



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

## **Schadenversicherungsmathematik II**

gemäß Prüfungsordnung 4  
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 16. Oktober 2020

### *Hinweise:*

- Als Hilfsmittel sind die Seminarskripte inklusive handschriftlicher Notizen sowie ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 15 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

### *Mitglieder der Prüfungskommission:*

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,  
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein



## Teil I – Modellierung [70 Punkte]

### Aufgabe 1 (Interne Modelle in der Schadenversicherung) [10 Punkte]

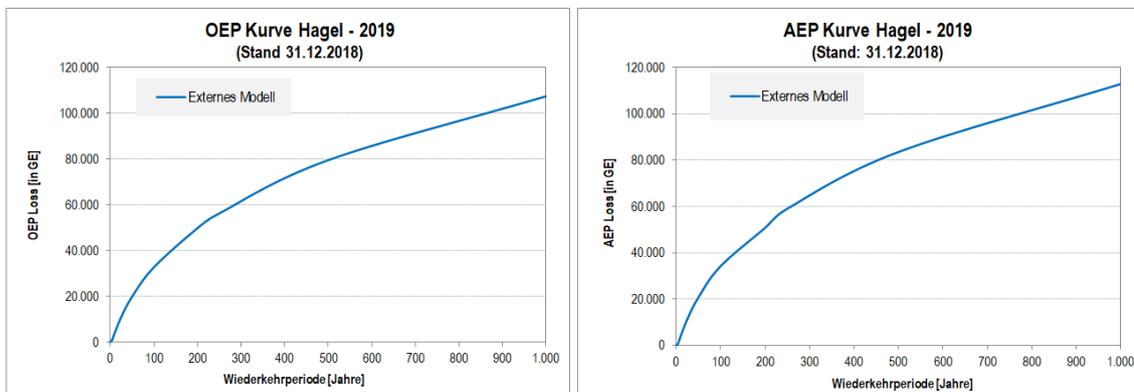
Beleuchten Sie die Auswirkungen der nachstehenden strategischen und/oder operativen Entscheidungen auf die Teilmodelle eines idealtypischen Unternehmensmodells im Schadenbereich: Welche Teilmodelle können betroffen sein und in welcher Weise?

- (a) [6 Punkte] Neuaufnahme eines Versicherungszweigs bzw. Neugründung einer Sparte
- (b) [2 Punkte] Änderung des aktuariellen Bewertungsverfahrens für die Best-Estimate Schadenrückstellungen durch die Versicherungsmathematische Funktion
- (c) [2 Punkte] Erweiterung des Sets an Schadenverteilungen in der Simulationsplattform des internen Modells

## Aufgabe 2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden) [23 Punkte]

### Basisinformationen:

- „Agrar-Insurance“ ist ein Schadenversicherer, der ausschließlich Hageldeckungen für landwirtschaftliche Risiken zeichnet. Aufgrund seines speziellen Geschäftsmodells, das mit der Solvency II-Standardformel nur unzureichend abgebildet werden kann, betreibt das Unternehmen ein aufsichtsrechtlich genehmigtes internes Modell.
- Das interne Modell ist in die Unternehmenssteuerung integriert und wird u.a. bei Entscheidungen hinsichtlich Ausgestaltung der Rückversicherungsstruktur, Pricing und Unternehmensstrategie herangezogen.
- Die Rückversicherungsstrategie sieht vor, dass einzelne Hagelereignisse über einen Kumul-XL abgesichert werden, wobei die Haftungstrecke jährlich so angepasst wird, dass der *Plafond des XLs jeweils dem 1 in 500-Jahresereignis gemäß Einzelereigniskurve des internen Modells* entspricht. Darüber hinaus gibt es keine weiteren Rückversicherungsverträge.
- Zur Modellierung der Gefahr Hagel verwendet „Agrar-Insurance“ ein *externes meteorologisches Modell eines kommerziellen Anbieters*. Aus dem Modelllauf per 31.12.2018 resultierten folgende Schadenkurven für das Jahr 2019 (Angabe in GE = Geldeinheiten):



- Rückblickend zum 31.12.2019 war das Schadenjahr 2019 durch eine Serie mittelgroßer und kleiner Hagelgewitter in Kombination mit einem außergewöhnlich schweren Hagelsturm namens „Alexander“ geprägt. Der auf die Gefahr Hagel entfallende Gesamtschaden des Unternehmens belief sich über das komplette Jahr 2019 auf 100.000 GE, von denen allein das Einzelereignis „Alexander“ einen Schadenaufwand von 80.000 GE verursachte.



**Aufgaben:**

- (a) [4 Punkte] Bestimmen Sie anhand der vorliegenden OEP- und AEP-Kurven näherungsweise die theoretischen Wiederkehrperioden für das Schadenjahr 2019 und das Ereignis „Alexander“, wie sie sich unter dem externen Modell zum 31.12.2018 ergeben würden. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
- (b) [4 Punkte] Gehen Sie davon aus, dass das externe Modell dem idealtypischen Aufbau eines geophysikalisch-meteorologischen Modells folgt. Lassen sich aus der Analyse in Aufgabenteil (a) Aussagen über die Angemessenheit des verwendeten externen Modells zur Quantifizierung des Hagelrisikos ableiten? Sind derartige Aussagen auch zu einzelnen Modulen des externen Modells möglich?
- (c) [10 Punkte] Die Aktuare haben eine mathematisch-statistische Modellierung durchgeführt und die Schadeninformationen aus 2019 in die Kalibrierung einbezogen: es wird ein kollektives Modell mit einer Poissonverteilung  $Poi(\lambda)$  für die jährliche Anzahl an Hagelereignissen und einer Verallgemeinerten Paretoverteilung  $GPD(\xi, \beta, \tau)$  für die Höhe der Ereignisschäden unterstellt.

Die geschätzten Modellparameter lauten:

- Ereignisschadenuntergrenze  $\tau = 1.000$  GE
- Jährliche Frequenz an Ereigniseintritten:  $\hat{\lambda} = 0,5$
- Geschätzte Parameter der  $GPD(\xi, \beta, \tau)$ :  $\hat{\xi} = 2,0$  und  $\hat{\beta} = 1,25$ .

Ermitteln Sie analytisch die *OEP-Kurve* zu den Stützstellen 2, 200 und 500 Jahren.

*Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Verallgemeinerten Paretoverteilung  $GPD(\xi, \beta, \tau)$  mit Formparameter  $\xi > 0$ , Skalenparameter  $\beta > 0$  und „Threshold“  $\tau$  (= Ereignisschadenuntergrenze) lautet:*

$$F(x|\xi, \beta, \tau) = 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{x - \tau}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x > \tau$$

- (d) [5 Punkte] „Agrar-Insurance“ erwägt aufgrund der Ergebnisse aus der Backtesting-Analyse von Aufgabenteil (b) einen Wechsel vom externen Modell auf eine mathematisch-statistische Modellierung. Welche Konsequenzen sind aus Ihrer Sicht zu erwarten im Hinblick auf
- Höhe des Risikokapitalbedarfs
  - Rückversicherung
  - Pricing und Underwriting?

*Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil (c) nicht gelöst haben, gehen Sie von folgenden Werten für die OEP-Kurve aus:  $OEP(200)=105.000$  und  $OEP(500)=245.000$ .*



### Aufgabe 3 (Resimulation aus der Event Loss Table) [17 Punkte]

#### Basisinformationen:

- Der Versicherer „Haus & Hof“ zeichnet Wohngebäuderisiken in Deutschland. Den Modellierungsaktuaren liegt die folgende Event Loss Table (ELT) im Outputformat des Anbieters RMS vor. Die ELT wurde mit einem externen hydrologisch-meteorologischen Modell für Überschwemmungsrisiken in Deutschland generiert.

EVENT ID	RATE	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE
4711	0,5%	780	135	65	50.000
4712	1,0%	350	30	20	40.000
4713	0,05%	200	50	50	10.000
4714	0,25%	1.000	200	100	40.000

#### Aufgaben:

- (a) [8 Punkte] Die Einträge der vorliegenden Event Loss Table lassen sich als Parameter eines statistischen Modells auffassen. Berechnen Sie unter Verwendung des entsprechenden Modellrahmens den Erwartungswert und die Standardabweichung des Jahresgesamtschadens aus Überschwemmungsschäden.
- (b) [6 Punkte] Die Aktuare von „Haus & Hof“ erproben den folgenden analytischen Ansatz zur vereinfachten Modellierung des Jahresschadensaufwands aus Überschwemmungsschäden. Bestimmen Sie anhand der in Aufgabenteil (a) analytisch ermittelten Größen, Erwartungswert und Standardabweichung des Jahresgesamtschadens, die für Limitsystem und Risikomessung maßgeblichen Quantile der Jahresgesamtschadenverteilung (95%: „Bad Financial Loss Scenario“, 99,5%: Risikokapitalbedarf), indem Sie für den Jahresgesamtschaden eine Logarithmische Normalverteilung unterstellen.

#### Hinweise:

- Für die Inverse  $\Phi^{-1}$  der Gauß'schen Phi-Funktion  $\Phi$  gilt:  
 $\Phi^{-1}(0,95) = 1,64$  und  $\Phi^{-1}(0,995) = 2,58$ .
- Sollten Sie Aufgabenteil (a) nicht gelöst haben, gehen Sie bitte von folgenden Werten für Erwartungswert  $\mathbb{E}[S]$  und Standardabweichung  $\sigma[S]$  des Jahresgesamtschadens  $S$  aus:  $\mathbb{E}[S] = 10$ ,  $\sigma[S] = 85$ .



- (c) [3 Punkte] Vergleichen Sie den in (b) vorgestellten vereinfachten Modellierungsansatz mit dem im Seminar behandelten Ansatz zur Re-Simulation von Ereignisschäden aus ELTs. Stellt der vereinfachte Ansatz im Falle der vorliegenden ELT eine sinnvolle Alternative dar? Gehen Sie bei Ihrer Beurteilung insbesondere auf die Eignung zur Approximation der „wahren“ Gesamtschadenverteilung aus dem externen Modell sowie hinsichtlich der Abbildung der Risikominderung aus Rückversicherung ein.



### Aufgabe 4 (Reserverisiko) [20 Punkte]

Basisinformationen:

- Der Versicherer „Haus & Hof“ verfügt über Abwicklungsdaten seiner Feuer­schäden ab dem Anfalljahr 2016, per 31.12.2019 besitzt das zugehörige Scha­dendreieck der beobachteten *nominalen inkrementellen Schadenzahlungen*  $\{S_{i,k}\}_{i+k \leq 2020}$  die folgende Gestalt (monetäre Größen jeweils in GE):

Anfalljahr i / Abwicklungsjahr k	1	2	3	4
2016	40	60	50	40
2017	80	60	50	
2018	100	60		
2019	120			

- Aus der Best-Estimate-Bewertung zum 31.12.2018 liegen die folgenden Schät­zer  $\{\hat{S}_{i,k}^{(2018)}\}_{i+k > 2019}$  für die *erwarteten zukünftigen Zahlungen* ab dem Kalen­derjahr 2019 vor:

Anfalljahr i / Abwicklungsjahr k	1	2	3	4	5
2016	40	60	50	24	12
2017	80	60	40	28	14
2018	100	70	48	34	18

- Aus der Best-Estimate-Bewertung zum 31.12.2019 liegen wiederum die fol­genden Schätzer  $\{\hat{S}_{i,k}^{(2019)}\}_{i+k > 2020}$  für die *erwarteten zukünftigen Zahlungen* ab dem Kalenderjahr 2020 vor:

Anfalljahr i / Abwicklungsjahr k	1	2	3	4	5
2016	40	60	50	40	12
2017	80	60	50	40	14
2018	100	60	60	46	16
2019	120	80	76	58	22

- Die Modellierungsaktuarer verwenden standardmäßig die sog. *Formeln nach Merz-Wüthrich*, um den mittleren quadratischen Vorhersagefehler des ökonomischen Abwicklungsergebnisses analytisch zu ermitteln. Das Ergebnis wird



anschließend im internen Unternehmensmodell in eine komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung übersetzt, um das einjährige Reserverisiko gemäß Solvency II zu bestimmen.

- Nach den *Formeln von Merz-Wüthrich* ergibt sich aus den vorliegenden Daten per 31.12.2018 ein mittlerer quadratischer Prognosefehler für das ökonomische Abwicklungsergebnis im Kalenderjahr 2019 in Höhe von 25 GE.

*Aufgaben:*

- (a) [4 Punkte] Verwenden Sie das Ergebnis der Merz-Wüthrich-Formeln zur ex-ante-Bestimmung des einjährigen Reserverisikos per 31.12.2018 als Value-at-Risk zum Niveau 99,5%, indem eine Normalverteilung für das ökonomische Abwicklungsergebnis  $\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}$  des Kalenderjahres 2019 unterstellt wird. *Hinweis: Es gilt  $\Phi^{-1}(0,995) = 2,58$ .*
- (b) [6 Punkte] Berechnen Sie das per 31.12.2019 im Kalenderjahr 2019 *ex-post tatsächlich beobachtete ökonomische Abwicklungsergebnis*  $\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}$  und vergleichen Sie es im Rahmen eines Backtestings mit der originären Vorhersageverteilung aus Aufgabenteil (a). Handelt es sich bei 2019 um ein statistisch auffälliges Kalenderjahr? Begründen Sie Ihre Antwort! *Hinweis: Als statistisch auffällig und analysewürdig gelten bei „Haus & Hof“ beobachtete (Gewinn- oder Verlust-)Ereignisse, die unter dem statistischen Modell seltener als in 1 in 20 Jahren auftreten.*
- (c) [3 Punkte] Nennen Sie die drei *zentralen Annahmen*, die der Anwendung der *Formeln nach Merz-Wüthrich* zugrundeliegen.
- (d) [7 Punkte] Sind die Annahmen der Formeln nach Merz-Wüthrich im vorliegenden Fall uneingeschränkt erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort! Was lässt sich daraus für die Angemessenheit der Formel nach Merz-Wüthrich zur Berechnung des Prognosefehlers für das ökonomische Abwicklungsergebnis  $\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}$  schließen?



## Teil II – Reservierung [110 Punkte]

### Aufgabe 5 (Reservebericht und Schätzunsicherheit) [26 Punkte]

- (a) [2 Punkte] Geben Sie zwei relevante Gründe an, die dafür sprechen, einen Reservebericht über die Durchführung eines Reservierungsprozesses zu verfassen, selbst wenn dieser keine explizite gesetzliche Anforderung darstellt.
- (b) [12 Punkte] Der Vorstand eines Versicherungsunternehmens gibt eine aktuelle Bewertung der Rückstellungen durch ein externes Beratungsunternehmen in Auftrag, um eine zusätzliche Einschätzung zur Reservesituation des Bestands zu erhalten. Geben Sie zwei relevante Argumente an, die dafür sprechen, den externen Reservierungsaktuaren den letzten internen Reservebericht zur Verfügung zu stellen. Geben Sie außerdem zwei Argumente an, die dagegen sprechen. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- (c) [12 Punkte] In einem Reservebericht sollte in der Regel auch die Unsicherheit bei der Schätzung der Rückstellungen bewertet werden. Für ein gegebenes Segment sollen die folgenden beiden Alternativen betrachtet werden:
- **Methodenunsicherheit:** Sowohl für das Zahlungsdreieck als auch für das Dreieck der Schadenaufwände wird jeweils das CL-Verfahren und das ILR-Verfahren angewendet. Die 4 unterschiedlichen Projektionsergebnisse werden zur Darstellung der Unsicherheit der Reserveschätzung pro Anfalljahr und in Summe über alle Anfalljahre verwendet.
  - **Stochastische Modellierung:** Entsprechend der Kriterien zur Modellauswahl wird eines der 4 Modelle (CL-Modell oder ILR-Modell auf Zahlungen oder Schadenaufwänden) festgelegt. Der Schätzfehler pro Anfalljahr und in Summe über alle Anfalljahre wird dann mittels der entsprechenden Schätzer berechnet.

Beschreiben Sie für jede der beiden Alternativen je zwei Situationen, in denen die jeweiligen Ergebnisse in Bezug auf die Schätzunsicherheit nicht aussagekräftig und daher irreführend sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Die Angabe von Formeln oder eine mathematische Herleitung ist nicht verlangt.

### Aufgabe 6 (Rechnungslegung) [20 Punkte]

- (a) [6 Punkte] Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (F). Geben Sie jeweils an, auf welches der Rechnungslegungssysteme IFRS17, HGB oder Solvency II die Aussage am ehesten zutrifft. Begründungen sind nicht erforderlich.
- (A) Der Schwerpunkt des Rechnungslegungssystems liegt auf der Bestimmung der Eigenmittel in ihrer Rolle als Verlustdeckungspotenzial.
  - (B) Die Bewertung der Schadenrückstellung erfolgt vorsichtig.
  - (C) Es muss eine Risikomarge gebildet werden, die Berechnungsmethodik ist aber nicht vorgegeben.
  - (D) Bei der Anwendung des Proportionalitätsprinzips ist die unternehmensindividuelle Situation zu betrachten.
  - (E) Bei der Bestimmung der versicherungstechnischen Rückstellungen müssen unabhängig von der Profitabilitätssituation auch Schäden berücksichtigt werden, die noch nicht eingetreten sind, sofern die entsprechenden Versicherungsverträge zum Bilanzstichtag bestanden haben.
  - (F) Bei den versicherungstechnischen Rückstellungen werden zwar Schadenregulierungskosten, nicht aber Kosten der allgemeinen Verwaltung oder der Verwaltung der Kapitalanlagen berücksichtigt.

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass der vorgegebene Versicherungszweig aus dem Bereich der Schaden- und Unfallversicherung die Voraussetzungen zur Bildung einer Schwankungsrückstellung unter HGB erfüllt und nicht aus dem Bereich der Hagel-, der Kredit- und Kautions- sowie der Vertrauensschadenversicherung stammt. Außerdem sei die jeweilige Grenzschaadenquote stets kleiner als die entsprechende durchschnittliche Schadenquote. Die folgenden Größen sind bekannt (Geldbeträge sind in Mio. EUR angegeben):

- Die durchschnittliche Schadenquote der Netto-Schadenquoten  $q_1, \dots, q_{15}$  der Geschäftsjahre des Beobachtungszeitraums beträgt  $\bar{q} = 72\%$ . Die zugehörige Standardabweichung hat den Wert  $\bar{\sigma} = 10\%$ .
  - Die Schadenquote des ältesten Geschäftsjahres im Beobachtungszeitraum beträgt  $q_1 = 100\%$ , die Schadenquote im Bilanzjahr 16 beträgt  $q_{16} = 70\%$ .
  - Die verdienten Beiträge des Bilanzjahres betragen  $P_{16} = 100$  und die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war  $SR_{15} = 42$ .
- (b) [6 Punkte] Berechnen Sie die Schwankungsrückstellung  $SR_{16}$  des Bilanzjahres 16.
- (c) [8 Punkte] Berechnen Sie den Sollbetrag  $SB_{17}$  des nächsten Bilanzjahres 17 unter der Annahme gleicher verdienter Beiträge, d.h.  $P_{17} = P_{16}$ . Was bedeutet das Ergebnis für das Bilanzjahr 17?
- Hinweis: Falls Ihnen eine exakte Berechnung nicht gelingt, so werden auch rein qualitative Aussagen als Teillösung gewertet.



### **Aufgabe 7 (Abwicklungsstatistiken) [12 Punkte]**

- (a) [4 Punkte] In den Zeilen eines Abwicklungsdreiecks können bekanntlich je nach Kontext Anfalljahre, Zeichnungsjahre oder auch Meldejahre eingetragen werden. Erklären Sie die drei Möglichkeiten und illustrieren Sie die Unterschiede anhand eines Beispiels für einen Schadenfall, für den Anfall-, Zeichnungs- und Meldejahr drei verschiedene Jahre sind.

Als Rückversicherer wollen Sie die Abrechnungen Ihrer Zedenten für ein Segment von proportionalen Rückversicherungsverträgen (alle auf Anfalljahresbasis) in einem Abwicklungsdreieck zusammenfassen. Die Abrechnungen für ein bestimmtes Quartal der Zedenten werden dabei bei Ihnen als Rückversicherer frühestens im Folgequartal verbucht, häufig aber auch mit zwei oder mehr Quartalen Verzögerung. Für die Festlegung der Abwicklungsjahre betrachten Sie die Zedentensichtweise (ZS) und die Finanzsichtweise (FS) als zwei Alternativen.

- (b) [4 Punkte] Anfang Januar müssen Sie das Abwicklungsdreieck des Segments im Rahmen des Reservierungsprozesses mit Datenstand 31.12. analysieren. Welches systematische Problem stellt sich Ihnen unter ZS, das unter FS nicht vorhanden ist? Begründen Sie Ihre Aussage. Hinweis: Die Angabe eines Lösungsansatzes ist nicht erforderlich.
- (c) [4 Punkte] Betrachten Sie folgendes Szenario: Aufgrund von Verzögerungen bei der Einführung eines Abrechnungsstandards für den Versicherungszweig Ihres Segments schickten die meisten Zedenten ab Februar 2017 keine Abrechnungen mehr. Erst ab Januar 2018 wurden die Abrechnungen für die abgelaufenen Quartale zugestellt und verbucht. Stellen Sie die Auswirkungen dieses Szenarios auf Ihr Abwicklungsdreieck unter ZS und unter FS dar, wenn Sie das Dreieck zum Datenstand 31.12.2019 (!) analysieren.

### Aufgabe 8 (Ein einfaches Modell für Kalenderjahreseffekte) [25 Punkte]

Für ein Geschäftssegment bezeichne  $v_i$  ein Volumenmaß für das Anfalljahr  $i$  und  $T_{i,k}$  den Zuwachs des Anfalljahres  $i$  im Abwicklungsjahr  $k$  mit  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, u$ .

Der Zuwachs  $T_{i,k}$  soll als Summe eines Basiszuwachses  $S_{i,k}$  und eines Kalenderjahreszuwachses, welcher über eine Kalenderjahreskomponente  $K_j$  gegeben wird, dargestellt werden.

Für den Basiszuwachs  $S_{i,k}$  gelten dabei die Annahmen des ILR-Modells:

- **(ILR1)** Die Zuwächse  $S_{i,k}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq u$  sind unabhängig.
- **(ILR2)** Es gibt Parameter  $m_k^S \in \mathbb{R}$ , so dass für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq k \leq u$

$$E(S_{i,k}) = m_k^S \cdot v_i.$$

- **(ILR3)** Es gibt Parameter  $\sigma_k > 0$ , so dass für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq k \leq u$

$$\text{Var}(S_{i,k}) = \sigma_k^2 \cdot v_i.$$

Für die Kalenderjahreskomponente  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, n + u - 1$  gelten die Annahmen:

- **(K1)**  $S_{i,k}, K_j$  mit  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq u$ ,  $1 \leq j \leq n + u - 1$  sind unabhängig.
- **(K2)** Für  $1 \leq j \leq n + u - 1$  ist

$$E(K_j) = 0.$$

- **(K3)** Es gibt einen Parameter  $\tau > 0$ , so dass für  $1 \leq j \leq n + u - 1$

$$\text{Var}(K_j) = \tau^2.$$

Schließlich sei für  $i = 1, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, u$  die Darstellung des Zuwachses  $T_{i,k}$  durch die Summe

$$T_{i,k} = S_{i,k} + K_{i+k-1} \cdot \sigma_k \sqrt{v_i}$$

gegeben. Abkürzend sei dieses Modell für die Zuwächse  $T_{i,k}$  als K-ILR-Modell bezeichnet.

- [5 Punkte] Zeigen Sie, dass die Zuwächse  $T_{i,k}$  die Annahmen (ILR2) und (ILR3) des ILR-Modells zu den Volumenmaßen  $v_i$  erfüllen. Geben Sie explizite Formeln für die entsprechenden Zuwachsquoten  $m_k^T$  und Varianzparameter  $\tau_k^2$  an.
- [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Annahme (ILR1) für  $T_{i,k}$  nicht gilt, indem Sie zeigen, dass die Anfalljahre  $\{T_{i,1}, \dots, T_{i,u}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  nicht unabhängig sind. Das K-ILR-Modell ist damit kein Spezialfall des ILR-Modells.



- (c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Anfalljahre innerhalb eines Abwicklungsjahres unabhängig sind, also dass für ein fixiertes  $k$  die Zuwächse  $T_{1,k}, \dots, T_{n,k}$  unabhängig sind.
- (d) [2 Punkte] Interpretieren Sie die Annahme, dass die Kalenderjahreskomponenten  $K_1, \dots, K_{n+u-1}$  unabhängig sind, im Sachzusammenhang. Geben Sie ein Beispiel aus der Praxis an, für das diese Annahme nicht sinnvoll ist.
- (e) [4 Punkte] Das K-ILR-Modell ist verteilungsfrei. In der Anwendung müssen jedoch häufig konkrete Verteilungsannahmen getroffen werden. Interpretieren Sie die Charakteristika der folgenden zwei Beispiele im Zusammenhang mit einer Anwendung in der Praxis:
- Beispiel 1: Die Verteilung jeder Kalenderjahreskomponenten  $K_j$  ist durch  $P(K_j = -0,1) = 95\%$  und  $P(K_j = 1,9) = 5\%$  gegeben.
  - Beispiel 2: Jede Kalenderjahreskomponente  $K_j$  ist gleichverteilt auf dem Intervall  $[-2; 2]$ .
- (f) [2 Punkte] Begründen Sie ohne Rechnung, dass die üblichen Schätzer für die Zuwachsquoten  $m_k^T$  und die Varianzparameter  $\tau_k^2$

$$\widehat{m}_k^T = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} T_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} v_i} \quad \text{und} \quad \widehat{\tau}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} v_i \left( \frac{T_{i,k}}{v_i} - \widehat{m}_k^T \right)^2$$

erwartungstreu sind und im Fall der Zuwachsquoten auch varianzminimierend.

- (g) [8 Punkte] Zeigen Sie, dass für den Zufallsfehler der zukünftigen Zuwächse  $R_i = T_{i,n-i+2} + \dots + T_{i,u}$  des Anfalljahres  $i$  die Formel

$$\text{Var}(R_i) = \text{Var}(T_{i,n-i+2}) + \dots + \text{Var}(T_{i,u})$$

gilt, für den Zufallsfehler der zukünftigen Zuwächse  $R = R_1 + \dots + R_n$  hingegen die Ungleichung

$$\text{Var}(R) > \sum_{i=1}^n \text{Var}(R_i).$$

Interpretieren Sie diese Ungleichung im Zusammenhang mit dem ILR-Modell und dem K-ILR-Modell.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von  $\text{Var}(R)$  die Darstellung

$$R = \sum_{j=n+1}^{n+u-1} \sum_{i=\max(j+1-u;1)}^n T_{i,j-i+1},$$

in der die zukünftigen Zuwächse pro Kalenderjahr  $j$  summiert werden.

### Aufgabe 9 (Munich-Chain-Ladder und Residuenanalyse) [27 Punkte]

Für die Anfalljahre  $i = 1, \dots, n$  und die Abwicklungsjahre  $k = 1, \dots, u$  bezeichne  $C_{i,k}$  die entsprechenden (kumulierten) Zahlungen und  $D_{i,k}$  die entsprechenden Schadenaufwände. In der gesamten Aufgabe werden stets die Schätzer der Residuen im Rahmen des Munich-Chain-Ladder Verfahrens verwendet.

- (a) [7 Punkte] Für die geschätzten Abwicklungsfaktor-Residuen gilt bekanntlich die Summenformel für Residuenquadrate. Leiten Sie für die geschätzten Residuen der  $C/D$ -Quoten (auch Paid/Incurred-Ratios genannt) eine analoge Formel her, die die Summe der Quadrate der geschätzten Residuen eines Abwicklungsjahres explizit berechnet.

Geben Sie die entsprechende Formel auch für die  $D/C$ -Quoten an, eine Herleitung ist nicht verlangt.

- (b) [4 Punkte] Erläutern Sie die Bedeutung der beiden Formeln aus Teilaufgabe (a) für die Analyse des  $C/D$ -Dreiecks und für die Schätzung der Korrelationsparameter  $\lambda^C$  und  $\lambda^D$ .

Sie analysieren die Zahlungs- und Schadenaufwandsdaten eines Segments mit  $n = 18$  Anfalljahren. Zu Analysezwecken stehen Ihnen fünf Residuengraphiken zur Verfügung, in denen stets die im Rahmen des MCL-Verfahrens geschätzten Residuen eingezeichnet sind. Die fünf Residuengraphiken haben folgende Beschreibung:

**(D-KJ)** Die geschätzten Residuen der individuellen Abwicklungsfaktoren im Schadenaufwandsdreieck auf der  $y$ -Achse, aufgetragen gegen die zugehörigen Kalenderjahre auf der  $x$ -Achse. In Kurzform: Die Residuen der  $D$ -Abwicklungsfaktoren gegen die Kalenderjahre.

**(C-KJ)** Die Residuen der  $C$ -Abwicklungsfaktoren (individuelle Abwicklungsfaktoren im Zahlungsdreieck) gegen die Kalenderjahre.

**(C/D-KJ)** Die Residuen der  $C/D$ -Quoten gegen die Kalenderjahre.

**(D-MCL)** Der Residuenplot der Schadenaufwände des MCL-Verfahrens, also die Residuen der  $D$ -Abwicklungsfaktoren gegen die entsprechenden Residuen der  $C/D$ -Quoten.

**(C-MCL)** Der Residuenplot der Zahlungen des MCL-Verfahrens, also die Residuen der  $C$ -Abwicklungsfaktoren gegen die entsprechenden Residuen der  $D/C$ -Quoten.

In den drei folgenden Teilaufgaben gelten jeweils spezielle Szenarien. Gehen Sie davon aus, dass außer den explizit genannten Punkten keine außergewöhnlichen Sachverhalte vorliegen.



- (c) [7 Punkte] Szenario (1): Abgesehen von zahlreichen kleineren Schäden treten in den meisten Anfalljahren vereinzelt große Schäden auf. Diese sorgen dann für Sprünge in der Abwicklung, auch noch in späteren Abwicklungsjahren. Typischerweise werden für diese Schäden zunächst große Einzelfallreserven gestellt, die dann im Verlauf der nächsten 2 bis 3 Abwicklungsjahre ausbezahlt werden.
- Geben Sie für jede der fünf Residuengrafiken an, ob bzw. wie sich Szenario (1) auf die Grafik auswirkt und begründen Sie Ihre Aussage.
  - Erläutern Sie, welchen Einfluss Szenario (1) auf die Schätzung der Korrelationsparameter  $\lambda^D$  und  $\lambda^C$  hat.
- (d) [2 Punkte] Szenario (2): Aufgrund harten Wettbewerbs unterlag das Geschäftssegment in der Vergangenheit einem starken Prämienzyklus. Die Tarifierungsabteilung meldet Ihnen zurück, dass nach mehreren Jahren mit sinkendem Prämienniveau, also steigenden Schadenquoten, die Schadenquoten seit Anfalljahr  $n - 3$  wieder signifikant sinken sollten.
- Welche der fünf Residuengrafiken sind dazu geeignet, die Aussage der Tarifierungsabteilung zu überprüfen und welche sind es nicht? Begründen Sie Ihre Aussage.
- (e) [7 Punkte] Szenario (3): Gegen Ende des aktuellen Kalenderjahres  $n$  trat eine Gesetzesänderung in Kraft, aufgrund derer die zukünftigen Schadenzahlungen für alle offenen Schadenfälle deutlich höher ausfallen werden. Die entsprechend notwendig gewordene Erhöhung der Einzelfallreserven fand noch im Kalenderjahr  $n$  statt, wobei die Einzelfallreserven im Durchschnitt etwas mehr als verdoppelt wurden. Da es sich um ein recht lang abwickelndes Geschäftssegment handelt, war die finanzielle Belastung des Geschäftsjahresergebnisses deutlich sichtbar.
- Geben Sie für jede der fünf Residuengrafiken an, ob bzw. wie sich Szenario (3) auf die Grafik auswirkt. Begründen Sie Ihre Aussage.
  - Erläutern Sie, welchen Einfluss Szenario (3) auf die Schätzung des Korrelationsparameters  $\lambda^C$  hat.
  - Erläutern Sie, welchen Einfluss Szenario (3) in den kommenden Kalenderjahren auf die Schätzung des Korrelationsparameters  $\lambda^C$  haben wird.

## **Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Modellierung - Interne Modelle in der Schadenversicherung) [10 Punkte]**

*Kurzbeschreibung der Teilmodelle eines idealtypischen internen Unternehmensmodells eines Schadenversicherers (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich):*

- *Versicherungstechnisches Modell:* Modellierung der versicherungstechnischen Risiken und passivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.
  - *Brutto-Modell:* Relevante Brutto-Informationen für die simulierten Jahre:
    - \* Bruttoschäden (Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden)
    - \* GuV- und Bilanzdaten (Prämien, Kosten, Bestandsentwicklung)
  - *Reserverisiko:* Abwicklung der Schadenreserven für vergangene Anfalljahre und Messung des ultimativen Reserverisikos.
  - *Abwicklungsmodell:* Erzeugung der Schaden-Cashflows für bereits angefallene Schäden und Neuschäden, Ausgangspunkt für Überleitung von ultimativem Risikohorizont in die Kalenderjahressicht / einjährige Risikosicht.
  - *Rückversicherungsmodell:* Abbildung der wichtigsten RV-Verträge und Berechnung der Netto-Schäden auf Basis der simulierten Brutto-Schäden aus dem Brutto-Modell.
- *Nicht-versicherungstechnisches Modell (auch: Aktiv-Modell):* Modellierung der Kapitalanlagerisiken und aktivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.
  - *Kapitalmarkt-Modell:* Generiert Kapitalmarktszenarien, erzeugt durch einen ökonomischen Szenariogenerator (Economic Scenario Generator, ESG).
  - *Investment-Modell:* Entwicklung der Buch- und Marktwerte des Portfolios auf Basis der Kapitalmarktpfade aus dem Kapitalmarkt-Modell.
- *Management-Modell:* Zusammenführen der aktiv- und passivseitigen Cash Flows. Managementregeln für Aktiv- und Passivseite sowie deren Interaktion.
- *Auswertungs-Modell:* Generierung der Ausgaben und Kenngrößen wie z.B. Ruinwahrscheinlichkeiten, Risikokapital, GuV- und Bilanzposten pro Simulationspfad.

*Aufgaben:*

(a) [6 Punkte] *Neugründung einer Sparte:*

- Sämtliche Teilmodelle des versicherungstechnischen Modells: Anpassungen am Bruttomodell aufgrund neuer Kalibrierung und Aggregation (Abhängigkeiten mit anderen Sparten und Risiken), Rückversicherungsmodell, da Rückversicherungsstruktur der neuen Sparte berücksichtigt werden muss, perspektivisch auch Anpassungen am Reserverisiko, sobald Schadenreserven vorliegen. Im Abwicklungsmodell sind bereits für die Abwicklung der Neuschäden Abwicklungsmuster vorzuhalten.
- Managementmodell: Prämien, Kosten, Schadenzahlungen der neuen Sparte müssen in den versicherungstechnischen Cashflow zwecks Übergabe an das Investmentmodell (und dortiger Neuanlage oder Auflösung von Kapitalanlagen) einfließen.
- Falls der neuen Sparte Risikokapital zugeordnet werden soll, muss die Spartengranularität bis zum Auswertungsmodell beibehalten werden.

(b) [2 Punkte] *Änderung des aktuariellen Bewertungsverfahrens für die Best-Estimate Schadenrückstellungen durch die Versicherungsmathematische Funktion:*

- Unmittelbar betroffen sollten nur ausgewählte Teilmodelle der Versicherungstechnik betroffen, in denen die stochastische Modellierung der Schadenrückstellungen erfolgt, betroffen, d.h. das Reserverisikomodell und Abwicklungsmodell.
- Sofern es um die Änderung der Verfahrensklasse (Bsp. von Chain-Ladder zum additiven Modell) handelt, wäre die stochastische Modellierung aufgrund der geforderten Konsistenz zwischen Rückstellungsberechnung und Risikorechnung anzupassen, so dass das Modell auch damit umgehen könnte. Mittelbar ist auch Anpassungsbedarf an der Datengrundlage für die Bruttokalibrierung und damit das Bruttomodell denkbar, falls das neue Verfahren auch bei der Ultimateprojektion der Basis- und Großschäden im Rahmen der vorgelagerten as-if Transformation zum Einsatz kommt.

(c) [2 Punkte] *Erweiterung des Sets an Schadenverteilungen in der Simulationsplattform des internen Modells:*

- Bruttomodell (und vorgelagerte Kalibrierung), es ist keine strukturelle Anpassungen am Modell oder Parametern notwendig, da lediglich Verteilung der Schäden unmittelbar betroffen, nicht aber die Verarbeitung der Schadengrößen im weiteren Verlauf. Mittelbar sind auch Auswirkungen



auf Rückversicherungsmodell (Ermittlung technischer Preise) und Auswertungsmodell (Risikokapitalberechnung) denkbar. Sollten sich die neuen Verteilungen auch zur Modellierung von Reservevolatilität eignen, könnte sich auch eine Einbindung der Verteilungen in das Reserverisikomodell und entsprechender struktureller Anpassungsbedarf in dieser Komponente ergeben.

## Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden) [23 Punkte]

- (a) [4 Punkte] Zur Definition von AEP- und OEP-Kurve (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich): Bezeichne  $N$  die zufällige Anzahl an Katastrophenschäden in einem Jahr und  $X_1, \dots, X_N$  die zugehörigen Ereignisschadenhöhen. Wird mit  $F_S$  die Verteilungsfunktion der Summenvariable  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  bezeichnet, so ist die AEP-Kurve (AEP = Aggregate Loss Exceeding Probability) definiert gemäß:

$$AEP(T) := F_S^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

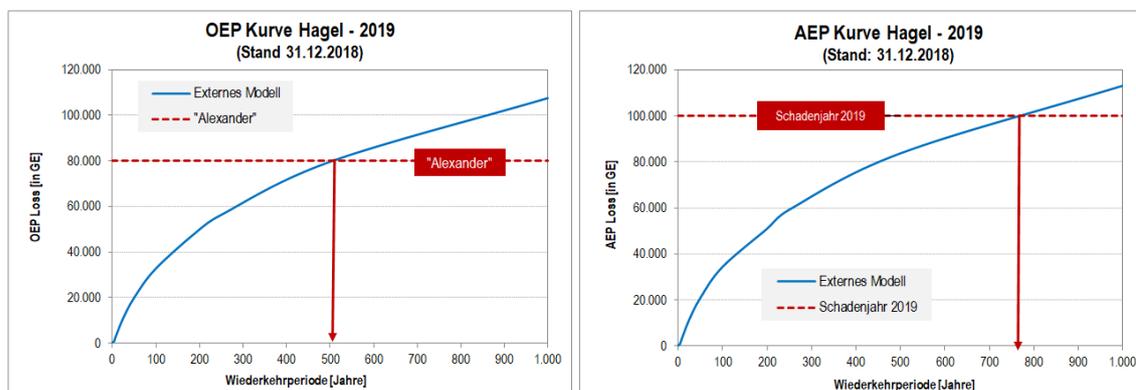
Die AEP-Kurve beschreibt die Verteilung des Jahresgesamtschadens, der durch die betrachtete Naturkatastrophe verursacht wird, und gibt an, wie hoch der maximal zu beobachtende Jahresgesamtschaden über einen Zeitraum von  $T > 0$  Jahren erwartungsgemäß sein wird. Hierbei wird  $T$  als *Wiederkehrperiode* oder auch *Jährlichkeit* bezeichnet.

Die OEP-Kurve (OEP = *Occurrence Exceeding Probability*) bezieht sich hingegen auf die Verteilung des maximalen Ereignisschadens  $M_N := \max\{X_1, \dots, X_N\}$  und ist definiert gemäß:

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

Die theoretische Wiederkehrperiode des Schadenjahres 2019 lässt sich somit näherungsweise grafisch aus der AEP-Kurve bestimmen, bspw. durch Bestimmung des Schnittpunkts der AEP-Kurve mit der Linie, die die Schadenhöhe 100.000 GE kennzeichnet. Daraus ergibt sich eine Wiederkehrperiode von ca. 800 Jahren.

Die theoretische Wiederkehrperiode des Einzelereignisses „Alexander“ lässt sich analog aus der OEP-Kurve ablesen. Daraus ergibt sich eine Wiederkehrperiode von ca. 500 Jahren, was gleichzeitig der Obergrenze des Rückversicherungsprogramms entspricht.



- (b) [4 Punkte] Unter dem externen Modell ist der Eintritt eines Ereignisses in der Größenordnung von „Alexander“ bzw. eines kumulierten Schadenjahres, wie es in 2019 beobachtet worden ist, äußerst unwahrscheinlich. Der nahezu deckungsgleiche Verlauf von OEP- und AEP-Kurve lässt darauf schließen, dass das externe Modell eine niedrige Frequenz unterstellt und der Jahresschaden unter dem externen Modell nahezu ausschließlich aus einem einzigen Großereignis resultiert, wohingegen es in 2019 neben „Alexander“ mehrere weitere Schadenereignisse gegeben haben muss, welche 20.000 GE zum Jahresschadenaufwand beigetragen haben. Das Unternehmen muss das Modell nicht zwingend verwerfen, da auch bei seltenen Ereignissen eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass diese innerhalb eines kürzeren Beobachtungszeitraums auftreten. Allerdings sollte das Modell mit allen Einzelkomponenten kritisch hinterfragt und auf den Prüfstand gestellt werden, um nachzuvollziehen und zu verstehen, wodurch es zu dieser extremen Wiederkehrperiode kam. Einschätzungen aus dem Markt und Vergleich gegen andere Modellanbieter können, sofern verfügbar, dabei helfen. Verzichtet das Unternehmen auf eine solche Tiefenanalyse und hält es uneingeschränkt am aktuellen Modell fest, besteht das Risiko, dass das Unternehmen einen zu niedrigen Risikokapitalbedarf berechnet und u.U. zu wenig Kapital vorhält. Ein idealtypisches geophysikalisch-meteorologisches Modell besteht aus Gefährdungsmodul, Exposuremodul, Vulnerabilitätsmodul und Finanzmodul. Da das Zusammenspiel aller vier Komponenten den modellierten Schadenaufwand im externen Modell bestimmt, lassen sich aus dieser Analyse keine direkten Rückschlüsse auf die Angemessenheit einzelner Komponenten ziehen.
- (c) [10 Punkte] In einem kollektiven Modell mit Poisson( $\lambda$ )-verteilter Schadenanzahl  $N$  und unabhängig und identisch nach  $X$  verteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_N$  besitzt die Verteilungsfunktion des Maximums  $M_N = \max \{X_1, \dots, X_N\}$  die Gestalt:

$$F_{M_N}(z) = \exp \{-\lambda \cdot (1 - F_X(z))\}.$$

Somit gilt für die Darstellung der verallgemeinerten Inversen  $F_{M_N}^{-1}$  von  $F_{M_N}$  in Abhängigkeit der verallgemeinerten Inversen  $F_X^{-1}$  von  $F_X$ :

$$F_{M_N}^{-1}(q) = F_X^{-1} \left( 1 + \frac{\ln q}{\lambda} \right).$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich nur für  $1 + \lambda^{-1} \ln q > 0$  oder äquivalent  $q > \exp \{-\lambda\}$  definiert. Interpretation: der Ausdruck  $\exp \{-\lambda\}$  entspricht der Wahrscheinlichkeit gemäß Poisson-Modell, dass die Schadenanzahlvariable den Wert Null annimmt und somit kein Ereignisschaden oberhalb der Grenze  $\tau = 1.000$  GE beobachtet wird. Somit ist  $F_{M_N}^{-1}(q) = 0$  für  $q \leq \exp \{-0,5\} \approx 0,61$ , was einer Wiederkehrperiode von ca. 2,5 Jahren entspricht. Wegen  $t_1 = 2$  und  $q_1 = 1 - 1/t_1 = 0,5 < 0,61$  ist  $OEP(2) = 0$ .



Für  $q > \exp\{-0,5\}$  ist die Inverse  $F_{M_N}^{-1}$  wohldefiniert: da die Einzelereignisse gemäß Voraussetzung einer  $GPD(\xi, \beta, \tau)$ -Verteilung genügen, besitzt die Inverse von  $F_X$  die folgende Gestalt:

$$F_X^{-1}(u | \xi, \beta, \tau) = \left( (1-u)^{-\xi} - 1 \right) \cdot \frac{\beta}{\xi} + \tau, \quad 0 < u < 1.$$

Die Werte der OEP-Kurve zu den Wiederkehrperioden  $t_2 = 200$  und  $t_3 = 500$  ergeben sich erneut durch Transformation in die entsprechenden Quantilniveaus  $q_i$  vermöge  $q_i = 1 - 1/t_i$  und Auswertung von

$$F_{M_N}^{-1}(q_i) = \left( \left( \ln q_i^{-\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\xi} - 1 \right) \cdot \frac{\beta}{\xi} + \tau.$$

Insgesamt folgt:

Wiederkehrperiode $t_i$	$q_i$	$OEP(t_i)$
200	0,995	7.218
500	0,998	39.984

(d) [5 Punkte] Unter Verwendung der Werte  $OEP(200) = 105.000$  und  $OEP(500) = 245.000$  ergeben sich folgende mögliche Implikationen für

- **Risikokapitalbedarf:** Die Kurve nach mathematisch-statistischer Modellierung verläuft im Tailbereich deutlich schwerer und produziert höhere Schäden, somit ist ceteris paribus, d.h. bei Beibehalten der Rückversicherungsstruktur, ein höherer Risikokapitalbedarf zu erwarten, da keine Diversifikationseffekte innerhalb der Versicherungstechnik zu erwarten sind (Unternehmen ist Monoliner) und das 200-Jahresereignis nach mathematisch-statistischer Modellierung oberhalb des Plafond der Rückversicherungsstruktur liegt, anders als in der alten Modellierung nach externem Modell.
- **Rückversicherungsstruktur:** Der Rückversicherungsstrategie zufolge wäre die Haftung des Kumulschadenexzedenten auszuweiten und den Plafond von 80.000 GE auf ca. 245.000 GE deutlich zu erhöhen. Dies würde wiederum zu einer höheren Rückversicherungsprämie führen.
- **Underwriting / Pricing:** Durch den durchgehend schwereren Verlauf der Hagelkurve erhöhen sich nach den vorgenannten Überlegungen der erwartete Jahresschaden, die Risikokapitalkosten und die Rückversicherungskosten, was entsprechend in der Bruttoprämie zu berücksichtigen wäre. In Abhängigkeit der Risikotragfähigkeit und der SII-Bedeckungsquote des Unternehmens wäre zudem eine Reduktion des Geschäftsvolumens



in Betracht zu ziehen, sofern der Anstieg der Schadenkurven durch Rückversicherung nicht abgedeckt werden kann, eine bessere räumliche Diversifikation des Bestandes anzustreben, oder andere Geschäftszweige außerhalb der Hagelversicherung aufzunehmen, um spartenübergreifende Diversifikation zu ermöglichen.

Unter Verwendung der tatsächlichen Ergebnisse aus Aufgabenteil (c) ergeben sich hingegen folgende mögliche Implikationen für

- *Risikokapitalbedarf*: Die Kurve nach mathematisch-statistischer Modellierung verläuft im Tailbereich deutlich leichter und produziert kleinere Schäden, somit könnte je nach Selbstbehalt ceteris paribus, d.h. bei Beibehalten der Rückversicherungsstruktur, ein geringerer Risikokapitalbedarf resultieren.
- *Rückversicherungsstruktur*: Der Rückversicherungsstrategie zufolge könnte die Haftung des Kumulschadenexzedenten reduziert und der Plafond von 80.000 GE auf 40.000 GE (siehe Aufgabenteil (c)) halbiert werden. Dies würde wiederum eine niedrigere Rückversicherungsprämie nach sich ziehen.
- *Underwriting / Pricing*: Durch den durchgehend leichteren Verlauf der Hagelkurve verringern sich nach den vorgenannten Überlegungen der erwartete Jahresschaden, die Risikokapitalkosten und die Rückversicherungskosten, was in der Bruttoprämie entsprechend berücksichtigt werden könnte und sich zu einer Reduktion der Prämie nutzen ließe. In Abhängigkeit der Risikotragfähigkeit und der SII-Bedeckungsquote des Unternehmens könnte zudem eine Ausweitung des Geschäftsvolumens in Betracht gezogen werden.



**Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Re-Simulation aus einer Event Loss Table)**  
**[17 Punkte]**

(a) [8 Punkte] Bezeichnet  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der in der ELT enthaltenen Überschwemmungsszenarien, so liegen dem stochastischen Modell folgende Annahmen zugrunde:

- Die Einzelszenarien  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sind stochastisch unabhängig.
- Jedes Einzelszenario  $1 \leq i \leq n$  wird als kollektives Modell aufgefasst:
  - Der Jahresgesamtschaden  $S_i$  aus Ereignisschäden des Szenarios  $i$  ist gegeben durch:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}.$$

- Die Ereignisanzahl  $N_i$  wird durch eine Poisson ( $\lambda_i$ )-Verteilung beschrieben mit  $\lambda_i := \mathbb{E}[N_i]$  (=RATE).
- Die individuellen Ereignishöhen  $X_{ij}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  innerhalb eines Szenarios  $i$  sind unabhängig und identisch verteilt mit
  - \* Erwartungswert  $\mu_i := \mathbb{E}[X_{ij}]$  (= PERSPVALUE)
  - \* Standardabweichung  $\sigma_i := \sigma[X_{ij}]$  (= STDDEVI + STDDEVCO)

Nach den Formeln von Wald ergibt sich für jedes einzelne Schadenszenario  $1 \leq i \leq n$ :

- Erwarteter Jahresgesamtschaden  $S_i$  per Einzelszenario:  $\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mu_i$
- Varianz des Jahresgesamtschadens per Einzelszenario:  $\mathbb{V}[S_i] = \lambda_i \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$

EVENT ID	$\mathbb{E}[S_i]$	$\mathbb{V}[S_i]$
4711	3,9	3.242
4712	3,5	1.250
4713	0,1	25
4714	2,5	2.725

Der Jahresgesamtschaden aller Szenarien ist gegeben durch:

$$S_{Flut} = \sum_{i=1}^n S_i.$$



Erwartungswert und Varianz des Jahresschadens  $S$  aller Szenarien ergeben sich jeweils über Summation der Einzelerwartungswerte bzw. Einzelvarianzen (letzteres aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Szenarien).

Damit ergibt sich zusammengenommen:

- Erwarteter Jahresgesamtschaden:  $\mathbb{E}[S_{Flut}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i]$
- Varianz des Jahresgesamtschadens:  $\mathbb{V}[S_{Flut}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[S_i]$

Insgesamt ist  $\mathbb{E}[S_{Flut}] = 10$  und  $\mathbb{V}[S_{Flut}] = 7.242$  bzw.  $\sigma[S_{Flut}] \approx 85,1$ .

(b) [6 Punkte] Für die Logarithmische Normalverteilung mit den beiden Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  gilt:

- Erwartungswert:  $\mathbb{E}[S] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$
- Varianz:  $\mathbb{V}[S] = (\exp\{\sigma^2\} - 1) \cdot \exp\{2\mu + \sigma^2\}$

Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\ln(\mathbb{V}[S]/\mathbb{E}[S]^2 + 1)}, \quad \mu = \ln \mathbb{E}[S] - \sigma^2/2.$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) erhalten wir:

$$\sigma = 2,072, \quad \mu = 0,156$$

Für das Quantil  $q_p$  der Lognormalverteilung zum Niveau  $0 < p < 1$  gilt:

$$q_p = \exp\{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)\}.$$

Mit den obigen Parametern ergeben sich für den „Bad Financial Loss“ als 0,95-Quantil  $q_{0,95}$  und für den Risikokapitalbedarf als 0,995-Quantil  $q_{0,995}$  bei Rundung auf volle Beträge:

$$q_{0,95} = 35, \quad q_{0,995} = 245.$$

(c) [3 Punkte] Zunächst ist festzuhalten, dass Erwartungswert und Standardabweichung des szenario-übergreifenden Jahresgesamtschadens aus der Aggregation der ELT-Parameter pro Einzelszenario hervorgehen und damit verdichtete Größen darstellen. Dieser Schritt ist somit bereits mit einem Informationsverlust verbunden, der im Falle von Katastrophenschadenverteilungen umso schwerer wiegt, da sich das seltene Auftreten von Katastrophenschäden (Jahresfrequenz der vorliegenden ELT beträgt lediglich 0,018) in Kombination mit der hohen Schadenhöhe bei Eintritt der einzelnen Szenarien auf



szenario-übergreifender Ebene in einer entsprechenden Schiefe des Jahresgesamtschadens niederschlägt. Erwartungswert und Standardabweichung enthalten im Allgemeinen zu wenige Informationen über den Verlauf der Jahresgesamtschadenverteilung, insbesondere am ökonomisch relevanten rechten Verteilungsende. Es besteht daher die Gefahr, dass die Approximation mit der Lognormalverteilung zu grob ist und das Schadenpotential am rechten Verteilungsende und damit das Katastrophenrisiko nicht adäquat erfasst werden. Hinweis: es könnte an dieser Stelle auch noch ein Ergebnis aus Aufgabenteil (b) herangezogen werden, um aufzuzeigen, dass die „wahre“ Verteilung der vorliegenden ELT bereits im „hochfrequenten“ Bereich der kleinen bzw. mittleren Wiederkehrperioden nicht gut getroffen wird. Der „Bad Financial Loss“ (entspricht dem 1 in 20 Jahren-Ereignis) beträgt unter der Lognormalverteilungsapproximation ca. 35, unter der „wahren“ Verteilung aber 0, da unter der Poisson-Annahme bei einer Frequenz von 0,018 Überschwemmungsereignisse überhaupt nur seltener als 1 in 50 Jahren beobachtet werden.

Das Verfahren zur Re-Simulation aus einer Event Loss Table beinhaltet die Modellierung von Einzelereignissen gemäß kollektivem Modell und nutzt dazu die in der ELT vorliegenden Informationen auf Einzelszenariobasis. Dieser Ansatz versetzt die Modellierer in die Lage, bei entsprechend hoher Simulationsanzahl die „wahre“ Katastrophenschadenverteilung des externen Modells nahezu exakt zu reproduzieren.

Hinsichtlich der Abbildung der Risikominderung aus Rückversicherung: beim vereinfachten Ansatz liegen ausschließlich Jahresschäden vor, somit lassen sich bspw. Quoten und Stop-Loss-Verträge auf Jahresschadenbasis exakt abbilden. Im Gegensatz dazu liegen aus dem Re-Simulationsverfahren Einzelereignisse vor, wodurch sich einzelereignisbasierte RV-Verträge wie Kumulschadenexzedenten exakt im Modell abbilden lassen, während dies im vereinfachten Vorgehen nur approximativ möglich ist.

Zusammengenommen sollte dem Re-Simulationsansatz der Vorzug gegeben werden.



### Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reserverisiko) [20 Punkte]

- (a) [4 Punkte] Das einjährige Reserverisiko beschreibt das Risiko eines ökonomischen Abwicklungsverlustes über den Zeitraum von einem Jahr. Die maßgebliche Verlustvariable zur Messung des einjährigen Reserverisikos per 31.12.2018 ist somit das negative Abwicklungsergebnis  $-\widehat{\text{CDR}}^{(2018 \rightarrow 2019)}$  des Kalenderjahres 2019. Da der Erwartungswert des Abwicklungsergebnisses Null beträgt, und dem negativen Abwicklungsergebnis eine zentrierte Normalverteilung mit Standardabweichung = Quadratwurzel des mittleren quadratischen Prognosefehlers

$$\widehat{\text{mse}}_{\widehat{\text{CDR}}^{(2018 \rightarrow 2019)} | \mathcal{D}_{2018}}(0)$$

unterstellt werden soll, ermittelt sich das einjährige Reserverisiko gemäß Definition des Risikomaßes Value-at-Risk als Quantil dieser Normalverteilung, d.h.

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VaR}}_{99,5\%}(-\widehat{\text{CDR}}^{(2018 \rightarrow 2019)}) &= \Phi^{-1}(0,995) \cdot \widehat{\text{mse}}_{\widehat{\text{CDR}}^{(2018 \rightarrow 2019)} | \mathcal{D}_{2018}}(0)^{1/2} \\ &= 2,58 \cdot \sqrt{25} = 2,58 \cdot 5 = 12,9. \end{aligned}$$

- (b) [6 Punkte] Sei ein Schadenportfolio mit  $n$  Anfall- und Abwicklungsjahren gegeben. Das ökonomische Abwicklungsergebnis  $\widehat{\text{CDR}}^{(n \rightarrow n+1)}$  des Schadenportfolios im Zeitintervall  $[n; n+1]$  ist definiert als:

$$\widehat{\text{CDR}}^{(n \rightarrow n+1)} := \sum_{j=1}^n \widehat{\text{CDR}}_j^{(n \rightarrow n+1)},$$

wobei das ökonomische Abwicklungsergebnis  $\widehat{\text{CDR}}_j^{(n \rightarrow n+1)}$  des  $j$ -ten Anfalljahres wiederum definiert ist als:

$$\widehat{\text{CDR}}_j^{(n \rightarrow n+1)} := \hat{R}_j^{(n)} - S_{j, n-j+2} - \hat{R}_j^{(n+1)}$$

mit

$\hat{R}_j^{(n)}$  := eingehende nominale Best-Estimate-Reserve für Anfalljahr  $j$  im Zeitpunkt  $t = n$

$S_{j, n-j+2}$  := nominale Zahlungen für Anfalljahr  $j$  im Zeitraum  $[n; n+1]$

$\hat{R}_j^{(n+1)}$  := ausgehende nominale Best-Estimate-Reserve im Zeitpunkt  $t = n+1$

Das beobachtete ökonomische Abwicklungsergebnis im Kalenderjahr 2019 ermittelt sich zu:

$$\begin{aligned} &\widehat{\text{CDR}}^{(2018 \rightarrow 2019)} \\ &= \hat{R}^{(2018)} - \sum_{i=\{2015, \dots, 2018\}, i+k=2019} S_{i,k} - \sum_{i=\{2015, \dots, 2018\}, i+k>2019} \hat{S}_{i,k}^{(2019)} \\ &= 288 - 150 - 188 = -50. \end{aligned}$$



Das per 31.12.2018 erwartete Abwicklungsergebnis beträgt 0. Es ergibt sich ein ökonomischer Abwicklungsverlust in Höhe von 50 GE, was etwa dem vierfachen des Abwicklungsverlust entspricht, wie er unter der Normalverteilungsannahme und Parametrisierung anhand der Formeln nach Merz-Wüthrich nur alle 1 in 200 Jahren eintritt. Somit stellt der im Kalenderjahr 2019 beobachtete Abwicklungsverlust ein Verlustereignis dar, das unter dem Modell eine deutlich höhere Wiederkehrperiode als 1 in 20 Jahren aufweist.

(c) [3 Punkte] Die Merz-Wüthrich-Formel basiert auf den folgenden Annahmen:

- Die Schadenabwicklung genügt dem stochastischen Chain-Ladder Modell nach Mack (es ist an dieser Stelle nicht notwendig, die einzelnen Annahmen wie Unabhängigkeit der Anfalljahre, Erwartungs- und Varianzannahme explizit anzugeben und auszuführen)
- Die aktuarielle Bewertung der Schadenreserven zum Stichtag  $n$  wird anhand eines reinen Chain-Ladder-Verfahrens (d.h. ohne Faktorenausschlüsse und Kurvenglättung, ohne Nachlauf) auf dem kompletten Schadendreieck  $\mathcal{D}_n = \{S_{i,k}\}_{i+k \leq n+1}$  vorgenommen.
- Die aktuarielle Neu-Bewertung der Schadenreserven zum Stichtag  $n + 1$  wird anhand eines reinen Chain-Ladder-Verfahrens auf dem kompletten Schadendreieck  $\mathcal{D}_{n+1} = \{S_{i,k}\}_{i+k \leq n+2}$  vorgenommen.

(d) [7 Punkte] Es ist ersichtlich, dass die Reservierungsaktuare von „Haus & Hof“ zur Best-Estimate-Bewertung per 31.12.2018 (und ebenso nicht per 31.12.2019) nicht das reine Chain-Ladder-Verfahren angewendet haben, da

- eine Tailextrapolation über zwei weitere Abwicklungsjahre stattfindet.
- sich die Chain-Ladder-Faktoren zu  ${}_B\hat{f}_2^{(2018)} = 2$  und  ${}_B\hat{f}_3^{(2018)} = 1,5$  ermitteln, tatsächlich aber  $\hat{f}_2^{(2018)} = 1,70$  und  $\hat{f}_3^{(2018)} = 1,29$  zur Fortschreibung verwendet wurden.
- Die Anwendung des reinen Chain-Ladder-Verfahrens hätte eine Best-Estimate-Reserve in Höhe von

$$\begin{aligned} {}_B\hat{R}^{(2018)} &= S_{2018,1} \cdot \left( {}_B\hat{f}_2^{(2018)} \cdot {}_B\hat{f}_3^{(2018)} - 1 \right) + (S_{2017,1} + S_{2017,2}) \cdot \left( {}_B\hat{f}_3^{(2018)} - 1 \right) \\ &= 100 \cdot 2 + 140 \cdot 0,5 = 270. \end{aligned}$$

ergeben, tatsächlich haben die Aktuare aber eine Reserve in Höhe von

$$\hat{R}^{(2018)} = \sum_{i \in \{2015, \dots, 2018\}, i+k \geq 2019} \hat{S}_{i,k}^{(2018)} = 288.$$

geschätzt.



Analog zum Skript bezeichnet  $\mathcal{B}$  hierbei das Basisverfahren, in diesem Fall also das reine Chain-Ladder-Verfahren.

Obwohl die Abweichungen zwischen den beiden Reserveschätzern unter rein quantitativen Gesichtspunkten verhältnismäßig klein sind, sind die von den Reservierungsaktuarien vorgenommenen Anpassungen gegenüber dem reinen Chain-Ladder-Verfahren unter qualitativen Gesichtspunkten deutlich substantieller Natur. Somit ist der Übertrag des gemäß Formel von Merz-Wüthrich ermittelten Prognosefehlers auf das vorliegende verallgemeinerte Chain-Ladder-Verfahren insbesondere unter Berücksichtigung der Backtesting-Ergebnisse aus Aufgabenteil (b) insgesamt mit Vorsicht zu behandeln und sind ggf. alternative Verfahren anzuwenden.



### **Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Reservebericht und Schätzunsicherheit) [26 Punkte]**

Zu den folgenden Teilaufgaben sind jeweils mehr Punkte angegeben als in der Aufgabenstellung verlangt werden.

(a) [2 Punkte] Die folgenden Gründe sprechen für das Verfassen eines Reserveberichts, stellen aber natürlich keine abschließende Liste dar.

- Der Reservebericht dient als Informationsquelle für diverse Zielgruppen, z.B. Vorstand und Führungskräfte, Wirtschaftsprüfer, VmF, Reservierungsaktuare.
- Der Reservebericht kann als zentrale Dokumentationsquelle dienen, vor allem im Sinne einer übergreifenden Dokumentation.
- Der Reservebericht kann der Versicherungsmathematischen Funktion als Basis zur Erfüllung einiger ihrer Pflichten dienen (Koordinierung der Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II).

(b) [12 Punkte] Argumente, die dafür sprechen, sind beispielsweise:

- Der Reservebericht enthält umfassende Informationen, beispielsweise zu wesentlichen Charakteristika des Schaden- bzw. Vertragsbestandes, die die externen Reservierungsaktuare für eine fundierte aktuarielle Bewertung der Rückstellungen benötigen.
- Eine übersichtliche Zusammenstellung von wesentlichen Datenquellen, Eigenschaften des Bestandes oder allgemeinen Besonderheiten erlaubt den externen Aktuaren eine zügige Durchführung und hilft so, Kosten zu sparen.
- Das Vorliegen des Reserveberichts ermöglicht den externen Aktuaren eine konsistente Darstellung ihrer Erkenntnisse und Ergebnisse, beispielsweise bzgl. Gliederung des Ergebnisberichts oder Inhalt diverser Übersichtstabellen. Diese Konsistenz erleichtert dem Vorstand die Interpretation der Ergebnisse.
- Auf Basis der Vorjahresergebnisse können die externen Aktuare ein „Backtesting“ durchführen und prüfen, inwieweit die aktuellen Zahlen von den Vorjahresprognosen abweichen.
- Anhand der Prozessdokumentation können die externen Aktuare Mängel und Schwachstellen des bisherigen Vorgehens aufdecken und thematisieren.



Argumente, die dagegen sprechen, sind beispielsweise:

- Die Kenntnis der internen Projektionsergebnisse erschwert es den externen Reservierungsaktuaren, zu einer unabhängigen Einschätzung zu gelangen. Eine Beeinflussung kann sowohl unbewusst über „Anchoring“ erfolgen, als auch bewusst, da ein signifikant abweichendes Ergebnis eine fundierte Begründung erfordern würde.
- Ein Mehrwert des externen Auftrags wäre es, neue Ideen oder andere Perspektiven für die Bewertung der Rückstellungen zu erhalten, beispielsweise bei der Auswahl oder Segmentierung der Daten oder bei der Auswahl von Projektionsparametern und -methoden. Auch hier besteht die Gefahr, dass bei der externen Bewertung eine zu große Anlehnung an die interne Vorgehensweise erfolgt, welche im Reservebericht beschrieben ist, und so neue Impulse verhindert werden.
- Bei Auffälligkeiten, beispielsweise Inkonsistenzen in den Daten, wäre es wichtig, dass die externen Aktuare sich des Themas annehmen und die Problematik vollständig durchdringen. Eine vorhandene Behandlung des Themas im Reservebericht könnte dazu führen, dass der Punkt als „erledigt“ betrachtet wird und keine tiefergehende Analyse stattfindet.

(c) [12 Punkte] Beispiele für Situationen, bei denen die Alternative „Methodenunsicherheit“ nicht aussagekräftig ist:

- Ausgeprägter Prämienzyklus: Bei Vorliegen eines starken Prämienzyklus können die Projektionsergebnisse des ILR-Verfahrens völlig unrealistisch sein. Falls das Dreieck aus CL-Sicht gut fortgesetzt werden kann, würde hier eine hohe Schätzunsicherheit suggeriert, die nicht existiert.
- CL-Projektionen reagieren bekanntlich sehr empfindlich auf ungewöhnlich hohe bzw. niedrige Schadenstände auf der aktuellen Diagonale, insbesondere im jüngsten Anfalljahr. Die Folge können extreme Projektionsergebnisse sein, die eine nicht vorhandene Schätzunsicherheit suggerieren.
- Die Projektionsergebnisse aller vier Methoden können insbesondere für ein einzelnes Anfalljahr zufällig sehr nahe beieinander liegen. In diesem Fall würde die tatsächlich vorhandene Schätzunsicherheit unterschätzt.
- Ein ausgeprägter Kalenderjahreseffekt, der lediglich die Schadenaufwände betrifft, nicht aber die Zahlungen, könnte bei zwei der vier Methoden zu Verzerrungen führen und damit eine unrealistisch große Methodenunsicherheit bedingen.

Beispiele für Situationen, bei denen die Alternative „Stochastische Modellierung“ nicht aussagekräftig ist:



- Sowohl das ILR-Modell, als auch das CL-Modell setzen die Unabhängigkeit der Anfalljahre voraus. Besteht für das Segment die Möglichkeit deutlicher Kalenderjahreseffekte, so kann diese Abhängigkeit durch das Modell nicht adäquat abgebildet werden und der geschätzte Schätzfehler kann deutlich zu klein sein.
- Auch hier kann die Sensitivität von CL-Projektionen gegenüber sehr niedrigen Schadenständen auf der aktuellen Diagonalen Probleme bereiten. Diese Stände können zu sehr niedrigen Projektionen und zugleich unrealistisch niedrigen Schätzfehlern führen.
- Spiegelt keines der 4 vorgegebenen Modelle die Eigenschaften des Dreiecks adäquat wieder, so besteht die Möglichkeit, dass die berechneten Schätzfehler unrealistische Größenordnungen haben.
- Erfordert die Projektion einen signifikanten Nachlauf (Tail), so kann es sein, dass der inhärente Modellfehler sehr groß gegenüber dem berechneten Schätzfehler ist und nicht adäquat abgebildet wird.



### Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Rechnungslegung) [20 Punkte]

- (a) [6 Punkte] Die zutreffende Antwort ist für (A) Solvency II, für (B) HGB, für (C) IFRS17, für (D) Solvency II, für (E) Solvency II und für (F) HGB.
- (b) [6 Punkte] Aufgrund der Vorgaben zum Versicherungszweig und zur Grenzscha- denquote berechnet sich der Sollbetrag zu

$$SB_{16} = 4,5 \cdot \bar{\sigma} \cdot P_{16} = 45.$$

Da  $\bar{q} > q_{16}$ , liegt ein Unterschaden von  $B = (\bar{q} - q_{16}) \cdot P = 2\% \cdot 100 = 2$  vor. Die Schwankungsrückstellung des Bilanzjahres 16 ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} SR_{16} &= \min\left(\max(SR_{15} + 3,5\% \cdot SB_{16} + B; 0); SB_{16}\right) \\ &= \min\left(\max(42 + 3,5\% \cdot 45 + 2; 0); 45\right) \\ &= \min(45,575; 45) \\ &= 45. \end{aligned}$$

- (c) [8 Punkte] Da mit dem Übergang zum neuen Geschäftsjahr 17 die relativ hohe Schadenquote  $q_1 = 100\%$  aus dem Beobachtungszeitraum herausfällt und stattdessen die eher durchschnittliche Schadenquote  $q_{16} = 70\%$  hinzu- kommt, lässt sich bereits ohne Rechnung erkennen, dass die Standardabwei- chung sinken wird. Da das Prämienvolumen gleich bleibt, sinkt der Sollbetrag ( $SB_{17} < SB_{16}$ ). Da der Sollbetrag „voll“ war ( $SR_{16} = SB_{16}$ ), sinkt damit sicher auch die Schwankungsrückstellung, egal ob die Schadenquote  $q_{17}$  einen Un- terschaden oder einen Überschaden bewirkt.

Eine einfache Näherung für die neue Standardabweichung  $\bar{\sigma}^*$  der Beobach- tungsjahre 2, ..., 16 ist durch

$$(\bar{\sigma}^*)^2 \approx (\bar{\sigma})^2 - \frac{(28\%)^2}{14} = 0,0044,$$

also durch  $\bar{\sigma}^* \approx 6,6\%$  gegeben. Sie ergibt sich aus der Formel

$$(\bar{\sigma})^2 = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{15} (q_i - \bar{q})^2$$

durch Weglassen des ersten Summanden. Änderungen durch die neue durch- schnittliche Schadenquote  $\bar{q}^*$  oder den neuen Summanden  $(q_{16} - \bar{q}^*)^2$  werden bei der Näherung ignoriert. Eine exakte Rechnung liefert

$$\bar{q}^* = \frac{1}{15} \sum_{i=2}^{16} q_i = \frac{1}{15} (q_1 + \dots + q_{15} + q_{16} - q_1) = \bar{q} + \frac{q_{16} - q_1}{15} = 70\%$$



für die durchschnittliche Schadenquote  $\bar{q}^*$  der Beobachtungsjahre  $2, \dots, 16$  und

$$\begin{aligned}(\bar{\sigma}^*)^2 &= \frac{1}{14} \sum_{i=2}^{16} (q_i - \bar{q}^*)^2 \\&= \frac{1}{14} \sum_{i=2}^{16} (q_i - \bar{q} + 2\%)^2 \\&= \frac{1}{14} \sum_{i=2}^{16} \left( (q_i - \bar{q})^2 + 2 \cdot (q_i - \bar{q}) \cdot 2\% + (2\%)^2 \right) \\&= \frac{1}{14} \sum_{i=2}^{16} (q_i - \bar{q})^2 + \frac{2 \cdot 2\%}{14} \cdot 15 \cdot (\bar{q}^* - \bar{q}) + \frac{(2\%)^2}{14} \cdot 15 \\&= \frac{1}{14} \left( (q_{16} - \bar{q})^2 - (q_1 - \bar{q})^2 + \sum_{i=1}^{15} (q_i - \bar{q})^2 \right) - \frac{(2\%)^2}{14} \cdot 15 \\&= \frac{(-2\%)^2}{14} - \frac{(28\%)^2}{14} + (\bar{\sigma})^2 - \frac{(2\%)^2}{14} \cdot 15 \\&= \frac{1}{250}\end{aligned}$$

also

$$\bar{\sigma}^* = \frac{1}{5\sqrt{10}} \approx 6,3\%.$$

Für den Sollbetrag des Bilanzjahres 17 erhält man damit

$$SB_{17} = 4,5 \cdot \bar{\sigma}^* \cdot P_{17} \approx 28,5.$$

Für das Bilanzjahr 17 bedeutet dieses Ergebnis, dass unabhängig davon, ob ein Über- oder ein Unterschaden eintritt, sich die Schwankungsrückstellung um mindestens  $45 - 28,5 = 16,5$ , also um mindestens 16,5 Mio. EUR reduzieren wird.

(Eine Näherung war in der Aufgabenstellung nicht verlangt, wurde aber als gute Teillösung gewertet und ist deshalb hier zusätzlich angegeben.)



### Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Abwicklungsstatistiken) [12 Punkte]

- (a) [4 Punkte] Im Anfalljahresdreieck werden in einer Zeile  $i$  alle Schäden (Zahlungen bzw. Schadenaufwände) erfasst, deren Schadendatum im Jahr  $i$  liegt. Im Zeichnungsjahresdreieck ist das Jahr entscheidend, in dem die zugehörige Versicherungspolice gezeichnet wurde und in der Meldejahrstatistik das Jahr, in dem der Schaden der Versicherung gemeldet wurde.

Als Beispiel kann eine Haftpflichtpolice mit Laufzeit 01.11.2004 bis 31.10.2005 dienen, die einen Haftpflichtschaden (z.B. eine Sachbeschädigung) deckt, der sich am 13.10.2005 ereignet hat, aber erst ca. 3 Monate später bemerkt und daher erst am 09.01.2006 der Versicherung gemeldet wurde. In einem Anfalljahresdreieck wird der Schaden in der Zeile 2005 gezeigt, im Zeichnungsjahresdreieck in der Zeile 2004 und im Meldejahresdreieck in der Zeile 2006.

- (b) [4 Punkte] Die älteren Diagonalen des ZS-Dreiecks enthalten (in der Regel) alle zugehörigen Abrechnungen der Zedenten, sind also vollständig. Die letzte Diagonale des Abwicklungsdreiecks ist hingegen nach Konstruktion unvollständig, da zumindest die Abrechnungen der jeweiligen vierten Quartale, wahrscheinlich aber noch mehr Abrechnungen fehlen. Daher ist die letzte Diagonale nicht mit den vorangehenden vergleichbar und die Standardreservierungsmethoden können nicht angewendet werden. Unter FS besteht dieses Problem nicht, da in jeder Diagonale diejenigen Abrechnungen berücksichtigt sind, die bis zum entsprechenden Jahresende verbucht wurden.
- (c) [4 Punkte] Im ZS-Dreieck hat dieses Szenario keine Auswirkung, da die Verzögerung der Zustellung der Abrechnungen bei der Erstellung des Dreiecks ignoriert wird. (Dies gilt natürlich nur, sobald die Abrechnungen verbucht wurden, was zum 31.12.2019 nach Angabe der Fall war.) Im FS-Dreieck zeigen die Kalenderjahre 2017 und 2018 einen Kalenderjahreseffekt. Die Art und Ausprägung hängen von den Charakteristika des Segments ab. In der Regel wird im Falle von Zahlungsdreiecken 2017 ein Kalenderjahr mit unterdurchschnittlichen Faktoren bzw. Zuwachsquoten und 2018 ein Kalenderjahr mit überdurchschnittlichen Faktoren bzw. Zuwachsquoten sein.



### Lösungshinweise zu Aufgabe 8 (Ein einfaches Modell für Kalenderjahreseffekte) [25 Punkte]

(a) [5 Punkte] Es gilt

$$E(T_{i,k}) = E(S_{i,k} + K_{i+k-1} \cdot \sigma_k \sqrt{v_i}) = m_k^S \cdot v_i,$$

da  $E(K_{i+k-1}) = 0$  ist, und

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_{i,k}) &= \text{Var}(S_{i,k} + K_{i+k-1} \cdot \sigma_k \sqrt{v_i}) \\ &= \text{Var}(S_{i,k}) + \text{Var}(K_{i+k-1}) \cdot \sigma_k^2 v_i \\ &= (1 + \tau^2) \cdot \sigma_k^2 v_i, \end{aligned}$$

da  $S_{i,k}$  und  $K_{i+k-1}$  unabhängig sind sowie  $\text{Var}(K_{i+k-1}) = \tau^2$  ist. Damit erfüllen die Zuwächse  $T_{i,k}$  die Annahmen (ILR2) und (ILR3) des ILR-Modells mit

$$m_k^T = m_k^S \quad \text{und} \quad \tau_k^2 = (1 + \tau^2) \cdot \sigma_k^2.$$

(b) [2 Punkte] Für zwei Anfalljahre  $i < l$  und ein Kalenderjahr  $j \geq l$  gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T_{i,j-i+1}, T_{l,j-l+1}) &= \text{Cov}(S_{i,j-i+1} + K_j \cdot \sigma_j \sqrt{v_i}, S_{l,j-l+1} + K_j \cdot \sigma_j \sqrt{v_l}) \\ &= \text{Cov}(K_j \cdot \sigma_j \sqrt{v_i}, K_j \cdot \sigma_j \sqrt{v_l}) \\ &= \sigma_j \sqrt{v_i} \cdot \sigma_j \sqrt{v_l} \cdot \tau^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Damit gilt die Annahme (ILR1) nicht für die Zuwächse  $T_{i,k}$ .

Zusatzbemerkung: Die Annahme (K1) beinhaltet (ILR1) für die Basiszuwächse  $S_{i,k}$  sowie die Unabhängigkeit der Kalenderjahreskomponenten  $K_1, \dots, K_{n+u-1}$ . Sie impliziert außerdem die Unabhängigkeit von Basiszuwächsen  $\{S_{i,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq u\}$  und Kalenderjahreskomponenten  $\{K_j \mid 1 \leq j \leq n + u - 1\}$ .

(c) [2 Punkte] Da in der Darstellung der Zuwächse  $T_{1,k}, \dots, T_{n,k}$  die jeweiligen Basiszuwächse  $S_{1,k}, \dots, S_{n,k}$  und Kalenderjahreskomponenten  $K_k, \dots, K_{n+k-1}$  alle verschieden sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus (K1).

(d) [2 Punkte] Die Unabhängigkeit der Kalenderjahreskomponenten  $K_1, \dots, K_{n+u-1}$  bedeutet, dass das Eintreten von Kalenderjahreseffekten zufällig stattfindet und sich die Kalenderjahre gegenseitig nicht beeinflussen. In der Praxis können sich Kalenderjahreseffekte aber über mehrere Jahre hinziehen. Zum Beispiel führt eine Anpassung der Sätze im Rechtsanwaltsgebührengesetz typischerweise zu erhöhten Zahlungen über die folgenden Kalenderjahre hinweg. Ein weiteres Beispiel stellt ein erhöhtes Inflationsniveau dar, dass typischerweise mehrere Kalenderjahre betrifft.



(e) [4 Punkte] Durch Beispiel 1 wird der Fall modelliert, dass es selten (im Schnitt alle 20 Jahre) zu einem deutlich ausgeprägten Kalenderjahreseffekt überdurchschnittlicher Zuwachsquoten (mit mittleren Residuen knapp unter 2) kommt. In allen restlichen Kalenderjahren ist der Einfluss der Kalenderjahreskomponente kaum sichtbar. Die beobachteten Zuwachsquoten liegen leicht unter dem Durchschnitt, welcher die seltenen, erhöhten Werte mitberücksichtigt. Auf diese Weise können plötzliche, aber seltene Effekte wie Gesetzesänderungen, Änderungen in der Rechtsprechung etc. modelliert werden.

Das Modell in Beispiel 2 hingegen geht davon aus, dass praktisch alle Kalenderjahre durch (mehr oder weniger starke) Effekte betroffen sind. Kalenderjahre mit deutlich über- bzw. unterdurchschnittlichem Abwicklungsverhalten sind der Normalfall. Der Einfluss von Inflation oder Lohn- bzw. Gehaltsanpassungen könnte hiermit modelliert werden. Zyklusartige Bewegungen über die Kalenderjahre hinweg würden aber den Modellvoraussetzungen widersprechen, da die Kalenderjahreskomponenten dann nicht unabhängig wären.

(f) [2 Punkte] Die entsprechenden Rechnungen und Begründungen beziehen sich stets nur auf ein Abwicklungsjahr  $k$ . Innerhalb dieses Abwicklungsjahres ist nach Teilaufgabe c) die Unabhängigkeit entsprechend (ILR1) gegeben und daher gelten die entsprechenden Aussagen und Folgerungen des ILR-Modells.

(g) [8 Punkte] Wegen (K1) gilt

$$\text{Var}(R_i) = \text{Var}(T_{i,n-i+2}) + \dots + \text{Var}(T_{i,u}),$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{Var}(R) &= \text{Var}\left(\sum_{j=n+1}^{n+u-1} \sum_{i=\max(j+1-u;1)}^n T_{i,j-i+1}\right) \\ &= \sum_{j=n+1}^{n+u-1} \text{Var}\left(\sum_{i=\max(j+1-u;1)}^n T_{i,j-i+1}\right) \\ &= \sum_{j=n+1}^{n+u-1} \sum_{i,l=\max(j+1-u;1)}^n \text{Cov}(T_{i,j-i+1}, T_{l,j-l+1}). \end{aligned}$$

Für  $i = l$  ist  $\text{Cov}(T_{i,j-i+1}, T_{l,j-l+1}) = \text{Var}(T_{i,j-i+1})$ . Für  $i \neq l$  hingegen ist

$$\text{Cov}(T_{i,j-i+1}, T_{l,j-l+1}) = \sigma_{j-i+1} \sqrt{v_i} \cdot \sigma_{j-l+1} \sqrt{v_l} \cdot \tau^2 > 0,$$

wie oben bereits berechnet. Damit ergibt sich insgesamt

$$\text{Var}(R) = \sum_{i+k>n+1} \text{Var}(T_{i,k}) + \sum_{j=n+1}^{n+u-1} \sum_{\substack{i,l=\max(j+1-u;1) \\ i \neq l}}^n \sigma_{j-i+1} \sqrt{v_i} \cdot \sigma_{j-l+1} \sqrt{v_l} \cdot \tau^2$$

und damit die Behauptung.



Das ILR-Modell und das K-ILR-Modell sind sich sehr ähnlich. Die Anwendung der Modelle auf die Zuwächse  $T_{i,k}$  liefert die gleichen Schätzungen für Zuwachsqoten, Varianzparameter, zukünftige Zuwächse und sogar den Zufallsfehler eines Anfalljahres. Beim Zufallsfehler der Summe der zukünftigen Zuwächse jedoch greift der Unterschied zwischen den Modellen. Dieser Zufallsfehler (und seine Schätzung) ist im K-ILR-Modell größer, da eine zusätzliche Abhängigkeit in jedem Kalenderjahr modelliert wird.



## Lösungshinweise zu Aufgabe 9 (Munich-Chain-Ladder und Residuenanalyse) [27 Punkte]

(a) [7 Punkte] Für  $k = 1, \dots, n-1$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-k+1} \widehat{\text{Res}}(C_{i,k}/D_{i,k})^2 &= \frac{1}{(\widehat{\rho}_k^{C/D})^2} \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{(C_{i,k} - \widehat{q}_k D_{i,k})^2}{D_{i,k}} \\ &= \frac{n-k}{\sum_{j=1}^{n-k+1} D_{j,k} \left(\frac{C_{j,k}}{D_{j,k}} - \widehat{q}_k\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{(C_{i,k} - \widehat{q}_k D_{i,k})^2}{D_{i,k}} \\ &= n-k. \end{aligned}$$

Mit der analogen Rechnung für  $D/C$ , welche nicht gefordert war, gelten also die beiden Summenformeln für Residuenquadrate

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \widehat{\text{Res}}(C_{i,k}/D_{i,k})^2 = n-k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n-k+1} \widehat{\text{Res}}(D_{i,k}/C_{i,k})^2 = n-k.$$

(b) [4 Punkte] Die Residuenformel zeigt auf, dass die Schätzer der Residuen Abhängigkeiten aufweisen, die die Residuen selbst nicht haben. So sind die Schätzungen der Residuen eines Abwicklungsjahres abhängig, die Durchschnittsgröße der Quadrate im Abwicklungsjahr  $k$  beträgt  $\frac{n-k}{n-k+1}$ , sinkt also über die Abwicklungsjahre hinweg und, als wohl wichtigste Folgerung, der Betrag der Schätzung eines Residuums ist durch  $\sqrt{n-k}$  beschränkt. In hohen Abwicklungsjahren stellt dies eine signifikante Bedingung dar. So ist beispielsweise ein Residuum vom Wert 3 oder größer in den Abwicklungsjahren  $k = n-9, n-8, \dots, n-1$  nicht möglich.

Analyse des  $C/D$ -Dreiecks: Die Residuen der  $C/D$ -Quoten beschreiben/schätzen die normierten Abweichungen vom Mittelwert der beobachteten individuellen  $C/D$ -Quoten. Auf diese Weise können beispielsweise Ausreißer (Residuen mit großem Betrag), Kalenderjahreseffekte (alle oder die meisten Residuen eines Kalenderjahres über- oder unterdurchschnittlich) oder kontinuierliche Veränderungen (Trends in den Residuenwerten in diversen Bereichen/Richtungen des Dreiecks) identifiziert werden. Da bei der Analyse aber nur die Schätzungen der Residuen vorliegen, muss deren Abhängigkeitsstruktur in Betracht gezogen werden. Sollen beispielsweise Ausreißer identifiziert werden, so muss die Größenbeschränkung berücksichtigt werden.

Schätzung der Korrelationsparameter: Mit zunehmendem Abwicklungsjahr beruht die Schätzung von Abwicklungsfaktoren,  $C/D$ -Quoten und diversen Varianzparametern auf immer weniger Datenpunkten. Daher unterliegt die Schätzung der Residuen immer größeren Unsicherheiten. Hier ist es von Vorteil, dass



die Quadrate der geschätzten Residuen in der rechten Dreiecksspitze relativ klein werden und daher die Korrelationsschätzung nur wenig beeinflussen.

(c) [7 Punkte] Lösung zu Szenario (1), Fragen a) und b):

**(D-KJ)** Die angeführten Sprünge sorgen für vereinzelte, relativ große Residuen, wobei deren Größe natürlich in höheren Abwicklungsjahren durch die Summenformel für Residuenquadrate begrenzt ist. Zusammen mit den Sprüngen sind auch die großen Residuen zufällig über die Kalenderjahre verteilt.

**(C-KJ)** Im Prinzip gilt die gleiche Beschreibung wie bei den  $D$ -Abwicklungsfaktoren, wobei die Sprünge und damit die Residuen etwas zahlreicher und kleiner sein sollten, da die großen Schäden nicht unbedingt auf einmal bezahlt werden.

**(C/D-KJ)** Im Falle eines großen Schadens sinkt zunächst der  $C/D$ -Stand und steigt dann mit der Zahlung bzw. den Zahlungen wieder an. Dies sorgt für eine eher breite Streuung der  $C/D$ -Quoten, wird aber in der Kalenderjahresgrafik nicht als Kalenderjahreseffekt sichtbar sein.

**(D-MCL)** Die Größenverteilung der Residuen der  $D$ -Abwicklungsfaktoren ist eher rechtsschief und die den großen Schäden vorangehenden  $C/D$ -Quoten sollten zufällig verteilt sein. Diese Punkteverteilung wird somit zu einer eher kleineren Korrelationsschätzung für  $\lambda^D$  führen.

**(C-MCL)** Bei den Zahlungen folgen die relativ großen  $C$ -Abwicklungsfaktoren auf unterdurchschnittliche  $C/D$ -Quoten, also überdurchschnittliche  $D/C$ -Quoten. Im Residuenplot führt dies zu einer hohen Korrelation und damit zu einer großen Schätzung für  $\lambda^C$ .

(d) [2 Punkte] Lösung zu Szenario (2):

a) Das Prämienaufkommen geht in keine Residuenberechnung und damit in keine der Grafiken ein. Daher gilt für alle Grafiken, dass sie nicht zur Überprüfung geeignet sind.

(e) [7 Punkte] Lösung zu Szenario (3):

a) Es zeigen sich folgende Auswirkungen:

**(D-KJ)** Die Grafik zeigt einen deutlichen Kalenderjahreseffekt überdurchschnittlicher Residuen im Kalenderjahr  $n$ , da in diesem Kalenderjahr die Schadenaufwände sehr stark angestiegen sind. Aufgrund der langen Abwicklungsdauer ist klar, dass auch die älteren Anfalljahre betroffen sind.



- (C-KJ)** Hier gibt es keine Auswirkung, da die Zahlungen durch die beschriebenen Ereignisse im Kalenderjahr  $n$  noch nicht betroffen sind.
- (C/D-KJ)** In dieser Grafik ist ein deutlicher Kalenderjahreseffekt unterdurchschnittlicher Residuen im Kalenderjahr  $n$  zu beobachten, da die Zahlungen nur in normalem Rahmen gestiegen sind, die Schadenaufwände hingegen weit überdurchschnittlich. Auch hier gilt, dass aufgrund der langen Abwicklungsdauer die älteren Anfalljahre ebenfalls betroffen sind.
- (D-MCL)** Zwar sind die Residuen der  $D$ -Abwicklungsfaktoren des Kalenderjahres  $n$  überdurchschnittlich, aber die zugehörigen vorangehenden  $C/D$ -Quoten sollten zufällig verteilt sein und daher ist kein systematischer Einfluss zu beobachten. Die unterdurchschnittlichen Residuen der  $C/D$ -Quoten des Kalenderjahres  $n$  werden in dieser Grafik nicht verwendet.
- (C-MCL)** Hier zeigt sich keine Auswirkung, da die Abwicklungsfaktoren der Zahlungen durch den Kalenderjahreseffekt noch nicht betroffen sind und die überdurchschnittlichen Residuen der  $D/C$ -Quoten des Kalenderjahres  $n$  in der Grafik nicht auftauchen.
- Zusatzbemerkung** Da in der D-MCL Grafik die unterdurchschnittlichen Residuen der  $C/D$ -Quoten des Kalenderjahres  $n$  nicht verwendet werden, erscheint die Punktwolke im Residuenplot etwas nach rechts versetzt. Analog erscheint die Punktwolke im C-MCL Residuenplot etwas nach links verschoben.
- b) Da im Residuenplot **(C-MCL)** kein Einfluss von Szenario (3) vorhanden ist, gilt dies insbesondere für die Schätzung des Korrelationsparameters  $\lambda^C$ .
- c) In zukünftigen Kalenderjahren werden die unterdurchschnittlichen  $C/D$ -Quoten d.h. die überdurchschnittlichen  $D/C$ -Quoten durch über dem Durchschnitt liegende Abwicklungsfaktoren bei den Zahlungen kompensiert werden. Daher wird der geschätzte Wert für  $\lambda^C$  größer werden.