DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 23. Oktober 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 32 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Portfoliotheorie und -management: Faktormodelle] [10 Punkte]*

Betrachten Sie einen Investor, der seine Entscheidungen nach dem Erwartungswert-Varianz-Kriterium (EV-Investor) trifft.

(a) *[5 Punkte]* Das Markowitz-Einperioden-Modell ist renditebasiert, d. h. verwendet Erwartungswerte und Varianzen der Renditen der Kapitalanlagen. Erläutern Sie, inwiefern sich das Startvermögen V_0 des EV-Investors am Periodenanfang in seinen Präferenzen für den Portfoliowert V_1 am Periodenende widerspiegelt und weshalb der Wert des Portfolios deshalb bei iterativer Anwendung des EV-Kriteriums für Mehrperiodenentscheidungen nicht ignoriert werden kann.

(b) *[5 Punkte]* Betrachten Sie eine Investitionsentscheidung für zwei sukzessive Perioden $[0,1]$ und $[1,2]$. Nehmen Sie an, dass der Investor zum Zeitpunkt 1 (d. h. zu Beginn der zweiten Periode), gegeben den Portfoliowert $V_1 = v$, die Zielfunktion

$$f(v) := \mathrm{E}[V_2 \mid V_1 = v] - \gamma \cdot \mathrm{Var}(V_2 \mid V_1 = v)$$

für den Portfoliowert V_2 zum Zeitpunkt 2 (d. h. zum Ende der zweiten Periode) maximiert, wobei E den Erwartungswert, Var die Varianz bezeichnet und $\gamma > 0$ ist. Der Erwartungswert des von V_1 abhängigen optimalen Wertes der Zielfunktion, d. h. $\mathrm{E}[f(V_1)]$, wird dann durch die Investitionsentscheidung für die erste Periode maximiert. Erklären Sie, weshalb diese Investitionsentscheidung nicht äquivalent zur Einperiodenmaximierung des EV-Kriteriums in der Periode $[0,2]$ ausfällt, und interpretieren Sie den Unterschied der Zielfunktionen.

Hinweis. Für Zufallsvariablen X und Y mit endlichen Varianzen gilt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X|Y]).$$

Lösungsskizze:

(a) Auf der Ebene der zufälligen Portfoliowerte V_1 nach einer Periode sind die individuellen Präferenzen des EV-Investors, gegeben das Startvermögen V_0, bestimmt durch ein Präferenzfunktional der Form

$$\Phi(V_1, \gamma) = \mathrm{E}[V_1] - \gamma\,\mathrm{Var}(V_1)$$

mit einem Risikoaversionsparameter $\gamma > 0$. Dargestellt über die zufällige Einperiodenrendite R gilt

$$\begin{aligned}\Phi(V_1, \gamma) &= \mathrm{E}[V_0(1+R)] - \gamma\,\mathrm{Var}(V_0(1+R)) \\ &= V_0 + V_0\,\mathrm{E}[R] - \gamma \cdot (V_0)^2 \cdot \mathrm{Var}(R) \\ &= V_0(1 + \tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot V_0))\end{aligned}$$

mit dem Präferenzfunktional $\tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot V_0) = \mathrm{E}[R] - \gamma \cdot V_0 \cdot \mathrm{Var}(R)$ auf Renditeebene, dessen Risikoaversionsparameter $\gamma \cdot V_0$ explizit vom Startvermögen abhängt. Zur Portfoliooptimierung ist es äquivalent, auf Renditeebene bezüglich $\tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot V_0)$ oder auf Wertebene bezüglich $\Phi(V_1, \gamma)$ zu optimieren.

Optimiert man im Mehrperiodenkontext, so ist der Risikoaversionsparameter abhängig vom Portfoliowert am Periodenanfang und muss entsprechend im Präferenzfunktional auf Renditeebene adjustiert werden.

(b) Bei der Zweiperiodenentscheidung wird in der zweiten Periode in Abhängigkeit des Portfoliowertes $V_1 = v$ zum Zeitpunkt 1

$$\mathrm{E}[V_2 | V_1 = v] - \gamma \cdot \mathrm{Var}(V_2 | V_1 = v)$$

optimiert, um dann in der ersten Periode

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[V_2|V_1] - \gamma \cdot \mathrm{Var}(V_2|V_1)\right] = \mathrm{E}[V_2] - \gamma \cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(V_2|V_1)\right]$$

zu optimieren. Wegen $\mathrm{Var}(V_2) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(V_2|V_1)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[V_2|V_1])$ unterscheidet sich die Zielfunktion der Zweiperiodenentscheidung von der Einperiodenentscheidung für die Periode $[0, 2]$ um den Term $\gamma \cdot \mathrm{Var}(\mathrm{E}[V_2|V_1])$. Bei der Zweiperiodenentscheidung berücksichtigt der EV-Investor bei der Portfoliowahl zum Zeitpunkt 1 lediglich die für die Restperiode $[1, 2]$ verbleibende Unsicherheit $\mathrm{E}[\mathrm{Var}(V_2|V_1)]$, die geringer ausfällt als $\mathrm{Var}(V_2)$.

Aufgabe 2. *[Portfoliotheorie und -management: Sicherungsstrategien für Portfolios und Hedging mit Futures] [20 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* (Sicherungsstrategien für Portfolios)

Betrachten Sie ein Portfolio mit Anfangswert $V_0 = 100$ in $t = 0$, für welches eine CPPI-Strategie mit dem Multiplikator $m = 3$ und konstantem Floor $F = 75$ umgesetzt wird. Der risikolose Zinssatz beträgt $i = 0\%$. Die Wertentwicklung des riskanten Assets ist gegeben durch:

Zeit t	0	1	2	3
Wert S_t	12.500	13.000	13.780	12.126
Periodenrendite r_t^S	-	+4%	+6%	-12%

(i) *[4 Punkte]* Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, sodass die fehlenden Werte aus der Umsetzung der oben beschriebenen CPPI-Strategie folgen.

t	S_t Wertent-wicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Um-schichtung	B_{t+1} vor Um-schichtung
0	-	100						
1	4%							
2	6%							
3	-12%		75	-	-	-	-	-

Hierbei bezeichnen V_t das Vermögen, F_t den diskontierten Floor, CU_t den Risikopuffer, E_t das Exposure in der risikobehafteten Assetklasse sowie B_t den Anteil in der risikolosen Assetklasse zum Zeitpunkt t.

(ii) *[5 Punkte]* Der Investor entscheidet sich anstatt einer CPPI-Strategie eine TIPP-Strategie umzusetzen. Unter sonst gleichen Parametern soll der Floor F_t 75% des aktuellen Vermögens V_t betragen. Der Floor wird nur nach oben angepasst; fallen die Aktien bleibt der Floor auf dem aktuellen Niveau konstant.

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, sodass die fehlenden Werte aus der Umsetzung der TIPP-Strategie folgen.

t	S_t Wertent-wicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Um-schichtung	B_{t+1} vor Um-schichtung
0	-	100						
1	4%							
2	6%							
3	-12%			-	-	-	-	-

(iii) *[3 Punkte]* Bei welchen Aktienmarktverläufen entwickelt sich die TIPP-Strategie ähnlich der CPPI-Strategie? Bei welchen Aktienmarktverläufen entspricht ihre Performance eher der einer klassischen Buy-and-Hold-Strategie? Begründen Sie Ihre Antwort *kurz*.

(b) *[8 Punkte]* (Hedging mit Futures)

Ein Investor möchte sein Aktienportfolio mit DAX-Index-Futures gegen Kursschwankungen absichern. Aktuell werden folgende Positionen gehalten:

i	**Aktie**	**Anzahl**	**Preis in €**	**Marktwert** MW_i **in €**	**Beta-Faktor** β_i
1	Adidas	25.000	225	5.625.000	1,0
2	Deutsche Post	50.000	26	1.300.000	0,9
3	Daimler	25.000	30	750.000	1,6
4	Deutsche Börse	75.000	121	9.075.000	1,4
	Gesamt	-	-	16.750.000	-

Der Index steht aktuell bei 10.700 Punkten. Der DAX-Index-Future hat einen Kontraktwert von 25 € pro Indexpunkt und handelt aktuell bei 10.650 Punkten.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie das Beta des Portfolios.

(ii) *[2 Punkte]* Wie viele Kontrakte müssen verkauft/gekauft werden, um das Portfolio gegen Kursschwankungen abzusichern?

Einige Monate später steigt der Aktienmarkt entgegen der Erwartung, der DAX steht bei 12.500 Punkten und der DAX-Index-Future handelt bei 12.550 Punkten. Der Wert des Portfolios ist auf 21,0 Mio. € gestiegen.

(iii) *[2 Punkte]* Wie hoch fällt der Gewinn/Verlust des Portfolios, der Future-Position sowie insgesamt aus?

(iv) *[1 Punkt]* Wie bezeichnet man das Risiko, das im konkreten Fall dafür verantwortlich ist, dass keine Vollsicherung eingetreten ist?

(v) *[1 Punkt]* Nennen Sie zwei Punkte, die bei der Schätzung der Beta-Faktoren zu beachten sind.

Lösungsskizze:

(a) (i)

t	S_t Wertentwicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Umschichtung	B_{t+1} vor Umschichtung
0	-	100,00	75,00	25,00	75,00	25,00	78,00	25,00
1	4%	103,00	75,00	28,00	84,00	19,00	89,04	19,00
2	6%	108,04	75,00	33,04	99,12	8,92	87,22	8,92
3	-12%	96,14	75,00	-	-	-	-	-

(ii)

t	S_t Wertentwicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Umschichtung	B_{t+1} vor Umschichtung
0	-	100,00	75,00	25,00	75,00	25,00	78,00	25,00
1	4%	103,00	77,25	25,75	77,25	25,75	81,89	25,75
2	6%	107,64	80,73	26,91	80,73	26,91	71,04	26,91
3	-12%	97,95	-	-	-	-	-	-

(iii) In stetig fallenden Aktienmärkten wird der Floor der TIPP-Strategie nicht angepasst und sie entwickelt sich analog zur CPPI-Strategie. In stetig steigenden Aktienmärkten wird der Floor der TIPP-Strategie sukzessive nach oben angepasst und das Aktieninvestment nicht stark erhöht. Ihre Performance entwickelt sich ähnlich der Buy-and-Hold-Strategie.

(b) (i) Das abzusichernde Portfolio hat einen Marktwert MW von 16,75 Mio. € und ein Beta von 1,24 zum DAX:

$$\beta = \sum_{i=1}^{4} \beta_i \cdot \frac{\text{MW}_i}{\text{MW}} = 1,24.$$

(ii) Die Anzahl zu erwerbender Kontrakte ergibt sich aus

$$\begin{aligned} q &= \text{HR} \cdot \frac{\text{Kurswert Kassaposition}}{\text{Kurswert Future}} \\ &= 1,24 \cdot \frac{16.750.000}{25 \cdot 10.650} = 77,75 (\approx 78 \text{ Kontrakte}). \end{aligned}$$

Es werden bei kaufmännischer Rundung also 78 Kontrakte des DAX-Index-Future zu einem Preis von 10.650·25 € verkauft.

(iii) Gewinn Portfolio: 21.000.000 €- 16.750.000 €=4.250.000 €

Verlust Futures: (10.650 - 12.550)·25 €·78=-3.705.000 €

Gesamt: 4.250.000 € - 3.705.000 €= 545.000 €

(iv) Cross-Hedge-Risiko: Das Portfolio besteht nicht aus allen im Hedge-Index enthaltenen Titeln. Abweichende Gewichte.

(v)
- Nichtlineare Bewegungen werden nicht erfasst.
- Je niedriger das Bestimmtheitsmaß R^2 ist, desto geringer sind Stabilität und Verlässlichkeit der Hedge Ratio.
- Pricing von Index und Einzeltitel muss synchron sein (gleichzeitige Preisfeststellung zur korrekten Ermittlung des historischen Zusammenhangs).
- Die Länge der Historie zur Bestimmung des Betas sollte sich am Absicherungshorizont orientieren.

[Bemerkung: Zu nennen sind nur zwei Punkte.]

Aufgabe 3. *[Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein risikobehafteter Zerobond mit einer Laufzeit von 20 Jahren, einem momentanen Preis von 102% und einer Rückzahung in Höhe von 100% des Nennwerts zu Ende der Laufzeit. Die aktuelle bewertungsrelevante risikofreie Zerozinskurve sei konstant bei -0,5%.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den impliziten Spread (Z-Spread) des Zerobonds.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die Marktwertänderung, wenn sich der Spread um 1%-Punkt erhöht.

(iii) *[2 Punkte]* Treffen Sie ohne Rechnung die Aussage, ob die absolute Marktwertänderung des ursprünglichen Zerobonds bei Rückgang der Zinskurve um 1%-Punkt größer als 18% sein wird. Verwenden Sie vorherige Ergebnisse zur Begründung.

(b) *[8 Punkte]* Sie arbeiten im Risikomanagement für ein Lebensversicherungsunternehmen. Ihr Vorstand möchte das Zinsrisiko der Eigenmittel reduzieren. Dabei verringern sich die Eigenmittel momentan bei einem parallelen Absinken der Zinskurve. Ihr Vorstand besteht darauf, ein Durationsmatching der Aktiv- und Passivseite durchzuführen.

Marktwert der Passivseite: 900 Mio. €
Marktwert der Aktivseite: 1.000 Mio. €
effektive Duration der Passivseite: 15
effektive Duration der Aktivseite: 11

Am Markt können Sie 30-jährige französische Staatsanleihen mit effektiver Duration von 25 in beliebigen Volumina kaufen.

(i) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass Sie anstelle eines Durationsmatchings equivalent auch ein DV01-Matching durchführen können. Schreiben Sie dazu die allgemeine Gleichung für das Durationsmatching auf und überführen Sie diese in eine Darstellung, die nicht mehr Durationen, sondern DV01 verwendet.

Erinnerung: DV01 = negative absolute Änderung des Marktwertes bei Anstieg der Zinskurve um 1 Basispunkt. Gehen Sie davon aus, dass DV01 bei entsprechender Skalierung die effektive Duration gut beschreibt.

(ii) *[1 Punkt]* Berechnen Sie DV01 für die Aktiv- sowie Passivseite.

(iii) *[5 Punkte]* Ihr Vorstand entscheidet, dass Sie ein DV01-Matching ausschließlich mit den französischen Staatsanleihen durchführen sollen. Um den Anleihekauf zu finanzieren, haben Sie ausreichend Cash (DV01=0) zur

Verfügung. Sie wissen, dass eine Erhöhung der Duration der Aktivseite eine Erhöhung der Duration der Passivseite bewirkt, und gehen aufgrund letzter Analysen davon aus, dass eine Erhöhung des DV01 der Aktivseite im gleichen Zuge eine Erhöhung des DV01 der Passivseite um den Faktor 0,2 der Erhöhung des DV01 der Aktivseite bewirkt.

Berechnen Sie die Höhe des Volumens der französischen Staatsanleihe, das Sie für Cash kaufen, um die Durationslücke zu schließen. Gehen Sie bei Ihren Berechnungen alternativ davon aus,

- dass sich die Zinssensitivität der Passivseite durch Verlängerung der Bondduration nicht verändert,
- dass die zuvor beschriebene dynamische Änderung der Duration der Passivseite eintritt.

Vergleichen Sie beide Resultate.

(c) *[6 Punkte]* Bewertung und Modellierung

(i) *[1 Punkt]* Nennen Sie den Grund, warum es nicht sinnvoll möglich ist, eine deterministische Bewertung eines Callable Bonds durchzuführen.

(ii) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Vorteile und zwei Nachteile bei der Verwendung von rekombinierenden Bäumen zur Bewertung von zinssensitiven Finanzpositionen.

(iii) *[2 Punkte]* Nennen Sie mit kurzer Begründung einen Finanztitel, bei dem die effektive Zinsduration der effektiven Spreadduration entspricht und einen Finanztitel, bei dem die effektive Zinsduration im Allgemeinen ungleich der effektiven Spreadduration ist.

(iv) *[1 Punkt]* Nennen Sie ein Verfahren, um implizite Spreads von festverzinslichen Anleihen zu bestimmen.

Lösungsskizze:

(a) (i)

$$\begin{aligned} 102\% &= \frac{100\%}{(1 + \text{Zins} + \text{Z-Spread})^{20}} \\ \Leftrightarrow \quad \text{Z-Spread} &= 102\%^{-\frac{1}{20}} - (1 - 0{,}5\%) \\ \Rightarrow \quad \text{Z-Spread} &\approx 0{,}40\% \end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{MW}_{+1\%} = \frac{100\%}{(1-0{,}5\%+0{,}4\%+1\%)^{20}} \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{MW}_{+1\%} \approx 83{,}6\% \\
\Rightarrow\ & \Delta\mathrm{MW} = \mathrm{MW}_{+1\%} - \mathrm{MW} \approx 83{,}6\% - 102\% = -18{,}4\%
\end{aligned}
$$

(iii) Wegen der Konvexität von Plain Vanilla Bonds und da parallele Zinsänderungen und Spreadänderungen bei Plain Vanilla Bonds die gleiche Marktwertänderung ergeben, wird die absolute Marktwertänderung größer als in (ii) ausfallen, damit größer als 18,4% sein und insbesondere also größer als 18% sein.

(b) (i) Es seien:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{A,L} & \ \ldots\ \text{Duration der Assets, Liabilities} \\
\mathrm{MV}_{A,L} & \ \ldots\ \text{Marktwert der Assets, Liabilities} \\
\mathrm{DV01}_{A,L} & \ \ldots\ \text{DV01 der Assets, Liabilities}
\end{aligned}
$$

Annahme laut Voraussetzung:

$$
\mathrm{D}_{\mathrm{A,L}} := \frac{\mathrm{DV01}_{\mathrm{A,L}}}{10000 \cdot \mathrm{MV}_{\mathrm{A,L}}}
$$

Für alle parallelen Zinsänderungen Δ_{Zins} soll approximativ gelten:

$$
\begin{aligned}
& 0 = (\mathrm{D}_A \cdot \mathrm{MV}_A - \mathrm{D}_L \cdot \mathrm{MV}_L) \cdot \Delta_{Zins}, \\
\Leftrightarrow\ & 0 = \left(\frac{\mathrm{DV01}_A}{10000 \cdot \mathrm{MV}_A} \cdot \mathrm{MV}_A - \frac{\mathrm{DV01}_L}{10000 \cdot \mathrm{MV}_L} \cdot \mathrm{MV}_L \right) \cdot \Delta_{Zins}, \\
\Leftrightarrow\ & 0 = (\mathrm{DV01}_A - \mathrm{DV01}_L) \cdot \Delta_{Zins}, \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{DV01}_A = \mathrm{DV01}_L\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Mithilfe der angegebenen effektiven Duration wird die absolute Änderung bei einem 1 Basispunkt Shift der Zinskurve berechnet.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DV01}_L &= \frac{\mathrm{D}_L \cdot \mathrm{MV}_L}{10000} = 1,35 \text{ Mio. } € \\
\mathrm{DV01}_A &= \frac{\mathrm{D}_A \cdot \mathrm{MV}_A}{10000} = 1,10 \text{ Mio. } €
\end{aligned}
$$

(iii) Statische Duration der Passivseite:

$$
\mathrm{DV01}_A + x = \mathrm{DV01}_L
$$

$$x = \text{DV01}_L - \text{DV01}_A = 1,35 \text{ Mio. €} - 1,10 \text{ Mio. €} = 0,25 \text{ Mio. €}$$

Es werden zusätzliche Assets mit $\text{DV01} = 0,25$ Mio. € benötigt.

Dynamische Duration der Passivseite:

$$\text{DV01}_A + x = \text{DV01}_L + 0,2 \cdot x$$

$$x = (\text{DV01}_L - \text{DV01}_A)/0,8 = (1,35 \text{ Mio. €} - 1.10 \text{ Mio. €})/0,8 = 0,3125 \text{ Mio. €}$$

Es werden zusätzliche Assets mit $\text{DV01} = 0,3125$ Mio. € benötigt.

Der zu erwerbende Marktwert MV der 30-jährige französische Staatsanleihe mit effektiver Duration 25 ist nun bestimmt durch die Bedingung

$$\text{DV01} = \frac{25 \cdot \text{MV}}{10000}.$$

Somit ergeben sich als benötigte Volumina zur Schließung der Durationslücke (finanziert durch Cash):

- Statische Duration: $\text{MV} = \frac{0,25 \text{ Mio. €} \cdot 10000}{25} = 100$ Mio. €
- Dynamische Duration: $\text{MV} = \frac{0,3125 \text{ Mio. €} \cdot 10000}{25} = 125$ Mio. €

Bei Berücksichtigung der Änderung der Sensitivität der Passivseite bei Änderung der Sensitivität der Aktivseite muss ein um 25 Mio. € höherer Betrag an Investments getätigt werden.

(c) (i) Die Optionalität des Kündigungsrechts kann nicht sinnvoll deterministisch bewertet werden.

(ii) Vorteile:

1) Schnelle Bewertung, weil wenige Knoten im Baum vorhanden sind (Mehrfachverwendung für unterschiedliche Pfade)

2) Relativ einfach zu implementieren

Nachteile:

1) Konvergenz kann deutlich langsamer sein, wenn es sich um pfadabhängige Finanzpositionen handelt (wegen doppelter Nutzung von Knoten)

2) Eingeschränkte Komplexität der Zinsmodelle, die in rekombinierenden Bäumen darstellbar sind

[Weitere Nennungen von Vor- und Nachteilen sind möglich.]

(iii) Beispiele, bei denen die effektive Zinsduration gleich der Spreadduration ist: Plain Vanilla Coupon/Zero Bond; Begründung: Zins- und Spreadänderungen bewirken in analoger Weise eine Änderung des Diskonts

Beispiele, bei denen i. A. die effektive Zinsduration ungleich der Spreadduration ist: Floater, Constant-Maturity-Swaps (CMS), Fix-to-Float, Float-to-Fix, Fix-to-CMS, CMS-to-Fix; Begründung: Zinsänderungen bewirken eine Änderung des Kupons im Gegensatz zu Spreadänderungen

[Zu nennen ist jeweils nur ein Beispiel, weitere Nennungen sind möglich.]

(iv) Beispiele: Intervallhalbierungsverfahren, Newton-Verfahren

[Weitere Nennungen sind möglich; nur ein Verfahren sollte genannt werden.]

Aufgabe 4. *[Risikomanagement von Optionen] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gegeben sei eine Einheit eines (dividendenfreien) Basisobjekts mit Kursverlauf $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$. Zusätzlich zu dieser Basisposition werden eine Put-Option auf dieses Basisobjekt mit Laufzeit T, Ausübungspreis K_1 und Kursverlauf $\{P_t; 0 \leq t \leq T\}$ gekauft sowie eine Call-Option auf dieses Basisobjekt mit Laufzeit T, Ausübungspreis K_2 (wobei $K_2 > K_1$) und Kursverlauf $\{C_t; 0 \leq t \leq T\}$ verkauft. Die entsprechende Kombinationsposition wird als *Collar* bezeichnet.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie die Gewinn/Verlust-Position G_T des Collars in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T zum Zeitpunkt T an. Vernachlässigen Sie dabei Zinseffekte.

(ii) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gewinn/Verlust-Position in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T graphisch dar.

(b) *[6 Punkte]* Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell, in dem der Aktienpreisprozess unter dem real-world Maß P gegeben ist durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \geq 0,$$

wobei W ein Wiener-Prozess ist sowie $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ den Drift- bzw. Volatilitätsparameter bezeichnen. Der Preis P_t einer Europäischen Put-Option auf die Aktie mit Maturität T im Zeitpunkt t ist gegeben als $v(x, \tau)$, wobei x der Aktienkurs in t ist und $\tau = T - t$ die Restlaufzeit darstellt.

(i) *[3 Punkte]* Erklären Sie, wie die Sensitivität „Delta“ der Put-Option in kleinen Zeitintervallen approximativ zur Absicherung einer Put-Optionsposition gegen Wertänderungen in der Basisposition „Aktie“ verwendet werden kann (Delta-Hedge). Wie kann umgekehrt die Wertänderung in der Aktie durch Put-Optionen abgesichert werden?

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau λ über das Zeitintervall $[t, t+h]$ für den Gewinn/Verlust einer Put-Position auf der Basis einer Delta-Approximation unter Berücksichtigung der tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung des Inkrements $S_{t+h} - S_t$ des Aktienpreisprozesses (*Delta-Exakt-Approximation*).

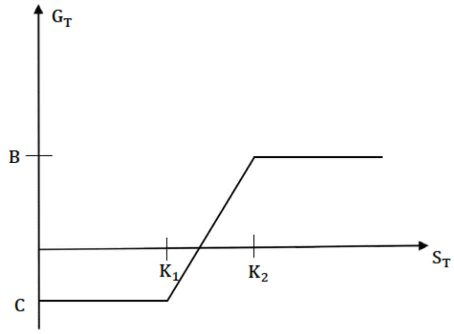
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregel zur Quantiltransformation. Bitte beachten Sie dabei, dass das Delta der Put-Option negativ ist.

Lösungsskizze:

(a) (i) Es gilt mit $A = P_0 + S_0 - C_0$

$$\begin{aligned} G_T &= S_T + \max\{K_1 - S_T, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\} - A \\ &= \begin{cases} K_2 - A & \text{für } S_T \geq K_2, \\ S_T - A & \text{für } K_1 \leq S_T < K_2, \\ K_1 - A & \text{für } S_T < K_1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Graphische Darstellung ($B = K_2 - A$, $C = K_1 - A$)



(b) (i) Ist $(S_t)_{t\geq 0}$ der Preisprozess der Aktie, so gilt approximativ für die Wertänderung des Optionspreises in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$P_{t+h} - P_t = v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t)$$

mit $\Delta(S_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, \tau)|_{x=S_t}$. Dies erlaubt, die Optionsposition gegen Preisänderungen des Basiswertes im Zeitintervall $[t, t+h]$ abzusichern, indem $\Delta(S_t, \tau)$-Einheiten der Aktie im Zeitpunkt t gekauft und bis $t+h$ gehalten werden. Dadurch wird eine Position im Basiswert aufgebaut, deren Wertänderungen bei Preisbewegung den Wertänderungen der Optionsposition genau entgegengesetzt sind. Das resultierende Portfolio aus Option und Basisposition hat dann ein Gesamt-Delta von Null (Δ-neutral).

Umgekehrt sind $1/\Delta(S_t, \tau)$-Einheiten der Put-Option zu verkaufen, um die Änderung in der Basisposition zu kompensieren.

(ii) Für die Wertänderung der Put-Option gilt approximativ

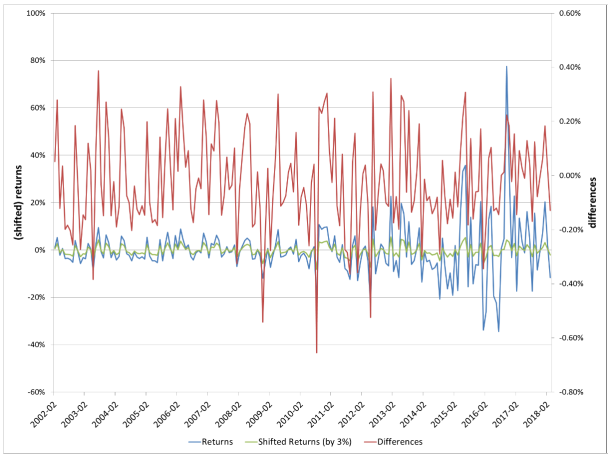
$$\Delta P = P_{t+h} - P_t \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t) = \Delta(S_t, \tau) S_t (e^{\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h} - 1),$$

also mithilfe der Regel für die Quantiltransformation

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}_\lambda(\Delta P) &\approx \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1)) \\
&= -q_{\Delta(S_t,\tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h)-1)}(\lambda) \\
&= -\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma q_{W_{t+h}-W_t}(1-\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1) \\
&= -\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(1-\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - real-world] [33 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Die folgende Graphik zeigt die historischen monatlichen Änderungen des Risikofaktors „10-jährige EUR-Swaprate" anhand der Größen *Returns*, *Shifted Returns* und *Differenzen*.



(i) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie zwei dieser Größen zur Modellierung der realistischen Änderung eines Risikofaktors rf vom Zeitpunkt t zu $t + \Delta$ formal.

(ii) *[5 Punkte]* Beschreiben und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen für die historischen Änderungen der 10-jährigen EUR-Swaprate. Begründen Sie anschließend, mit welcher der drei Größen Sie die realistische Änderung des Risikofaktors „10-jährige EUR-Swaprate" modellieren würden.

(b) *[10 Punkte]* Sie sollen die realistische Entwicklung der 5-jährigen EUR-Spotrate über einen Zeithorizont von einem Jahr modellieren. Dazu sollen Sie zum einen jährliche Differenzen und zum anderen jährliche shifted Log-Returns mit einem Shift-Parameter $\delta = 2\%$ verwenden, beide unter Normalverteilungsannahme. Die annualisierten Volatilitäten dieser beiden Zielgrößen betragen für

- Differenzen: 0,55%,
- Shifted Log-Returns: 6,36%.

Die Mittelwerte der Normalverteilung betragen in beiden Fällen 0. Die 5-jährige EUR-Spotrate zum Stichtag lag bei -0,25%.

(i) *[4 Punkte]* Ermitteln Sie für beide Modelle das $0,5\%$-Quantil der Verteilung der 5-jährigen EUR-Spotrate für ein Jahr nach dem Stichtag.

(ii) *[4 Punkte]* Wie ändern sich diese Werte, wenn der Stichtagswert der 5-jährigen EUR-Spotrate bei 5% liegen würde?

(iii) *[2 Punkte]* Worauf sind die Unterschiede zwischen (i) und (ii) zurückzuführen?

Hinweis: Das 0,5%-Quantil der Standardnormalverteilung liegt bei -2,57583.

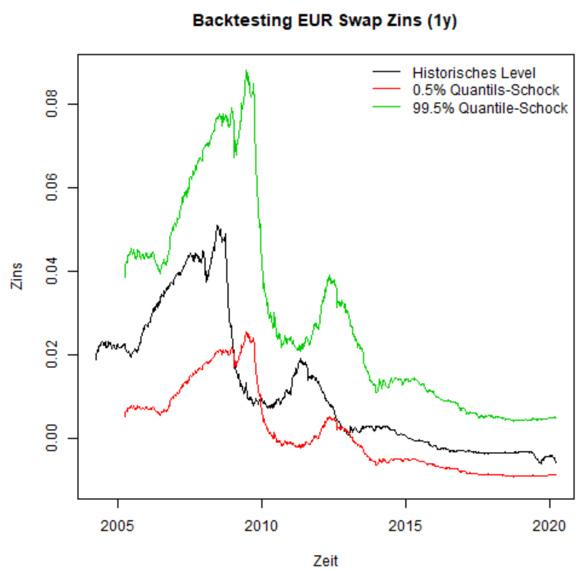
(c) *[10 Punkte]* Zum Stichtag betragen der risikofreie Zinssatz in EUR zur Laufzeit 5 Jahre -0,25% sowie der Spread einer BBB gerateten Unternehmensanleihe ohne Kuponzahlungen aus dem EUR-Raum zur Laufzeit 5 Jahre 0,65%.

(i) *[4 Punkte]* Ermitteln Sie daraus die vom Markt eingepreiste annualisierte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, risk neutral})}$ dieses Titels unter der Annahme, dass eine Recovery Rate von 25% vorliegt.

(ii) *[3 Punkte]* Empirische Untersuchungen über einen längeren Zeitraum liefern Auskunft über die tatsächlich realisierten Ausfälle eines solchen Titels. Erläutern Sie, wo sich diese Ausfallrate $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})}$ im Vergleich zu dem Wert aus (i) in der Regel befindet und wie sich dieser Unterschied begründen lässt.

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum es aufgrund der Aussage in (ii) insbesondere für Versicherer lukrativ sein kann, solche Investments zu tätigen.

(d) *[6 Punkte]* Die folgende Graphik visualisiert das Backtesting für den Risikofaktor „1-jährige EUR-Swaprate" im Kontext von real-world Szenarien.



Beschreiben Sie *stichpunktartig* das methodische Vorgehen, das zu dieser Graphik führt. Diskutieren Sie die Darstellung anschließend inhaltlich und kommentieren Sie die Eignung des zugrunde liegenden Zinsmodells.

Lösungsskizze:

(a) (i) 1. Returns:

- Zielgröße ist $\text{ret}(t) = \frac{\text{rf}(t+\Delta)}{\text{rf}(t)} - 1$.
- Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t)(1+\text{ret}(t))$

2. Shifted Returns:

- Zielgröße ist $\text{shifted.ret}(t) = \frac{\text{rf}(t+\Delta)+\delta}{\text{rf}(t)+\delta} - 1$.
- Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = (\text{rf}(t)+\delta)\cdot(1+\text{shifted.ret}(t)) - \delta$

3. Differenzen:

- Zielgröße ist $\text{diff}(t) = \text{rf}(t+\Delta) - \text{rf}(t)$.
- Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t) + \text{diff}(t)$

[Es sind nur zwei Größen zu beschreiben.]

(ii) Man beobachtet in jüngster Zeit stark wachsende Returns, da das Level weiter abgefallen ist. Eine Modellierung mit statischen Parametern ist nicht empfehlenswert. Differenzen sind deutlich homogener, dafür sind teilweise sehr tiefe Ausschläge zu beobachten, die auf eine Linksschiefe der Verteilung hindeuten. Die Shifted Returns verhalten sich über die gesamte Zeitreihe wie die Returns zu Beginn der Historie und zeigen keine starke Zeitabhängigkeit oder extremen Ausschläge. Eine Modellierung durch Shifted Returns oder Differenzen wäre aus diesen Gründen zu bevorzugen.

(b) (i) Für Differenzen $r_5(t+1) = r(t) + \text{diff}(1) = -0,0025 + \text{diff}(1)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0;(0,055)^2)$ gilt für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}(-0,0025 + \text{diff}(1)) = -0,0025 + q_{0,5\%}(\text{diff}(1)) \\ &= -0,0025 - 0,0055 \cdot 2,57583 = -1,67\%. \end{aligned}$$

Für shifted Log-Returns gilt

$$\begin{aligned} r_5(t+1) &= (r(t)+\delta)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - \delta \\ &= (-0,0025 + 0,02)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,02 \end{aligned}$$

mit $\text{shifted.log.ret}(1) \sim \mathcal{N}(0,(0,0636)^2)$ und damit für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}((-0,0025 + 0,02)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,02) \\ &= (-0,0025 + 0,02)e^{q_{0,5\%}(\text{shifted.log.ret}(1))} - 0,02 \\ &= (-0,0025 + 0,02)e^{-0,0636\cdot 2,57583} - 0,02 = -0,51\%. \end{aligned}$$

(ii) Analog zu (i) folgt: Für Differenzen $r_5(t+1) = r(t) + \text{diff}(1) = 0,05 + \text{diff}(1)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0;(0,0055)^2)$ gilt für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}(0,05 + \text{diff}(1)) = 0,05 + q_{0,5\%}(\text{diff}(1)) \\ &= 0,05 - 0,0055 \cdot 2,57583 = 3,58\%. \end{aligned}$$

Für shifted Log-Returns gilt

$$\begin{aligned} r_5(t+1) &= (r(t)+\delta)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - \delta \\ &= (0,05+0,02)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,02 \end{aligned}$$

mit $\text{shifted.log.ret}(1) \sim \mathcal{N}(0,(0,0636)^2)$ und damit für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}((0,05+0,02)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,02) \\ &= (0,05+0,02)e^{q_{0,5\%}(\text{shifted.log.ret}(1))} - 0,02 \\ &= (0,05+0,02)e^{-0,0636\cdot 2,57583} - 0,02 = 3,94\%. \end{aligned}$$

(iii) Bei (i) führten Differenzen zu einem deutlich extremeren Quantil als die shifted Log-Returns, während sich dieser Effekt bei (ii) abschwächt und dort die shifted Log-Returns und Differenzen ein ähnliches Level für das $0,5\%$-Quantil aufweisen. Die Stresshöhe ist bei Differenzen immer dieselbe und hängt nicht vom Stichtagswert des Risikofaktors ab, während dies bei shifted Log-Returns der Fall ist. Bei einem relativ niedrigen Ausgangswert von $-0,25\%$ fällt der Stress bei shifted Log-Returns daher noch sehr gering aus (-26 bp), aber steigt bei dem höheren Ausgangswert von 5% stark an (-106 bp). Dies ist eine Konsequenz der Eigenschaften der shifted Log-Returns (und wird auch als „Elastizität" bezeichnet).

(c) (i) Das Nominal wird gleich 1 gesetzt. Dann gilt für den Marktpreis der Anleihe

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = (1 - 0,0025 + 0,0065)^{-5} = 0,9802$$

sowie für den Preis einer analogen risikofreien Anleihe

$$\text{ZCB}_5 = (1 - 0,0025)^{-5} = 1,0126.$$

Für diese Preise besteht bei risikoneutraler Bewertung der Zusammenhang

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = \text{ZCB}_5(p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} \cdot 1 + (1 - p_5^{(\text{survive,risk-neutral})}) \cdot 1 \cdot \text{RR}),$$

wobei RR die Recovery Rate bezeichnet. Daraus folgt

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = \frac{\text{Preis}_5^{\text{BBB}} / \text{ZCB}_5 - \text{RR}}{1 - \text{RR}} = 0,9574.$$

Es gilt somit

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = (p_{\text{annualized}}^{(\text{survive,risk-neutral})})^5 = (1 - p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})})^5$$

und somit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})} = 1 - 0,9574^{1/5} = 0,87\%$

(ii) Die tatsächlich realisierte annualisierte Ausfallrate eines solchen Titels $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$ liegt in der Regel deutlich unterhalb von $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, risk-neutral)}}$ aus (i). Dies liegt daran, dass Investoren für die Möglichkeit des Ausfalls (aber auch für die potentiell niedrigere Liquidität) eines solchen Titels eine Kompensation fordern, um ein solches Investment zu tätigen. Diese Kompensation („Risikoprämie“) besteht darin, dass der Marktwert einen Abschlag gegenüber dem sich aus den tatsächlich erwarteten Risiken (u. a. bemessen anhand von $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$) bemessenen Preis reflektiert, um ein solches Investment attraktiv zu machen.

(iii) Versicherer können den in (ii) beschriebenen Preisunterschied ausnutzen, da sie typischerweise als „buy-and-hold“-Investoren agieren und somit den Titel inklusive des Preisabschlags (repräsentiert u. a. durch die Differenz zwischen $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$ und $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, risk-neutral)}}$) erwerben, diesen auch in Zeiten höherer Spreads nicht verkaufen müssen und am Ende mit höherer Wahrscheinlichkeit als $p_5^{\text{(survive, risk-neutral)}}$ das Nominal zurückbezahlt bekommen. Damit können sie effektiv die Risikoprämie realisieren.

(d) Dieses Backtesting wurde wie folgt implementiert:

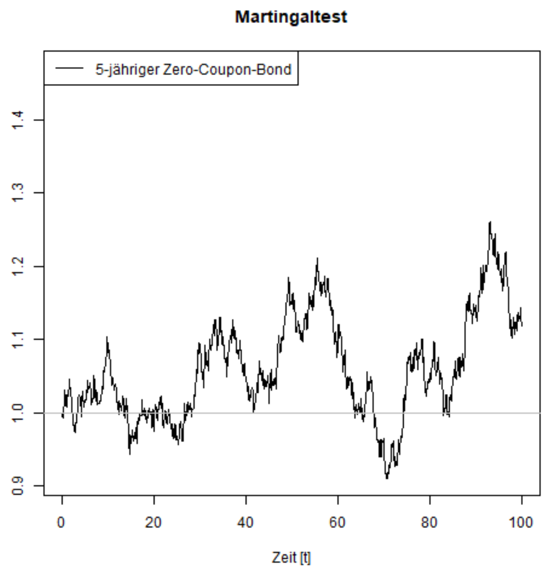
- Wende ein kalibriertes Risikofaktormodell auf alle historischen Risikofaktorwerte an und entwickle daraus die Einjahresprognose (siehe Zeitlag zu Beginn). Somit ist die Verteilung des Risikofaktorwertes in $t + 1$ bedingt auf den Risikofaktorwert rf_t zur Zeit t gegeben.
- In dieser Graphik sind nun das 99,5%- und das 0,5%-Quantil dieser Verteilungen als Prognose in die historisch realisierten Werte des Risikofaktors eingebettet.
- Die resultierende Graphik illustriert, wie wahrscheinlich die tatsächlich eingetretenen historischen Risikofaktorbewegungen unter dem kalibrierten Modell waren.

Das Backtesting für die 1-jährige EUR-Swaprate zeigt keine Überschreitungen des 99,5%-Quantils des Modells. Somit ist das Modell angemessen oder sogar konservativ hinsichtlich positiver Zinsschocks. Für negative Schocks wird das 0,5%-Quantil hingegen mehrfach unterschritten. Ein einmaliges Unterschreiten auch über mehrere Zeitpunkte in Folge wäre noch kein Grund zum Zweifel am Modell. Das mehrfache Auftauchen solcher zu optimistischer Prognosen muss allerdings zu einer kritischen Hinterfragung des Modells führen, auch wenn es weiterhin durchaus angemessen sein kann.

Aufgabe 6. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - risikoneutral] [27 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Beschreiben Sie das Anwendungsfeld für risikoneutrale Szenariogeneratoren und grenzen Sie dieses gegenüber real-world Szenariogeneratoren ab. Erläutern Sie *kurz*, wie genau die im Szenariogenerator erzeugten risikoneutralen Kapitalmarktpfade in der Anwendung genutzt werden.

(b) *[4 Punkte] Martingaltest*: Die folgende Graphik visualisiert die Ergebnisse des Martingaltests für Zero-Coupon-Bonds mit Restlaufzeit von 5 Jahren im Kontext der risikoneutralen Modellierung.



Beschreiben Sie, welche konkrete Bedingung in diesem Martingaltest geprüft wird. Geben Sie insbesondere an, wie der Wert des Graphen zum Zeitpunkt $t = 20$ formal berechnet wird. Warum ist eine solche Untersuchung im Kontext von real-world Szenarien nicht sinnvoll?

(c) *[10 Punkte] Kalibrierung*: Betrachten Sie in einem Finanzmarktmodell eine stochastische Größe (wie z. B. einen Aktienkurs), die sich gemäß einer geometrischen Brownschen Bewegung mit einem stochastischen Drift-Prozess $(\mu_t)_{t\geq 0}$ entwickelt. Der Geldmarktfonds $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Short-Rate $(r_t)_{t\geq 0}$ wird im Modell als Numéraire verwendet.

(i) *[5 Punkte]* Erläutern Sie *qualitativ*, warum im risikoneutralen Kontext der Drift kein freier Kalibrierungsparameter ist.

(ii) *[5 Punkte]* Leiten Sie *formal* ab, wie der Drift mit der Short-Rate zusammenhängt.

(d) *[8 Punkte] Kontrollvariablen*: Die folgende Tabelle stellt ein Simulationsergebnis einer Größe Y und der Kontrollvariablen X (zur Vereinfachung für eine geringe Simulationsanzahl) dar:

Beobachtung	Y	X
1	15	5
2	17	5
3	18	4
4	16	2
5	13	4
6	15	3
7	14	3
8	16	6

Der Erwartungswert der Kontrollvariablen beträgt $\mathrm{E}[X] = 2$. Bestimmen Sie zunächst die optimale Wahl des Korrekturparameters $\hat{b}$ und berechnen Sie anschließend die korrigierte Realisierung der beobachteten Variable $Y(\hat{b})$ sowie den daraus resultierenden korrigierten Mittelwertschätzer $\bar{Y}(\hat{b})$.

Lösungsskizze:

(a) Risikoneutrale Szenarien werden in diversen Anwendungen der Versicherungs- und Bankenwelt zur marktkonsistenten Bewertung zukünftigter Zahlungsströme genutzt (z. B. Bewertung von Derivaten, Bewertung versicherungstechnischer Rückstellungen, stochastische Unternehmensmodelle). Dagegen werden real-world Szenarien für realistische Projektionen von Kapitalmarktentwicklungen genutzt und kommen u. a. in internen Modellen zur Risikomessung unter Solvency II oder bei Prognoserechnungen zum Einsatz.

Die Bewertung zukünftiger Zahlungsströme erfolgt approximativ durch Monte-Carlo-Pricing, da das eigentliche Zielobjekt, der Erwartungswert der diskontierten Zahlungsströme unter einem geeignet kalibrierten risikoneutralen Maß, nicht in geschlossener Form berechnet werden kann. Beim Monte-Carlo-Ansatz wird der Barwert des Zahlungsstroms zunächst in jedem einzelnen Pfad des Szenarios ermittelt. Die Bewertung erfolgt dann als Mittelwert der pfadspezifischen Barwerte als Schätzer für den Erwartungswert.

(b) Der Martingaltest prüft im risikoneutralen Kontext auf Ebene eines simulierten Szenarios das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Für einen 5-jährigen Zero-Coupon-Bond wird hierzu formal in jedem Zeitpunkt t die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right] = \mathrm{ZCB}_{5+t}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\mathrm{ZCB}_{5+t}(0)}\,\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right]$$

mit

- B_t: Wert des Geldmarktfonds mit Startwert $B_0 = 1$ zum Zeitpunkt t
- $\mathrm{ZCB}_i(t)$: Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeit von i Jahren in t

geprüft. Der Erwartungswert bezieht sich dabei auf das risikoneutrale Maß bzw. Martingalmaß und wird als Mittelwert aus dem Szenario ermittelt.

Der Martingaltest ist erfüllt, wenn die Werte $\frac{1}{\mathrm{ZCB}_{5+t}(0)} \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right]$ „hinreichend nahe" bei 1 liegen.

In vorliegender Graphik ist der Wert für $t = 20$ gegeben als

$$\frac{1}{\mathrm{ZCB}_{25}(0)} \mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(20)}{B_{20}}\right].$$

Im real-world Kontext ist der Martingaltest nicht sinnvoll, da volatile Anlagen dort eine Risikoprämie verdienen.

(c) Kalibrierung:

(i) Als Konsequenz der Martingaleigenschaft der diskontierten Preisprozesse unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß verdient im risikoneutralen Kontext jedes Investment im Mittel grob gesprochen dieselbe risikolose Rendite. Die risikolose Rendite ist durch die Startzinskurve festgelegt, die marktkonsistent ermittelt wird. Somit kann der Drift der geometrischen Brownschen Bewegung nicht willkürlich gewählt werden, sondern ist durch die Startzinskurve festgelegt.

(ii) Die zeitliche Entwicklung der geometrischen Brownsche Bewegung mit stochastischer Drift ist gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s\, ds - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß bezeichnet.

Der mit dem Geldmarktfonds $B_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$, $t \geq 0$, diskontierte Prozess $\tilde{S}_t = S_t/B_t$, $t \geq 0$, folgt dann der Stochastischen Differentialgleichung

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu_t - r_t)\, dt + \sigma\, dW_t).$$

Da die Martingaleigenschaft nur vorliegen kann, wenn der Drift-Term verschwindet, muss gelten $\mu_t = r_t$ fast sicher.

(d) Die empirischen Mittelwerte sind gegeben durch $\bar{Y} = 15,5$ und $\bar{X} = 4$. Mithilfe der Werte in der nachfolgenden Tabelle berechnet man den Schätzer

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{8}(X_i - \bar{X})^2} = 0,25$$

sowie die Realisierungen der korrigierten Variablen $Y(\hat{b}) = Y - \hat{b}(X - \mathrm{E}[X])$.

Beobachtung	Y	X	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})\cdot(X-\bar{X})$	$Y(\hat{b})$
1	15	5	1	-0,5	14,25
2	17	5	1	1,5	16,25
3	18	4	0	0	17,50
4	16	2	4	-1	16,00
5	13	4	0	0	12,50
6	15	3	1	0,5	14,75
7	14	3	1	1,5	13,75
8	16	6	4	1	15,00

Aus der letzten Spalte folgt $\bar{Y}(\hat{b}) = 15$.

Aufgabe 7. *[Projektion von Kapitalanlagen] [20 Punkte]*

(a) *[14 Punkte]* (Bilanzierung/Modellierung von festverzinslichen Wertpapieren)

Im Geschäftsjahr 2015 erwarb die Lebensversicherung PRUDENT Anteile einer Unternehmensanleihe der TOURIBOMBER AG mit einem Gesamtnominalwert von 1 Mio. € (Stückelung in 1.000 Anteile). Die Anleihe soll bis zur Endfälligkeit im Jahr 2025 gehalten werden. In den Folgejahren entwickelte sich der Kurs pro Anteil wie folgt (Clean Price):

t	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Kurs pro Anteil in €	1.000	900	950	1.150	1.200	800

(i) *[1 Punkt]* Welche Möglichkeiten hat die PRUDENT Lebensversicherung bei der Bilanzierung der Anleihe nach HGB? Begründen Sie Ihre Antwort *kurz*.

Im Jahr 2020 verzeichnet der Tourismus aufgrund der Corona-Krise einen erheblichen Umsatzeinbruch. Dies geht auch an der TOURIBOMBER AG nicht spurlos vorüber. Allerdings gehen die Wirtschaftsprüfer davon aus, dass die Wertverluste aufgrund der großzügigen staatlichen Hilfsprogramme nicht dauerhaft sind.

(ii) *[3 Punkte]* Mit welchem Wert steht die Position bei Bilanzierung nach dem gemilderten Niederstwertprinzip in den Jahren 2015 bis 2020 in der HGB-Bilanz der PRUDENT? Ermitteln Sie jeweils die notwendigen Abschreibungen/Zuschreibungen sowie die vorhandenen stillen Reserven/Lasten.

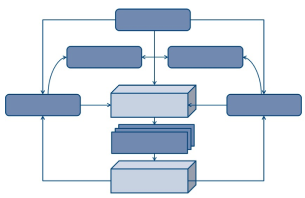
(iii) *[1 Punkt]* Wie ändert sich die Situation im Jahr 2020 unter (ii), wenn von einer dauerhaften Wertminderung auszugehen ist?

(iv) *[4 Punkte]* Wie können allgemein festverzinsliche Wertpapiere in Modellen aggregiert werden? Geben Sie vier Kriterien zur Verdichtung an. Wann ist von einer weiteren Aggregation abzusehen? Geben Sie ein konkretes Beispiel an.

(v) *[5 Punkte]* Warum können der *tatsächliche Zeitwert* und der *modelltheoretische Zeitwert* voneinander abweichen? Wie kann diese Differenz im Modell berücksichtigt werden?

(b) *[6 Punkte]* (Schnittstellen zum Gesamtunternehmensmodell)

(i) *[2 Punkte]* Skizzieren Sie das Grundmodell des Asset-Liability-Managements, indem Sie folgendes Schaubild vervollständigen.



(ii) *[2 Punkte]* Erklären Sie *kurz*, was unter dem *Wettbewerbsmodell* und unter dem *Managementmodell* zu verstehen ist.

(iii) *[2 Punkte]* Geben Sie zwei konkrete Beispiele an, wie Veränderungen in einem Modell des ALM-Grundmodells Auswirkungen auf ein anderes Modell haben können.

Lösungsskizze:

(a) (i) Eine Anleihe ist nach HGB grundsätzlich nach dem strengen Niederstwertprinzip zu bilanzieren. Da die vorliegende Unternehmensanleihe jedoch bis zur Endfälligkeit gehalten werden soll, dient diese dauerhaft dem Geschäftsbetrieb und darf im Anlagevermögen nach dem gemilderten Niederstwertprinzip bilanziert werden.

(ii)

t	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Kurs pro Anteil in EUR	1.000	900	950	1.150	1.200	800
Marktwert in TEUR	1.000	900	950	1.150	1.200	800
Buchwert in TEUR		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Zu-/Abschreibung in TEUR	-	-	-	-	-	-
Stille Reserven/Lasten in TEUR	-	-100	-50	150	200	-200

(iii) Bei einer dauerhaften Wertminderung muss nach dem gemilderten Niederstwertprinzip der Buchwert angepasst werden; er wird im Jahr 2020 um -200.000 € auf 800.000 € abgeschrieben.

(iv)

	Assetklasse	**weitere Unterteilung**
Festverzinsliche Wertpapiere	- Staatsanleihen - Pfandbriefe - Unternehmensanleihen - Investment Grade - High Yield - Financials/Non-Financials - ...	- Direkt/indirekt gehalten - Anlage-/Umlaufvermögen - Restlaufzeit - Währung - Rating - ...

Gilt eine Anlageklasse für das Unternehmen als wesentlich, so sollte diese nicht mit anderen Assetklassen aggregiert werden, sondern eigenständig modelliert werden. Mögliche Kriterien für die Wesentlichkeit einer Anlageklasse: Quantitativ, Qualitativ, Operativ/Strategisch.

Von einer weiteren Aggregation ist beispielsweise in folgenden Fällen abzusehen:

- Große Fremdwährungspositionen sollten für sich modelliert werden.

- Bei der Einführung einer neuen Assetklasse sollte diese für sich modelliert werden.

[Bemerkung: Zu nennen ist nur ein Beispiel.]

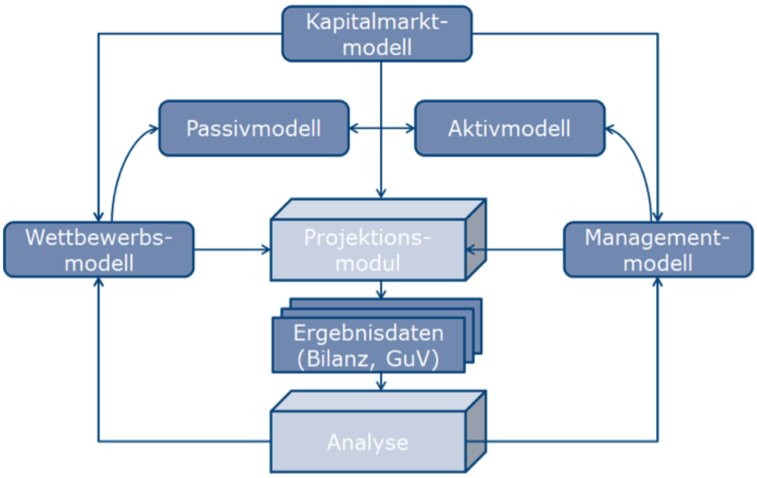
(v) Zeitwerte der Startbilanz werden durch die Modelle in der Regel nicht genau getroffen:

- Vereinfachungen im Kapitalanlagemodell (Bestandsverdichtung)
- Vereinheitlichungen im Kapitalmarktmodell (aggregierte Zins- und Spreadkurven)

Übereinstimmung der tatsächlichen Zeitwerte mit den „theoretischen“ Zeitwerten durch:

- Berechnung eines individuellen Spreads pro Modelpoint
- Anpassung des Cashflow-Profils (Nominalwert)
- Modellierung der theoretischen Zeitwerte und Skalierung der Veränderungen auf die tatsächlichen Zeitwerte

(b) (i)



(ii) Das *Wettbewerbsmodell* bezieht das Kundenverhalten mit in die Untersuchung ein.

Das *Managementmodell* reagiert durch die Implementierung dynamischer Regeln auf die Unternehmensentwicklung. Es stellt das Bindeglied zwischen den unterschiedlichen Teilmodellen dar.

(iii)
- Kapitalmarktmodell - Wettbewerbsmodell:

  Neugeschäft und Storno sind abhängig von der erwarteten Rendite der Lebensversicherung. So kann ein Boom am Aktienmarkt Lebensversicherungen unattraktiv erscheinen lassen und zu einem erhöhten Storno und einem Rückgang des Neugeschäfts führen.

- Kapitalmarktmodell - Managementmodell:

  Ein dauerhafter Einbruch der Kapitalerträge macht eine Korrektur der Überschussbeteiligung notwendig, um den Fortbestand des Unternehmens zu sichern.

- Passivmodell - Aktivmodell:

  Das Passivmodell bestimmt durch den aktuellen Liquiditätsbedarf, ob auf der Aktivseite Reserven gehoben werden müssen oder nicht.

- Kapitalmarktmodell - Managementmodell:

  Das Marktumfeld kann gewisse Entscheidungen im Management beeinflussen. So wird bei einem ausreichend hohen Zinsniveau in langlaufende festverzinsliche Anleihen investiert.

[Bemerkung: Zu nennen sind nur zwei Beispiele.]

Aufgabe 8. *[Investmentrisiken unter Solvency II] [15 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Ihr Vorstand möchte die Solvabilitätsquote Ihres Lebensversicherungsunternehmens (LVU) zum Stichtag 31.12.2019 verbessern und beschließt hierzu am 28.12.2019 folgende vier Maßnahmen. Bitte beurteilen und begründen Sie *kurz*, ob diese Maßnahmen zielführend sind:

1. Umschichtungen innerhalb des europäischen Aktienportfolios in Aktien mit geringerer Volatilität,
2. Tausch 3-jähriger Bundesanleihen in 8-jährige Bundesanleihen, um den starken Unterschied in der Duration von Aktiv- und Passivseite zu reduzieren (*Hinweis:* Risikolose Zinskurve am 31.12.2019: 3J = -0,335%; 8J =-0,018%),
3. Reduktion des Fremdkapitaleinsatzes in den Immobilienfonds,
4. Senkung der Beteiligungsquote der Versicherungsnehmer an den Überschüssen von 95% auf 90%.

(b) *[5 Punkte]* Aufgrund der Corona-Krise sind bis zum 31. März 2020 die Aktienkurse stark gesunken. Welchen Unterschied erwarten Sie für das Aktienrisiko zu diesem Stichtag im Vergleich zum 31. Dezember 2019, wenn Sie im 1. Quartal weder Aktien gekauft noch verkauft haben.

- Unterscheiden Sie bitte zwischen dem SCR Brutto und dem SCR Netto für Aktien.
- Berücksichtigen Sie dabei, dass sich auch andere Kapitalmarktgrößen zwischen den beiden Stichtagen geändert haben (insb. Zinsrückgang).

(c) *[5 Punkte]* In der Corona-Krise haben sich die Spreads für Unternehmensanleihen stark erhöht. Zur Verbesserung des Ertrags und zur Verringerung des Zinsänderungsrisikos empfiehlt Ihnen Ihr Bankberater den Tausch einer Bundesanleihe (Rendite -0,20%; AAA Rating von S&P; modifizierte Duration 20) in eine Unternehmensanleihe (Rendite 2,50%; BBB Rating von S&P; modifizierte Duration 8). Beide Anleihen haben einen Marktwert von 10 Mio. EUR.

(i) *[3 Punkte]* Ermitteln Sie die Änderungen im Spreadmodul.

(ii) *[2 Punkte]* Wie beurteilen Sie die Aussage des Bankberaters zum Zinsänderungsrisiko, wenn die marktwertgewichtete Duration der Aktivseite Ihres LVU 12 und die der Passivseite 16 beträgt?

Hilfsmittel: Siehe Folgeseite.

Zuweisung von Ratings externer Ratingagenturen zu einer objektiven Skala von Bonitätsstufen

Bonitätsstufe	0	1	2	3	4	5	6
Standard & Poor's Credit Market Services France S.A.S., Standard & Poor's Credit Market Services Italy S.r.l., Standard & Poor's Credit Market Services Europe Limited							
Skala für langfristige Emittentenratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, R, SD/D
Skala für langfristige Emissionsratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, C, D

Quelle: Durchführungsverordnung (EU) 2016/1800

Auszug Tabelle Spread-Risiko von Anleihen und Krediten:

Bonitätseinstufung		0		1		2		3		4		5 und 6	
Duration (dur_i)	$stress_i$	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i
bis zu 5	$b_i \cdot dur_i$	—	0,9 %	—	1,1 %	—	1,4 %	—	2,5 %	—	4,5 %	—	7,5 %
mehr als 5 und bis zu 10	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 5)$	4,5 %	0,5 %	5,5 %	0,6 %	7,0 %	0,7 %	12,5 %	1,5 %	22,5 %	2,5 %	37,5 %	4,2 %
mehr als 10 und bis zu 15	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 10)$	7,0 %	0,5 %	8,5 %	0,5 %	10,5 %	0,5 %	20,0 %	1,0 %	35,0 %	1,8 %	58,5 %	0,5 %
mehr als 15 und bis zu 20	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 15)$	9,5 %	0,5 %	11 %	0,5 %	13,0 %	0,5 %	25,0 %	1,0 %	44,0 %	0,5 %	61,0 %	0,5 %

Quelle: Delegierte Verordnung (EU) 2015/35

Lösungsskizze:

(a)
1. Nein, der Aktienstress unterscheidet jeweils innerhalb der Aktien vom Typ I und Typ II nicht nach der Volatilität der einzelnen Werte.
2. Grundsätzlich reduziert eine Verringerung des Durationgaps das SCR Zins bei einer Zinssenkung. Da aber negative Zinsen im Zinssenkungsstress nicht weiter reduziert werden, profitiert das LVU diesbezüglich im konkreten Fall nicht aus der Laufzeitverlängerung der Aktiva.
3. Ja, da der Fremdkapitaleinsatz den Stressfaktor für das (Netto-)Immobilienexposure erhöht.
4. Ja, da die geringere Überschussbeteiligung den zukünftigen Aktionärsgewinn als Teil der Eigenmittel erhöht.

(b) Das SCR Brutto für Aktien ist am 31. März 2020 niedriger als am 31.12.2019.

- Aufgrund des symmetrischen Anpassungsfaktors (Equity Dampener) reduziert sich die Höhe des Stressfaktors.
- Der Marktwert der Aktien, der gestresst wird, ist niedriger.

Eine eindeutige Aussage für das SCR Netto der Aktien ist ohne Berechnung mit dem Solvency-II-Modell nicht möglich, da sich potentiell durch den Marktwertverlust der Aktien und das niedrigere Zinsniveau die Effekte aus der Risikominderung der zukünftigen Überschussbeteiligung reduziert haben können.

(c) (i)
- Stressfaktor für die Bundesanleihe ist 0, da Staatsanleihen der Mitgliedsstaaten in einheimischer Währung m Spreadmodul vom Stress ausgenommen sind.
- Unternehmensanleihe: BBB Rating von S&P entspricht Bonitätsstufe 3:

  Stressfaktor $= 12,5\% + 3 \cdot 1,5\% = 17\%$
- Das SCR Brutto für das Spreadmodul würde sich um ca. 1,7 Mio. EUR erhöhen.

(ii) Aufgrund der höheren Zinssensitivität der Passivseite wird für das LVU der Zinssenkungsstress das dominante Zinsänderungsrisiko darstellen. Der Tausch senkt daher nicht das Zinsänderungsrisiko, sondern erhöht es.

Aufgabe 9. *[Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [25 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* Erläutern Sie, wie Kapital- und Renditeversprechen bei der *Klassik* und der *neuen Klassik* dar- und sichergestellt werden. Gehen Sie dabei auch auf bilanzielle Steuerungselemente ein. Nennen Sie zwei Herausforderungen für die Unternehmen, die sich insbesondere aus dem niedrigen Zinsniveau ergeben.

(b) *[5 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, was man bei dynamischen Hybridprodukten unter dem Gap-Risiko versteht. Welche drei Faktoren bestimmen die Höhe des Gap-Risikos?

(c) *[6 Punkte]* Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung eines europäischen Aktienindex im Jahr 2020.

Stichtag	Kurs Index	Durchschnitt Index	Monatsrendite
31.12.2019	100	-	-
31.01.2020	97	97	-2,8%
28.02.2020	89	93	-8,6%
31.03.2020	74	87	-16,3%
30.04.2020	78	85	5,1%
29.05.2020	81	84	4,2%
30.06,2020	86	84	6,0%
31.07.2020	85	84	-1,8%
31.08.2020	87	85	3,1%

Welche Verzinsung kann ein Versicherungsnehmer, dessen Indexpolice diesen Index zur Berechnung der maßgeblichen Rendite verwendet, in Abhängigkeit der im deutschen Markt dominierenden Konzepte zur Berechnung der maßgeblichen Rendite für das Jahr 2020 erwarten? Gehen Sie dabei von einem linearen Anstieg des Index auf 104 bis zum Jahresende sowie von Partizipationsraten von 80% und einem Cap von 2,8% für die monatlichen Renditen aus.

(d) *[6 Punkte]* Welche Bedeutung kommt bei Indexpolicen der ausgewiesenen Partizipation zu? Wovon hängt diese maßgeblich ab und wie lässt sie sich steuern?

Lösungsskizze:

(a) Kapital- und Renditegarantien werden bei der Klassik und der neuen Klassik zu 100% über das konventionelle Sicherungsvermögen (SV) dargestellt. Wesentliches Merkmal des konventionellen SV ist der Ausgleich im Kollektiv und in der Zeit. Die Garantien werden nicht explizit gehedgt, sondern sollen durch die risikoarme Anlagestruktur des SV und ein ALM gesichert werden. Dabei werden häufig Aktien- und Fremdwährungsrisiken durch Derivate reduziert. Zusätzlich helfen verschiedene Pufferfunktionen die jährlichen Garantien darzustellen:

- Bilanzierung zum gemilderten Niederstwertprinzip (§341b HGB),
- Bildung/Auflösung stiller Reserven,
- Bewertung nicht börsennotierter Anlagen,
- freie RfB.

Herausforderungen bei der Steuerung im Niedrigzinsumfeld:

- Hoher Ertragsbedarf bei der Zinszusatzreserve (ZZR)
- Beteiligung der VN an den stillen Reserven; bei Zinsträgern (trotz Berücksichtigung des Sicherungsbedarfs) kritisch. Höhere Kupons langlaufender Anlagen soll langfristige Renditeversprechen sichern.
- Notwendigkeit der Investition in riskantere Assetklassen, aber Möglichkeiten durch bilanzielle und aufsichtsrechtliche (Solvency II) Risikotragfähigkeit begrenzt.
- Reduzierung von Wiederanlagerisiken (und des SCR Zins unter Solvency II) führt bei einem Zinsanstieg zu potentiell höheren Stornorisiken, einer geringeren Verbesserung der Eigenmittel unter Solvency II und wirkt negativ auf die Wettbewerbsfähigkeit.

[Bemerkung: Zu nennen sind nur zwei Beispiele.]

(b) Dynamische Hybridprodukte nutzen zur Darstellung der zugesagten Garantien Wertsicherungsfonds. Das Gap-Risiko beschreibt den Fall, dass in einer Zeitphase, in der nicht im Rahmen des CPPI umgeschichtet werden kann, das riskante Asset mehr verliert als der für die Berechnung des Multiplikators unterstellte maximale Verlust. Der Wert des Fonds fällt dann unter die Wertuntergrenze.

Drei Faktoren, die die Höhe des Gap-Risikos beeinflussen:

- Wahrscheinlichkeit, dass ein höherer als der unterstellte Maximalverlust eintritt,
- tatsächlich in diesem Fall im Mittel zu erwartender Marktwertverlust des riskanten Assets,
- Entwicklung des Fonds innerhalb des Monats und damit einhergehend Anteil des riskanten Assets an der Gesamtallokation. Je niedriger die Allokation, desto geringer ist der absolute Verlust bei einem Gap-Event. Ist bei positiver Entwicklung der Fonds zu 100% im riskanten Asset investiert, der Multiplikator dabei aber nicht voll ausgeschöpft, steigt der mögliche Maximalverlust, der zu einem Gap-Event führt.

(c) Die erwartete Verzinsung hängt vom von der Versicherung gewählten Konzept zur Ermittlung der maßgeblichen Rendite ab. Es existieren diesbezüglich grundsätzlich drei wesentliche Konzepte.

- Berechnung der Basis-Indexperformance als Jahresrendite bezogen auf den Anfang- und Endstand des Index. In diesem Fall ergibt sich eine Basis-Rendite von 4%. Der VN wird hieran in Höhe der Partizipationsrate beteiligt, er erhält eine Verzinsung von $4\% \cdot 80\% = 3,2\%$.

- Berechnung der Basis-Indexperformance auf Basis des Durchschnitts des Index innerhalb einer Jahresperiode. Beim bisherigen Verlauf des Index und dem unterstellten linearen Anstieg ergibt sich ein Durchschnittswert < 100. Der VN erhält eine Verzinsung von 0%.

- Berechnung der Indexperformance auf Basis der monatlichen Renditen, wobei positive Monatsrenditen nur bis zur Höhe des Cap berücksichtigt werden. Die Summe der vier negativen Monatsrenditen ($= -29,5\%$) kann durch positive Monate (maximal $8 \cdot 2,8\%$) nicht mehr ausgeglichen werden, der VN erhält eine Verzinsung von 0%.

(d) Eine hohe ausgewiesene Partizipation ist insbesondere unter Vertriebsgesichtspunkten vorteilhaft. Die Partizipation ist von der Volatilität des Index und der Höhe der Überschussbeteiligung abhängig. Wesentliche Steuerungsmöglichkeiten:

- Durch eine Reduktion der Garantien (z. B. nur Bruttobeitragsgarantie) steht ein größerer Teil der Gesamtverzinsung als Überschuss zur Verfügung.

- Volatility Targeting: Ansteuern einer konstanten (niedrigeren) Zielvolatilität. Bei ansteigender Volatilität der riskanten Assets wird ihr Gewicht im Index reduziert.

- Verwendung von Indizes auf Basis von Multi-Asset-Allokationen, die eine geringe Volatilität als reine Aktienindizes haben (u. U. in Verbindung mit Volatility Targeting).

- Wahl eines Kursindexes, d. h. Dividenden gehen nicht in die Performance ein.

- Kombination von (monatlichen) Caps und (Gesamt-) Partizipationsrate.

- Wahlrecht des VN, einen Teil seines Beitragsguthabens zur Erhöhung der Partizipationsrate einzusetzen (Aber: Die höhere Rendite bezieht sich dann auch auf eine geringere Bemessungsgrundlage).

Eine Reduktion der Volatilität führt jedoch indirekt ebenfalls zu einer verringerten Partizipation an den riskanten Assets.