:

$$\begin{aligned} Nom_1 + Nom \cdot 9 \cdot (F(0, 1, 10) - L(1, 10)) &= Nom \cdot (1 + 9F(0, 1, 10)) \\ &= S \cdot N \cdot {}_{10}p_{50} \end{aligned}$$

Die Receiver-Swaption eliminiert das Zinsänderungsrisiko insoweit, dass sie den Terminzins $F(0, 1, 10)$ als Mindestverzinsung in der Periode $[1, 10]$ garantiert. In Abhängigkeit vom Verlauf des versicherungstechnischen Risikos kann der Nominalbetrag der Receiver-Swaption jedoch zu hoch oder zu niedrig sein, d.h. es liegt keine perfekte Absicherung gegen fallende Zinsen vor.

Ferner ist das Versicherungsunternehmen dem Ausfallrisiko der Gegenpartei der Swaption ausgesetzt, da die Swaption über die lange Laufzeit OTC abgeschlossen wird.