



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 20. Juni 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 30 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. [Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]

(a) [7 Punkte] [Sensitivitäten]

- (i) [3 Punkte] Definieren Sie die effektive Zinsduration sowie die Key-Rate-Duration KRD_i bezüglich des zur Laufzeit i bewertungsrelevanten Zinssatzes. Zeigen Sie, dass die Summe der Key-Rate-Durationen KRD_i , $i = 1, \dots, N$, eines Bonds mit Laufzeit von N Jahren seiner effektiven Duration entspricht.
- (ii) [4 Punkte] Geben Sie ein Beispiel zur approximativen Bewertung eines Finanztitels an, bei dem die Verwendung einer Sensitivität versagt:
- Nennen Sie den von Ihnen gewählten Finanztitel sowie den Parameter, bezüglich dessen Sie die Sensitivität verwenden.
 - Beschreiben Sie, wie Sie die gewählte Sensitivität berechnen.
 - Erklären Sie, in welchem Fall die Sensitivität versagt.

(b) [9 Punkte] Gegeben seien die folgenden Marktdaten für eine Zinskurve mit Restlaufzeiten von bis zu 20 Jahren (approximativ EURO-Swap-Kurve Anfang Januar 2020):

Tabelle 1:

Zeit	1	2	3	4	5
Kuponkurve in %	-0,33%	-0,32%	-0,28%	-0,24%	-0,19%
Zerokurve in %	-0,33%	-0,32%	-0,28%	-0,24%	-0,19%
Diskontfaktoren	1,003311	1,006431	1,008451	1,009667	1,009571
Kumulierte Diskontfaktoren	1,003311	2,009742	3,018193	4,027860	5,037431
Zeit	6	7	8	9	10
Kuponkurve in %	-0,13%	-0,08%	-0,01%	0,05%	0,11%
Zerokurve in %	-0,13%	-0,08%	-0,01%	0,05%	0,11%
Diskontfaktoren	1,007859	1,005641	1,000805	0,995476	0,988960
Kumulierte Diskontfaktoren	6,045290	7,050931	8,051736	9,047212	10,036172
Zeit	11	12	13	14	15
Kuponkurve in %	0,17%	0,23%	0,28%	0,32%	0,36%
Zerokurve in %	0,17%	0,23%	0,28%	0,33%	0,37%
Diskontfaktoren	0,981270	0,972423	0,963730	0,955491	0,946520
Kumulierte Diskontfaktoren	11,017443	11,989866	12,953596	13,909087	14,855607
Zeit	16	17	18	19	20
Kuponkurve in %	0,40%	0,43%	0,46%	0,48%	0,50%
Zerokurve in %	0,41%	0,44%	0,47%	0,49%	0,51%
Diskontfaktoren	0,936830	0,928102	0,918859	0,910958	0,902735
Kumulierte Diskontfaktoren	15,792437	16,720539	17,639397	18,550356	19,453090

(i) [2 Punkte] Berechnen Sie mit den angegebenen Diskontfaktoren und kumulierten Diskontfaktoren die Marktwerte für einen StepUp-Bond und einen StepDown-Bond mit 20 Jahren Restlaufzeit und jährlichen Kupons in Höhe von

1. StepUp Bond (Jahr 1-10: 0,25%, Jahr 11-20: 0,75%)
2. StepDown Bond (Jahr 1-10: 0,75%, Jahr 11-20: 0,25%)



Geben Sie die Ergebnisse in Prozent des Nominals mit 6 Nachkommastellen an.

- (ii) [2 Punkte] Berechnen Sie mit den angegebenen Diskontfaktoren und kumulierten Diskontfaktoren die fehlenden Kupons für einen StepUp-Bond und einen StepDown-Bond mit 20 Jahren Restlaufzeit und jährlichen Kupons, sodass der Marktwert der Bonds bei 100% (par) liegt.

3. StepUp-Bond (Jahr 1-10: 0,25%, Jahr 11-20: x%)

4. StepDown-Bond (Jahr 1-10: 0,75%, Jahr 11-20: x%)

Geben Sie die Ergebnisse in Prozent mit 4 Nachkommastellen an.

- (iii) [5 Punkte] Berechnen Sie für die folgenden Bonds

a. StepUp-Bond 3. aus (ii),

b. StepDown-Bond 4. aus (ii),

c. Par-Bond mit 20 Jahren Restlaufzeit und konstantem jährlichen Kupon

die effektive Duration auf Basis einer um 1 Basispunkt (bps) nach oben geschifteten Kurve. Die benötigten Diskontfaktoren finden Sie in Tabelle 2 unten. Geben Sie einen kurzen Kommentar zu den Unterschieden in den Werten der effektiven Duration.

Hinweise: Für a. und b. können Sie die auf 4 Nachkommastellen gerundeten Kupons aus (ii) verwenden. Für c. kann der Kupon aus Tabelle 1 abgelesen werden, der Marktwert bezüglich der ungeschifteten Kurve erfordert keine Rechnung (Par-Bond).

Tabelle 2:

Zeit	1	2	3	4	5
Kuponkurve in %	-0,32%	-0,31%	-0,27%	-0,23%	-0,18%
Zerokurve in %	-0,32%	-0,31%	-0,27%	-0,23%	-0,18%
Diskontfaktoren	1,003210	1,006229	1,008147	1,009262	1,009065
Kumulierte Diskontfaktoren	1,003210	2,009440	3,017587	4,026849	5,035913
Zeit	6	7	8	9	10
Kuponkurve in %	-0,12%	-0,07%	0,00%	0,06%	0,12%
Zerokurve in %	-0,12%	-0,07%	0,00%	0,06%	0,12%
Diskontfaktoren	1,007252	1,004934	1,000000	0,994574	0,987963
Kumulierte Diskontfaktoren	6,043165	7,048099	8,048099	9,042673	10,030637
Zeit	11	12	13	14	15
Kuponkurve in %	0,18%	0,24%	0,29%	0,33%	0,37%
Zerokurve in %	0,18%	0,24%	0,29%	0,34%	0,38%
Diskontfaktoren	0,980181	0,971243	0,962461	0,954134	0,945078
Kumulierte Diskontfaktoren	11,010817	11,982060	12,944521	13,898655	14,843734
Zeit	16	17	18	19	20
Kuponkurve in %	0,41%	0,44%	0,47%	0,49%	0,51%
Zerokurve in %	0,42%	0,45%	0,48%	0,50%	0,52%
Diskontfaktoren	0,935306	0,926496	0,917173	0,909104	0,900893
Kumulierte Diskontfaktoren	15,779044	16,705535	17,622708	18,531902	19,432795



(c) [9 Punkte] [Robustheit, Stabilität und Finanzrisiken]

- (i) [6 Punkte] Nennen Sie drei Algorithmen oder Modelle aus der Finanzlandschaft, die robust sind, und drei Algorithmen oder Modelle, die nicht stabil sind. Benennen Sie dabei, bezüglich welcher Veränderung die Algorithmen/Modelle robust bzw. instabil sind.
- (ii) [3 Punkte] Nennen Sie vier typische Finanzrisiken eines Versicherers und ein Portfolio, das aus zwei typischen Finanztiteln eines Versicherers besteht und das die vier genannten Risiken besitzt.

Lösungsskizze:

- (a) (i) Definitionen: Bezeichnet MV den Marktwert des Bonds zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$, so ist dieser eine Funktion der Spot Rates (Zinskurve) und es gilt:

- *Effektive Duration:*

$$Dur_{eff} := -\frac{1}{MV} \frac{\partial MV}{\partial r_0^z},$$

wobei r_0^z die Parallelverschiebung der bewertungsrelevanten Zinskurve darstellt bzw. $\partial MV / \partial r_0^z$ die Richtungsableitung des Marktwertes bzgl. der Richtung $d = (1, \dots, 1)$ ist

- *Key-Rate-Duration:*

$$KRD_i := -\frac{1}{MV} \frac{\partial MV}{\partial r_0^z(i)},$$

wobei $r_0^z(i)$ den bewertungsrelevanten Zinssatz zur Laufzeit i darstellt und damit $\partial MV / \partial r_0^z(i)$ die Richtungsableitung des Marktwertes bzgl. der Richtung $d_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ darstellt, wobei der Vektor d_i genau an der Stelle i den Wert 1 und sonst 0 besitzt

Gleichheit für Plain Vanilla Bond:

$$\sum_{i=1}^N KRD_i = -\frac{1}{MV} \sum_{i=1}^N \frac{\partial MV}{\partial r_0^z(i)} = -\frac{1}{MV} \frac{\partial MV}{\partial r_0^z} = Dur_{eff}$$

(ii) Beispiel:

- *Finanztitel:* CMS-Floater, Referenzrate 10 Jahres Swap Rate mit Multiplikator 2, Floor 1%, 10 Jahre Laufzeit
- *Sensitivität:* Effektive Duration (Zins)
- *Berechnung der Sensitivität:* Approximation der effektiven Duration als (momentaner Marktwert - Marktwert bei 1 Basispunkt Verringerung des Zinses) / 0,01%

- **Versagen der Sensitivität:** Wenn der momentane Marktwert ein lokales Minimum bezüglich einer parallelen Verschiebung der Zinskurve darstellt, ist die effektive Duration Null. Bei einer stärkeren parallelen Änderung der Zinskurve profitiert der Marktwert. Bei Zinsrückgang: Anstieg des Marktwertes durch Floor des Kupons, bei Zinsanstieg: Anstieg des Marktwertes durch Multiplikator des Kupons.

Weitere Beispiele sind möglich: Z. B. Effektive Duration für Steepener zur Approximation von Änderungen von Zinskurvensteigungen; CMS-Floater mit Cap & Multiplikator & Marktwert ist lokales Maximum bezüglich paralleler Zinsverschiebung: Effektive Duration= 0, aber Marktwert rückgang bei steigenden Zinsen wäre korrekt

(b) (i)

Aufgabe	Bond	Kupon 1-10	Kupon 11-20	kumulierte Diskontfaktoren 1-10	kumulierte Diskontfaktoren 11-20	Barwert Kupons	Barwert Nominal	Marktwert Bond
(i) 1.	StepUp	0,25%	0,75%	10,036172	9,416918	9,571732%	90,273455%	99,845186%
(i) 2.	StepDown	0,75%	0,25%	10,036172	9,416918	9,881359%	90,273455%	100,154814%
	Plain	0,50%	0,50%	10,036172	9,416918	9,726545%	90,273455%	100,000000%

(ii)

Aufgabe	Bond	Kupon 1-10	Kupon 11-20	kumulierte Diskontfaktoren 1-10	kumulierte Diskontfaktoren 11-20	Barwert Kupons	Barwert Nominal	Marktwert Bond
(i) 3.	StepUp	0,25%	0,7664%	10,036172	9,416918	9,726545%	90,273455%	100,000000%
(i) 4.	StepDown	0,75%	0,2336%	10,036172	9,416918	9,726545%	90,273455%	100,000000%
	Plain	0,50%	0,5000%	10,036172	0,000000	9,726545%	90,273455%	100,000000%

(iii)

Aufgabe	Bond	Kupon 1-10	Kupon 11-20	Shift: kumulierte Diskontfaktoren 1-10	Shift: kumulierte Diskontfaktoren 11-20	Barwert Kupons	Barwert Nominal	Marktwert Bond
(iii) a.	StepUp	0,25%	0,7664%	10,030637	9,402158	9,712473%	90,089275%	99,802748%
(iii) b.	StepDown	0,75%	0,2336%	10,030637	9,402158	9,719322%	90,089275%	99,808596%
(iii) c.	Plain	0,50%	0,5000%	10,030637	9,402158	9,716397%	90,089275%	99,805672%

Aufgabe	Bond	Kupon 1-10	Kupon 11-20	Marktwert ohne Shift	Marktwert mit Shift	Effektive Duration
(iii) a.	StepUp	0,25%	0,7664%	1,000000	0,998027	19,725209
(iii) b.	StepDown	0,75%	0,2336%	1,000000	0,998086	19,140381
(iii) c.	Plain	0,50%	0,5000%	1,000000	0,998057	19,432795

Kommentierung: Z. B. Zinskurve ist in Normalform, d. h. ansteigend. Bei dem StepDown-Bond liegen die hohen Kuponzahlungen am Beginn der Laufzeit, die Duration ist im Vergleich zum Plain-Bond kürzer, da der Investor sein Geld früher zurückbekommt. StepUp-Bond analog.

(c) (i) Robuste Beispiele:

- Smith-Wilson-Extrapolation funktioniert auch weiterhin bei negativen Zinsen
- Hauptkomponentenanalyse anwendbar auch bei nicht normalverteilten Daten



- Schätzung des Medians (Hinzunahme eines Ausreißers verändert den Median bei hinreichend vielen Daten nicht)
- Mittelwertregression, auch wenn die Residuen nicht normalverteilt sind
- Robuste Mittelwertregression, robust gegen Ausreißer
- Durationskonzept bei kleiner Zinsänderung eines Kuponbonds mit fester Zahlung, robust beispielsweise bei Änderung des Kupons oder Nominals

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Beispiele; alternative Nennungen sind dabei möglich.]

Nichtstabile Beispiele:

- Bewertung mithilfe eines Economic Scenario Generators (real-world/risikoneutral): wenn Anzahl der Szenarien zu klein (noch keine Konvergenz erreicht)
- Regression/Curve Fitting:
 - wenn Anzahl der Fitting-Szenarien zu klein ist
 - Generell problematisch, wenn nicht-stetige Funktionen (beispielsweise diskrete nicht-stetige Verteilungen mit extremen Wertunterschieden) durch eine stetige Funktion approximiert werden sollen
- Black-Scholes-Formel für Swaptions: negative Zinsen (keine Lösung für negative Zinsen als Input)
- Real-world Zinsmodell: kalibriert auf relative Änderungen von positiven Zinsen, angewendet auf negative Zinsen
- Bewertung: Simulation von Spreadänderungen und Bewertung von Bonds mit negativem Spread $< -(1 + \text{Zins})$

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Beispiele; alternative Nennungen sind dabei möglich.]

- (ii)
- Beispiel für Risiken: Zinsänderungsrisiko, Spreadrisiko, Aktienkursrisiko, Fremdwährungsrisiko
 - Beispiel für Portfolio: Bond mit Spread- und Zinsänderungsrisiko sowie Aktie mit Aktienkurs- und Fremdwährungsrisiko

[Bemerkung: Zu nennen ist je nur ein Beispiel; alternative Nennungen sind dabei möglich.]

Aufgabe 2. [Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]

- (a) [5 Punkte] Grenzen Sie den Future vom Forward ab. Gehen Sie dabei auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede ein.
- (b) [3 Punkte] Der Risikomanager X schließt am 01.04.2020 mit der Bank Y ein Termingeschäft (Forward) ab. Hierbei vereinbart er, eine Aktie der ABC AG per Termin 01.10.2020 zum Terminkurs von 159€ zu kaufen. Der Kurs der ABC Aktie beträgt 150€ am 01.04.2020.

Geben Sie die Auszahlungsprofile des Forward-Kontrakts zum Liefertermin aus Sicht beider Vertragsparteien an und stellen Sie diese graphisch dar.

- (c) [5 Punkte] Erläutern Sie allgemein den Begriff des Swap-Kontrakts! Nennen Sie ein Finanzinstrument, welches gleichzeitig ein einfaches Beispiel für einen Swap darstellt.
- (d) [10 Punkte] Die Fix-Bank (*Fixed-Rate-Payer*) und das Variabel-Versicherungsunternehmen (*Floating-Rate-Payer*) vereinbaren am 31.03.2020 einen 1-Jahres-Zinsswap mit folgenden Konditionen: Nominalvolumen 100 Mio. €, halbjährliche Zinszahlungen, fixer Zins: 3% p. a., variabler Zins: 6-Monats-EURIBOR. Der EURIBOR-Satz beträgt zum Stichtag 31.03.2020 für eine Laufzeit von 6 Monaten 2,6% p. a. und für 12 Monate 3,3% p. a.. Es wird angenommen, dass a priori jenseits des Ausgleichs der Zinszahlungen keine weiteren Zahlungen zwischen den Vertragsparteien erfolgen.
- (i) [4 Punkte] Geben Sie die Zahlungsströme des Swaps auf Basis der 6-Monats-EURIBOR-Sätze aus Sicht der Fix-Bank am 31.03.2020 an, d. h. unter der Annahme, dass sich der entsprechende Forwardsatz realisiert.
- (ii) [6 Punkte] Zeigen Sie, dass für die gegebenen EURIBOR-Sätze eine Arbitragemöglichkeit existiert. Bestimmen Sie den arbitrage-freien Swap-Satz. Geben Sie eine weitere Möglichkeit an, mit der Arbitrage ausgeschlossen werden kann.

Hinweis: Verwenden Sie die einfache Verzinsung.

- (e) [2 Punkte] Begründen Sie, warum der erwartete Verlust eines Zahlungsausfalls bei einem Plain-Vanilla-Swap kleiner ist als bei einem Darlehen mit gleichem Nominalbetrag.

Lösungsskizze:

- (a) Gemeinsamkeiten:
- Bei beiden Geschäften handelt es sich um Terminfixgeschäfte. Beide Vertragspartner verpflichten sich, zu einem zukünftigen festgesetzten Termin



Leistung und Gegenleistung zu erbringen. Die Konditionen für Leistung und Gegenleistung werden dabei bei Vertragsabschluss festgelegt.

- Instrumente der zweiseitigen Risikobegrenzung

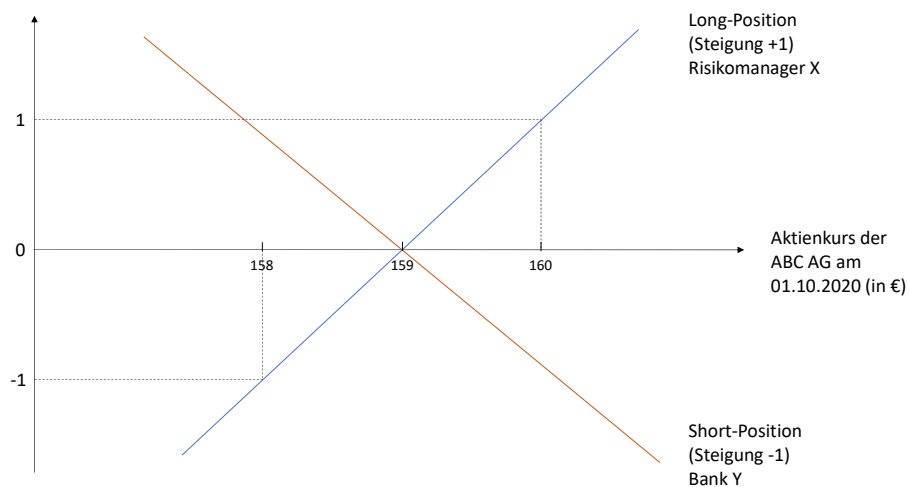
Unterschiede:

Merkmal	Forward	Future
Vertragsgestaltung	individuell (nicht standardisiert)	standardisiert in Lieferterminen und -mengen, Handelseinheiten etc.
Börsenhandel	nicht börsengehandelt	börsengehandelt
Abrechnung	Abrechnung bei Fälligkeit	börsentägliche Abrechnung über „marking to market“ (Einschuss- und Nachschusspflichten)

(b) Bezeichnen S_T den Kassakurs am Liefertermin 01.10.2020 und $K = 159 \text{ €}$ den Terminkurs, so gilt für die Auszahlungsprofile der Vertragsparteien:

- Risikomanager X (Long Forward): $S_T - K$
- Bank Y (Short Forward): $K - S_T$

Graphisch:



(c) Ein Swap (engl. \cong Tausch) ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragspartnern, bei der heute festgelegt wird, zu welchen Bedingungen in der Zukunft getauscht wird. In der Regel handelt es sich dabei um Zahlungsströme und es existieren mehrere Termine, an denen ein Tausch stattfindet.

- Bei Swaps handelt es sich um OTC-gehandelte Derivate, da die Konditionen an die individuellen Bedürfnisse der Vertragspartner angepasst werden.
- Swaps sind in der Regel Terminfixgeschäfte. Es existieren aber auch Swaptions, d. h. Optionen auf Swap-Geschäfte.



Ein einfaches Beispiel für einen Swap mit einem Tauschtermin stellt ein Forward-Kontrakt dar (z. B. Terminkauf einer Aktie).

- (d) (i) Für den Zahlungsstrom des Plain-Vanilla-Swaps aus Sicht der Fix-Bank auf Basis von Terminzinssätzen gilt (in Mio. €):

Datum	6-Monats-LIBOR (in % p. a.)	erzielter Betrag (in Mio. €)	gezahlter Betrag (in Mio. €)
31.03.2020	2,6		
30.09.2020	$r_6^e(12)$	$\frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 100$	$-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 100$
31.03.2021		$\frac{1}{2} \cdot r_6^e(12) \cdot 100$	$-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 100$

Hierbei berechnet sich der Zins $r_6^e(12)$ wie folgt:

$$1,033 = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,026\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot r_6^e(12)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,033}{1,013} - 1 = \frac{1}{2} \cdot r_6^e(12)$$

$$\Rightarrow r_6^e(12) = 3,9487\% \text{ p. a.}$$

Damit folgt konkret der Zahlungsstrom:

Datum	6-Monats-LIBOR (in % p. a.)	erzielter Betrag (in Mio. €)	gezahlter Betrag (in Mio. €)	Differenz- betrag
31.03.2020	2,6000			
30.09.2020	3,9487	1,3000	-1,5000	-0,2000
31.03.2021		1,9744	-1,5000	0,4744

- (ii) Die Barwerte der erzielten bzw. gezahlten Beträge lauten (in Mio. €):

$$PV_{erzielt}(\text{EURIBOR}) = \frac{1,3000}{1,013} + \frac{1,9744}{1,033} = 3,1946$$

$$PV_{gezahlt}(\text{EURIBOR}) = \frac{1,5000}{1,013} + \frac{1,5000}{1,033} = 2,9328$$

Alternativ: Direkte Ermittlung des Barwerts der Saldobeträge:

$$PV_{Saldo}(\text{EURIBOR}) = \frac{-0,2000}{1,013} + \frac{0,4744}{1,033} = 0,2618$$

Die Barwerte der fixen und variablen Zinszahlungen sind heute ohne Zinsänderung unterschiedlich hoch. Somit ergibt sich durch dieses Swapgeschäft eine Arbitragemöglichkeit für die Fix-Bank i. H. v. 0,2618 Mio. € (= 3,1946 – 2,9328). Diese Arbitragemöglichkeit lässt sich auf zwei unterschiedliche Weisen ausschließen:

- sofortiges Cash-Settlement i. H. v. 0,2618 Mio. € bei Vertragsabschluss; Fix-Bank zahlt diesen Betrag an das Variabel-Versicherungsunternehmen,
- Anpassung des festen Zinssatzes nach oben.



Hierbei ist der gesuchte arbitrage-freie Swap-Satz bestimmt durch

$$\left(0,013 - \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{100}\right) \cdot \frac{100}{1,013} + \left(0,019744 - \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{100}\right) \cdot \frac{100}{1,033} = 0$$

bzw. nach Umstellen

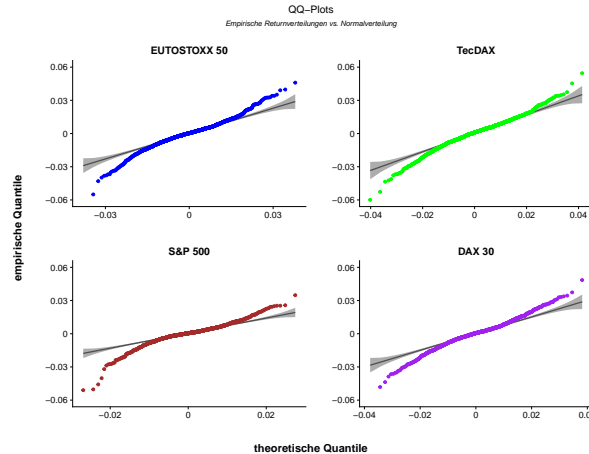
$$x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1,013} + \frac{1}{1,033} \right) = \frac{1,3000}{1,013} + \frac{1,9744}{1,033}$$

Der arbitrage-freie Swap-Satz beträgt 3,2678% p. a..

- (e) Bei einem Plain-Vanilla-Swap hängt das Exposure von der Differenz eines festen zu einem variablen Zinssatz ab. Es besitzt kein Exposure gegenüber dem Nominal. Bei einem Darlehen unterliegt das gesamte Nominal einem Ausfallrisiko.

Aufgabe 3. [Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]

- (a) [2 Punkte] Der folgende Q-Q-Plot vergleicht die empirischen Quantile der täglichen Returns ausgewählter Finanzmarktindizes mit den Quantilen der Normalverteilung.



Interpretieren Sie *kurz* diese Graphik und erklären Sie, was dies für die Verteilungseigenschaften der Returns bedeutet.

- (b) [6 Punkte]

- (i) [3 Punkte] Geben Sie die mathematische Struktur des ARCH-Modells sowie des GARCH-Modells an.
- (ii) [3 Punkte] Erläutern Sie, welche zentrale empirische Eigenschaft diese Zeitreihenmodelle in Bezug auf die Volatilität abbilden. Welchen Zusatzeffekt bildet das GARCH-Modell dabei ab?
- (c) [5 Punkte] Ein Versicherungsunternehmen plant 20 Millionen Euro in einen Immobilienfonds zu investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen eines Immobilienindizes ergibt die mittlere erwartete Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 5\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von 0,6.

- (i) [2 Punkte] Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem Blundell-Ward-Verfahren durch.
- (ii) [3 Punkte] Unterstellen Sie normalverteilte i. i. d. Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell-Ward-Verfahren. Berechnen Sie für das Endvermögen des Versicherungsunternehmens nach 20 Jahren den Variationskoeffizienten.

Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist $Y = \exp(X)$ eine lognormalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ, σ^2 (kurz: $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$) und es gilt

$$E[Y] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \text{Var}[Y] = E[Y]^2(e^{\sigma^2} - 1).$$



(d) [9 Punkte]

- (i) [2 Punkte] Erläutern Sie *kurz*, warum in der Praxis lokale und stochastische Volatilitätsmodelle zum Einsatz kommen.
 - (ii) [4 Punkte] Beschreiben Sie das Heston-Modell aus der Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle. Nennen Sie zwei weitere Beispiele.
 - (iii) [3 Punkte] Geben Sie eine Modifikation des Heston-Modells an, mit der Phasen unterschiedlicher Volatilität an Märkten modelliert werden können.
- (e) [3 Punkte] Beschreiben Sie das Merton-Sprungdiffusionsmodell. Erläutern Sie *kurz* die Motivation für diese Modellerweiterung.

Lösungsskizze:

(a) Die Q-Q-Plots weisen eine „invertierte S-Form“ auf und weichen somit von einer Geraden ab. Dies bedeutet, dass niedrige Werte der Returns niedriger als bei Normalverteilung, hohe Werte der Returns größer als bei Normalverteilung sind („heavy tails“). Damit ist die Normalverteilung kein geeignetes Modell für die Verteilung täglicher Returns.

(b) (i) Es sei $(Z_t)_{t \in T}$ ein striktes Weißes Rauschen $SWN(0, 1)$.

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess (*autoregressive conditionally heteroscedastic*), falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t \in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$$

mit Konstanten $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$.

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt GARCH(p,q)-Prozess (*generalized autoregressive conditionally heteroscedastic*), falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t \in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

mit Konstanten $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0$.

- (ii) Bei Finanzmarktzeitreihen treten extreme Returns in Clustern auf (*Volatility Clustering*). Beide Zeitreihenmodelle können dies abbilden. Sind beim ARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \dots, |X_{t-p}|$ groß, so ist auch die Volatilität σ_t und



damit - modulo Wirkung des Shocks Z_t aus dem Rauschen - $|X_t|$ hoch. Selbiges gilt für den GARCH-Prozess. Allerdings sind hier die Perioden hoher Volatilität persistenter als im ARCH-Modell, da σ_t^2 explizit auch von $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$ abhängt.

- (c) (i) Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen $R_t, t = 1, 2, \dots$, gemäß $\text{Var}(R_t^*) = \text{Var}(R_t) \frac{1-a^2}{(1-a)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R) \sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 0,05 \cdot \frac{\sqrt{1-0,6^2}}{1-0,6} = 0,1 \quad (10\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 5\%$.

- (ii) Für die bereinigte Gesamtrendite nach 20 Jahren gilt

$$R^*(20) = \sum_{i=1}^{20} R_i^* \sim \mathcal{N}(20 \cdot \mu(R^*); 20 \cdot \sigma^2(R^*)) = \mathcal{N}(1; 0,2).$$

Damit gilt für das Endvermögen

$$V_{20} = V_0 \exp(R^*(20)) = \exp(\ln V_0 + R^*(20)) \sim \mathcal{LN}(17, 8112; 0,2).$$

Mit den im Hinweis angegebenen Formeln folgt nun $E[V_{20}] = 60.080.747$, $\sigma(V_{20}) = 28.270.067$ und entsprechend

$$\text{cv}(V_{20}) = \frac{\sigma(V_{20})}{E[V_{20}]} = 0,4705.$$

Alternativ kann man für eine $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable Y durch Kürzen in den Berechnungsformeln $\text{cv}(Y) = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$ folgern und damit direkt (ohne deren Erwartungswert und Standardabweichung zu bestimmen) den Variationskoeffizienten berechnen. Es folgt wiederum

$$\text{cv}(V_{20}) = \sqrt{e^{0,2} - 1} = 0,4705.$$

- (d) (i) Aus der Analyse von Zeitreihen von Aktienreturns ist erstens erkennbar, dass sich die Volatilität im Zeitverlauf ändert. Insbesondere sind Phasen mit niedriger und hoher Volatilität zu beobachten. Zweitens besteht eine Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Call- und Put-Optionen vom Strike und der Restlaufzeit/Maturität. Dies steht im Widerspruch zu einer konstanten Volatilität und motiviert die Volatilität als Funktion des aktuellen Aktienkurses und der Zeit (*lokale Volatilitätsmodelle*) oder als stochastischen Prozess (*stochastische Volatilitätsmodelle*) zu modellieren.



- (ii) Für zwei korrelierte Wiener-Prozesse B, W mit Kovariation $\langle W, B \rangle_t = \rho t$ sind der diskontierte Aktienpreisprozess $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \sigma_t \tilde{S}_t dB_t, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t}. \end{aligned}$$

Der Prozess v heißt „variance“ und ist definiert durch einen Cox-Ingersoll-Ross-Prozess

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t.$$

Weitere Beispiele umfassen u. a. das Hull-White-Modell und das SABR-Modell.

- (iii) Eine Erweiterung des Heston-Modells im Kontext von Regime-Switching-Modellen ist gegeben durch folgende Modellierung des diskontierten Aktienpreisprozesses unter einem Martingalmaß Q :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \tilde{S}_t \sqrt{Y_t} dB_t, \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t) dt + X_t \xi \sqrt{Y_t} dW_t. \end{aligned}$$

Hierbei sind B, W korrelierte Wiener-Prozesse unter Q mit $\langle B, W \rangle_t = \rho t$, $\rho \in (-1, 1)$, und $(X_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet einen (zeitlich homogenen) Markov-Prozess mit z. B. zwei Zuständen $\{z_1, z_2\}$, $0 < z_1 < 1 < z_2$. In diesem Fall hängt die „Vol of Vol“ vom Zustand des exogenen Faktors ab. Die zwei Zustände spiegeln eine Verringerung oder Verstärkung der Volatilität wider.

- (e) Im Merton-Sprungdiffusionsmodell ist der Preisprozess der Aktie $(S_t)_{t \geq 0}$ unter einem äquivalenten Martingalmaß Q modelliert durch

$$S_t^M = S_0^M \exp(\sigma W_t^Q + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i) \quad (t \geq 0)$$

mit:

- Unter Q ist $(W_t^Q)_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozess und $(N_t)_{t \geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Beide Prozesse sind stochastisch unabhängig.
- $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind i. i. d. normalverteilte Zufallsvariablen.
- Die Parameter genügen der Bedingung $\mu - r + \lambda(E_Q[\exp(X_1)] - 1) = 0$, die äquivalent zu $E_Q[e^{-rt} S_t^M] = S_0^M$ ist.

Im Black-Scholes-Modell (und anderen Diffusionsmodellen) sind die Pfade der Preisprozesse stetig, sodass abrupte, sprunghafte Kursänderungen (Kursanstieg, Kursverfall) nicht abgebildet werden. Das Merton-Sprungdiffusionsmodell modelliert Kurssprünge; zwischen den Sprüngen verhält sich der Preisprozess wie eine Geometrische Brownsche Bewegung.

Aufgabe 4. [Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]

(a) [17 Punkte] [Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA)]

- (i) [5 Punkte] Gegeben seien ein Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ einer diskretisierten Zinskurve sowie eine Funktion $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, die den Marktwert MV eines Portfolios P in Abhängigkeit von den Faktorladungen PC_1, PC_2, PC_3, PC_4 beschreibt, mit denen Zinskurvenänderungen repräsentiert werden. Ihr Vorstand möchte die effektive Duration des Portfolios P wissen.

Beschreiben Sie die einzelnen Schritte für Ihr Vorgehen zur Berechnung der effektiven Duration von P . Warum kann es gegebenenfalls sehr kritisch sein nur PC_1 in dem von Ihnen beschriebenen Verfahren zu verwenden?

- (ii) [4 Punkte] Es seien die empirische Kovarianzmatrix $S = \text{Kov}(X^T)$ und die zugehörigen Eigenvektoren EV_1, \dots, EV_k mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die Faktorladungen der Hauptkomponentenanalyse der empirischen Daten der Matrix $X^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ unkorreliert sind. Gehen Sie davon aus, dass X^T zentriert ist, d. h. der Mittelwert jeder Spalte von X^T ist null.

- (iii) [1 Punkt] Erklären Sie *kurz* in zwei Stichpunkten, welche Funktionsweise ein orthogonaler Projektor anschaulich erfüllt und wo dieser bei der Hauptkomponentenanalyse angewendet wird.

- (iv) [2 Punkte] Es seien historische diskretisierte Zinskurven auf täglicher Basis für die vergangenen 10 Jahre gegeben. Angenommen, Sie erkennen, dass sich Zinssätze zu festen Laufzeiten jeweils ungefähr normalverteilt verhalten. Dabei scheint die Zinsänderung unabhängig vom Level des Ausgangszinssatzes zu sein.

Geben Sie eine Transformation an, um die Datenmatrix X^T zu erstellen, die Sie als Grundlage für eine Hauptkomponentenanalyse verwenden würden, um zukünftige monatliche Zinsänderungen modellieren zu können. Begründen Sie die Art der Transformation.

- (v) [5 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^T S x$ für eine symmetrische, positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Weiterhin seien v_1, \dots, v_n die Eigenvektoren von S , wobei v_i der Eigenvektor zum i -größten Eigenwert von S ist.

Zeigen Sie, dass v_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Lösung des Problems $\arg \max_{x \in \Omega_i} f(x)$ mit $\Omega_i := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \text{span}\{v_i, \dots, v_n\} \text{ und } \|y\| = 1\}$ darstellt.



(b) [8 Punkte] [Zinsmodelle]

- (i) [2 Punkte] Beschreiben Sie die Kernidee des Modells von Nelson-Siegel in Stichpunkten. Gehen Sie dabei darauf ein, welche Rolle die Parameter des Modells spielen.
- (ii) [1 Punkt] Es sei eine diskretisierte Zinskurve gegeben. Angenommen, Sie möchten die Nelson-Siegel-Parameter bestimmen und verwenden dazu einen numerischen Algorithmus der nicht-linearen Optimierung. Welche generelle Problematik ergibt sich bezüglich der Startwerte?
- (iii) [3 Punkte] Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede bei der Erklärung historischer Zinskurven zwischen der Verwendung einer Hauptkomponentenanalyse (PCA) und dem Nelson-Siegel-Modell.
- (iv) [2 Punkte] Beschreiben Sie die Kernidee des Modells von Diebold/Li in Stichpunkten. Nennen Sie dabei das Grundmodell und den Zweck des Modells.

Lösungsskizze:

- (a) (i) *Idee:* Berechnung der effektiven Duration als Diskretisierung, z. B.

$$\text{Dur}_{\text{eff}} \approx -\frac{1}{\text{MV}} \frac{\text{MV}(0) - \text{MV}(\Delta z)}{\Delta z}$$

Vorgehen:

- Es sei z der Vektor der heutigen diskretisierten Zinskurve und $z_{x\text{BP}}$ der um x Basispunkte additiv parallel verschobene Vektor z . Ferner sei $\text{PC}_i(z)$ die i -te Faktorladung zur Beschreibung der Zinskurve z .
- Berechnung von

$$\begin{aligned} G_0 &:= G(\text{PC}_1(z), \text{PC}_2(z), \text{PC}_3(z), \text{PC}_4(z)) \quad \text{und} \\ G_{x\text{BP}} &:= G(\text{PC}_1(z_{x\text{BP}}), \text{PC}_2(z_{x\text{BP}}), \text{PC}_3(z_{x\text{BP}}), \text{PC}_4(z_{x\text{BP}})) \end{aligned}$$

- Dann folgt $\text{Dur}_{\text{eff}} \approx -\frac{1}{G_0} \frac{G_0 - G_{x\text{BP}}}{x\text{BP}}$.
- x sollte dabei relativ klein gewählt werden.

Kritische Würdigung:

- Es muss überprüft werden, ob die vier PCs eine parallele Verschiebung von z hinreichend gut approximieren können; sonst kann es durch den Approximationsfehler der PCA zu starken Abweichungen zur exakt gerechneten effektiven Duration kommen.



- Bei alleiniger Verwendung von PC_1 kann der Approximationsfehler einer parallel verschobenen Zinskurve zu groß sein, um die effektive Duration hinreichend gut zu approximieren.

(ii) Es sei X^T die zentrierte Matrix der Punkte der zu erklärenden Daten mit den Laufzeiten in den Spalten und den Stichproben in den Zeilen. Ferner seien EV_i der i -te Eigenvektor von $S = \text{Kov}(X^T)$ sowie λ_i der zugehörige Eigenwert. Setze $PC_i = X^T EV_i$, d. h. PC_i stellt den Vektor der historischen Faktorladungen zum Eigenvektor EV_i dar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Kov}(PC_i, PC_j) &:= \frac{1}{n-1} PC_i^T PC_j = EV_i^T \left(\frac{1}{n-1} XX^T \right) EV_j \\ &= EV_i^T \text{Kov}(X^T) EV_j = \lambda_j EV_i^T EV_j \\ &= \begin{cases} \lambda_j, & i=j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(iii) Stichpunkte:

- Ein orthogonaler Projektor projiziert einen Punkt senkrecht in eine Hyperebene. Genauer gilt (nicht als Teil der Lösung gefordert):

Es seien p Eigenvektoren $EV_{i_1}, \dots, EV_{i_p}$ einer PCA bekannt. Mit der Matrix $E = (EV_{i_1}, \dots, EV_{i_p})$ ist dann $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, t(z) := EE^T z$, ein orthogonaler Projektor. Der orthogonale Projektor t projiziert den Punkt z senkrecht auf den von den p Eigenvektoren aufgespannten Raum.

- Bei der PCA kann ein orthogonaler Projektor verwendet werden, um die Approximation eines Punktes bezüglich der verwendeten Eigenvektoren aus der PCA zu berechnen.

(iv) Da die Zinsänderung unabhängig vom Level des Ausgangszinssatzes zu sein scheint und sich die Daten ungefähr normalverteilt verhalten, könnten monatliche Differenzen (überlappend oder auch nicht überlappend) zwischen den Zinskurven verwendet werden, um die Matrix X^T zu erstellen.

$$(Z_{\text{Datum}+1\text{Monat}}(t) - Z_{\text{Datum}}(t))_{\text{Datum}, t} =: Y^T, X^T := Y^T - M$$

X^T stellt dabei die durch die Matrix M zentrierte Datenmatrix von Y^T dar.

(v) Jedes $x \in \Omega_i$ lässt sich für bestimmte $\beta_k \in \mathbb{R}$ in der Form

$$x = \frac{\sum_{k=i}^n \beta_k v_k}{\|\sum_{k=i}^n \beta_k v_k\|}$$



darstellen, wobei nicht alle β_k null sein können und x damit wohldefiniert ist. Hierbei gilt $\|\sum_{k=i}^n \beta_k v_k\| = \sqrt{\sum_{k=i}^n \beta_k^2}$. Damit folgt für die Funktion f

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T S x = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \beta_k^2} \left(\sum_{k=i}^n \beta_k v_k^T \right) S \left(\sum_{k=i}^n \beta_k v_k \right) = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \beta_k^2} \sum_{k=i}^n \beta_k^2 \lambda_k \\ &\leq \frac{1}{\sum_{k=i}^n \beta_k^2} \sum_{k=i}^n \beta_k^2 \lambda_i = \frac{1}{\sum_{k=i}^n \beta_k^2} f(v_i) \sum_{k=i}^n \beta_k^2 = f(v_i), \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ gilt. Damit ist für alle festen $i \in \{1, \dots, n\}$ der Wert $f(v_i)$ ein Maximum auf der Menge Ω_i .

- (b) (i) Idee: Beschreibung von (historischen) Zinskurven mit wenigen Parametern (Dimensionsreduktion), Inter- und Extrapolation wird ermöglicht

Die Parameter lassen sich interpretieren als kurzfristiger Zins, langfristiger Zins, Anteil der Steigung der Zinskurve, Anteil der Krümmung der Zinskurve, Laufzeit des Hochpunkts der Krümmung der Zinskurve.

- (ii) Werden unterschiedliche Startwerte verwendet, kann der Algorithmus zu unterschiedlichen Lösungen kommen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn auch über den Parameter λ optimiert wird und dieser Parameter in den Startwerten abweicht.

- (iii) Gemeinsamkeiten:

- Erklärung der Zinskurve mit wenigen Basisfunktionen möglich
- „Kleinste-Quadrate“-Minimierung zur Bestimmung der Faktorladungen bzw. Parameter
- Erste drei Basisfunktionen entsprechen in der Regel „Level“, „Steigung“ und Krümmung der Zinskurve

Unterschiede:

- Faktorladungen bei PCA einfach über Matrixmultiplikation zu bestimmen → Analytische Lösung möglich & einfach zu berechnen
- Faktorladungen bei Nelson-Siegel erfordern Lösung eines nicht-linearen Minimierungsproblems → Numerische Lösung erforderlich
- Faktorladungen PCA nach Konstruktion unkorreliert, bei Nelson-Siegel korreliert
- Faktorladungen PCA können unabhängig von einander bestimmt werden + Lösung eindeutig
- Faktorladungen Nelson-Siegel sind abhängig + Lösung nicht eindeutig



- Bei der PCA können die ersten drei Eigenvektoren (=Basisfunktionen) je nach Datensatz unterschiedlich ausgestaltet sein (muss nicht „Level“, „Steigung“ und Krümmung entsprechen)
- Bei Nelson-Siegel ist die Struktur der Basisfunktionen vorgegeben (lediglich der Parameter λ hat Einfluss auf die Gestalt)
- PCA kann auch zur Dimensionsreduktion von Daten, die nicht aus dem Zinsbereich stammen verwendet werden, Nelson-Siegel eher auf Zinskurven beschränkt
- Erklärungsmodell der PCA für Zinskurven kann beliebig ausgestaltet werden: PCA direkt auf Zinskurven, auf absoluten Änderungen, auf relativen Änderungen, auf relativen geshifteten Änderungen, auf logarithmischen Änderungen, ...

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Unterschiede.]

(iv) Grundmodell: Nelson-Siegel

- Beschreibung historischer Zinskurven
- Verwendung eines autoregressiven Modells AR(1) zur Beschreibung der historischen Zinskurvenentwicklung mithilfe der Parameter von Nelson-Siegel
- Nutzung des Modells, um eine Prognose der zukünftigen Zinskurve nach der Zeit T zu ermöglichen



Aufgabe 5. [Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [35 Punkte]

Der Prozess $(W_t)_{t \geq 0}$ sei ein Wiener-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , der die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ erzeugt. Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell mit endlichem Zeithorizont $T > 0$:

- Die Wertentwicklung des Sparbuchs ist bei stetiger Verzinsung mit Rate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \in [0, T]$.
- Der Preisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ der Aktie besitzt unter dem Maß P die Dynamik

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s > 0.$$

(a) [10 Punkte]

- [5 Punkte] Beschreiben Sie *formal*, wie in der Theorie ausgehend von der Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses das äquivalente Martingalmaß Q konstruiert wird. Geben Sie die Dynamik des Aktienpreisprozesses unter Q an.
- [2 Punkte] Erläutern Sie *kurz*, welche Implikationen die Existenz des (eindeutigen) äquivalenten Martingalmaßes Q auf die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells sowie die arbitrage-freie Bewertung von Contingent Claims hat.
- [3 Punkte] Beschreiben Sie *kurz*, wie das Black-Scholes-Modell in der Praxis für Bewertungszwecke kalibriert wird. Nennen Sie zwei mögliche Grundansätze zur Kalibrierung.

(b) [11 Punkte] Betrachten Sie den Contingent Claim $C_T := (S_T)^4$ mit Maturität T , der als Funktion des terminalen Aktienkurses definiert ist.

- [4 Punkte] Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitrage-freien Preises C_t des Contingent Claims zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ her. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion v gilt.

Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $E[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$.

- [4 Punkte] Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der C_T durch Handel von Sparbuch und Aktie perfekt abgesichert werden kann.
- [3 Punkte] Erläutern Sie *kurz*, wie ausgehend von der dynamischen Absicherungsstrategie aus dem zeitstetigen Finanzmarktmodell semistatisches Hedging in der Praxis implementiert werden kann.



- (c) [6 Punkte] Der arbitrage-freie Preis einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike $K > 0$ ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $C_t^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_t, t)$ für die Funktion

$$v^{\text{call}}(x, t) = x\Phi(d_+(x, t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x, t)),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und folgende Konstanten verwendet werden:

$$d_{\pm}(x, t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Erläutern Sie inklusive Herleitung die Put-Call-Parität und nutzen Sie diese, um eine Formel für den Preis C_t^{put} einer Europäischen Put-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike $K > 0$ zum Zeitpunkt t herzuleiten.

- (d) [6 Punkte] Eine fondsgebundene Erlebensfallversicherung für eine bei Vertragsabschluss x -jährige versicherte Person mit Laufzeit T liefert im Erlebensfall als Auszahlung das Maximum aus dem Fondsvermögen $N \cdot S_T$ (N =Anzahl der Aktien im Fonds) und einer vereinbarten deterministischen Garantie G .

Leiten Sie mithilfe von (c) eine Formel zur Berechnung der Nettoeinmalprämie dieser Erlebensfallversicherung her. Begründen Sie ggf. Ihre Annahmen.

- (e) [2 Punkte] Geben Sie mit *kurzer* Begründung zwei Fakten aus der Analyse von Finanzmarktzeitreihen an, die das Black-Scholes-Modell empirisch falsifizieren.

Lösungsskizze:

- (a) (i) Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \in [0, T]$,

$$d\tilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - re^{-rt}S_t dt = \tilde{S}_t\sigma(dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma} dt).$$

$(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$ ist demnach ein Martingal bezüglich eines Maßes Q (Martingalmaß), falls

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \frac{\mu-r}{\sigma} du, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

ein Wiener-Prozess unter Q ist. Zur Konstruktion des (eindeutig bestimmten!) äquivalenten Martingalmaßes Q auf (Ω, \mathcal{F}_T) wird der Satz von Girsanov verwendet: Definiert man Q durch die Dichte

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_0^T \frac{\mu-r}{\sigma} dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 du} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T},$$

d. h. $E_Q[X] = E_P[\frac{dQ}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_T} X]$, so ist der Prozess $(W_t^Q)_{t \in [0, T]}$ ein Q -Wiener-Prozess bis zur Zeit T . Für die Dynamik von $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$ unter Q gilt

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma dW_t^Q,$$



d. h. der diskontierte Preisprozess $(\tilde{S}_t)_{t \in [0, T]}$ ist in der Tat ein Q -Martingal.

Für die Dynamik des Aktienpreises $(S_t)_{t \in [0, T]}$ unter Q erhält man via (1)

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) = S_t(r dt + \sigma dW_t^Q),$$

d. h. $(S_t)_{t \in [0, T]}$ ist unter Q eine Geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilität σ .

- (ii) Aus der Existenz des äquivalenten Martingalmaßes folgt die Arbitragefreiheit des Black-Scholes-Modells. Der arbitrage-freie Preis C_t eines Contingent Claims C_T mit Maturität T in t ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung:

$$C_t = B_t E_Q \left[\frac{C_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{rt} E_Q [e^{-rT} C_T | \mathcal{F}_t].$$

- (iii) Gemäß (i) ist zur Spezifikation des Black-Scholes-Modells für Bewertungszwecke nur die Volatilität σ zu bestimmen; der Driftparameter ist durch den Zins gegeben. Zur Schätzung von σ können grundsätzlich zwei Verfahren verwendet werden:

- Schätzung aus historischen Daten (führt zur sogenannten *historischen Volatilität*)
- Schätzung aus den Preisen bereits vorhandener Optionen für denselben Basistitel (führt zur sogenannten *impliziten Volatilität*)

- (b) (i) Nach (a) (i) ist der Aktienpreisprozess unter Q eine Geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilität σ . Somit folgt für den Preis im Zeitpunkt t mit risikoneutraler Bewertung

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} E_Q [(S_T)^4 | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E_Q [(S_t e^{\sigma(W_T^Q - W_t^Q) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^4 | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q [(S_t)^4 e^{4\sigma(W_T^Q - W_t^Q)} \cdot e^{4(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} | \mathcal{F}_t] \\ &= (S_t)^4 e^{(4(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - r)(T-t)} E_Q [e^{4\sigma(W_T^Q - W_t^Q)}] \\ &= (S_t)^4 e^{(4(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - r)(T-t)} e^{\frac{1}{2} 16\sigma^2(T-t)} \\ &= (S_t)^4 e^{(3r + 6\sigma^2)(T-t)}. \end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t, t)$ mit $v(x, t) = x^4 e^{(3r + 6\sigma^2)(T-t)}$

- (ii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- Einheiten Aktie:

$$g_t^S = \frac{\partial}{\partial x} v(S_t, t) = 4(S_t)^3 e^{(3r + 6\sigma^2)(T-t)}$$



- Einheiten Sparbuch: Mit $V_t^g = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt

$$g_t^B = \frac{V_t^g - g_t^S S_t}{B_t} = -3(S_t)^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)-rt}.$$

- (iii) In der Praxis können Portfolios nicht zeitstetig adjustiert werden; Replikations-/Hedging-Strategien sind semistatisch. Eine Möglichkeit ist das Delta-Hedging auf Basis des Deltas $\Delta(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, t)$ (Sensitivität).

Approximativ gilt für die Wertänderung der Preise $C_t = v(S_t, t)$ in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$v(S_{t+h}, t+h) - v(S_t, t) \approx \Delta(S_t, t)(S_{t+h} - S_t).$$

Dies erlaubt, die Position im Contingent Claim gegen Preisänderungen des Basiswertes im Zeitintervall $[t, t+h]$ abzusichern, indem eine Position im Basiswert aufgebaut wird, deren Wertänderungen bei Preisbewegung den Wertänderungen dieser Position genau entgegengesetzt sind.

- (c) Für $z \in \mathbb{R}$ gilt $(z-K)^+ - (K-z)^+ = z-K$. Dies führt bei risikoneutraler Bewertung aufgrund der Martingaleigenschaft des diskontierten Aktienpreisprozesses unter Q zur Put-Call-Parität

$$\begin{aligned} C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} &= E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] - E_Q[e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - K) | \mathcal{F}_t] = S_t - e^{-r(T-t)}K, \end{aligned}$$

d. h. die Preise von Aktie, Call- und Put-Option sind abhängig voneinander. Sind zwei dieser Preise bekannt, so kann der dritte mit der Put-Call-Parität berechnet werden. Insbesondere folgt $C_t^{\text{put}} = v^{\text{put}}(S_t, t)$ mit einer Preisfunktion, die $v^{\text{call}}(x, t) - v^{\text{put}}(x, t) = x - e^{-r(T-t)}K$ erfüllt. Umstellen liefert die Bewertungsformel

$$\begin{aligned} v^{\text{put}}(x, t) &= x\Phi(d_+(x, t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x, t)) - x + e^{-r(T-t)}K \\ &= -x[1 - \Phi(d_+(x, t))] + e^{-r(T-t)}K[1 - \Phi(d_-(x, t))] \\ &= -x\Phi(-d_+(x, t)) + e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_-(x, t)). \end{aligned}$$

Hierbei verwendet: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (d) Mit der Restlebensdauer T_x der x -jährigen versicherten Person lässt sich die Auszahlung der Erlebensfallversicherung im Zeitpunkt T schreiben als

$$1_{\{T_x > T\}} \max\{N \cdot S_T, G\} = 1_{\{T_x > T\}} \left(G + N \cdot \left(S_T - \frac{G}{N} \right)^+ \right).$$

Nimmt man an, dass das biometrische Risiko unabhängig vom Marktrisiko ist, so gilt für die Nettoeinmalprämie NEP_0 zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} NEP_0 &= {}_T p_x E_Q \left[e^{-rT} \left(G + N \cdot \left(S_T - \frac{G}{N} \right)^+ \right) \right] \\ &= {}_T p_x \left(e^{-rT} G + N \cdot E_Q \left[e^{-rT} \left(S_T - \frac{G}{N} \right)^+ \right] \right), \end{aligned}$$



wobei ${}_T p_x$ die T -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der x -jährigen versicherten Person bezeichnet. Damit lässt sich die Berechnung der Nettoeinmalprämie auf die Bewertung einer Europäischen Call-Option mit Strike $K = G/N$ zurückführen, d. h. es gilt

$$NEP_0 = {}_T p_x (e^{-rT} G + N v^{\text{call}}(S_0, 0)).$$

- (e)
- Q-Q-Plots der Returndaten von Finanzmarktzeitreihen bezüglich der Normalverteilung weisen eine invertierte S-Form auf, sodass die Returns nicht als normalverteilt angesehen werden können. Returns im Black-Scholes-Modell sind jedoch normalverteilt.
 - Die implizite Volatilität weist in der Realität typischerweise eine Abhängigkeit vom Strike sowie der Restlaufzeit/Maturität auf. Die Volatilität im Black-Scholes-Modell ist jedoch konstant.



Aufgabe 6. [Bewertung im Zinsbereich] [35 Punkte]

- (a) [5 Punkte] Vergleichen Sie das Hull-White-Modell und das Black-Karasinski-Modell mit besonderem Hinblick auf das Niedrigzinsumfeld. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Themen „negative Zinsen“ und „Zinsuntergrenze“ sowie auf mögliche Anpassungen/Erweiterungen ein.
- (b) [12 Punkte] Das weithin gebräuchliche Hull-White-Modell geht aus dem Vasicek-Modell hervor, indem eine Zeitabhängigkeit des Mean-Reversion-Levels erlaubt wird. Die stochastische Differentialgleichung für die Short Rate im Hull-White-Modell lautet dann

$$dr_t = \alpha(\theta(t) - r_t) dt + \sigma dW_t.$$

- (i) [2 Punkte] Was ist die Begründung für diese Erweiterung?
- (ii) [5 Punkte] Eine alternative Formulierung ist gegeben durch die Einführung des Prozesses

$$x_t := r_t - \varphi(t)$$

mit $dx_t = -\alpha x_t dt + \sigma dW_t.$

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen den deterministischen Funktionen φ und θ her!

- (iii) [5 Punkte] Die Lösung des Hull-White-Modells in der Formulierung als erweitertes Vasicek-Modell ist gegeben als

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \alpha \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} \theta(u) du + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u$$

Wie lautet die Lösung in der Formulierung mittels der Funktion φ ?

- (c) [18 Punkte] Im Black-Karasinski-Modell sind keine analytischen Formeln für die Bondpreise verfügbar. Daher müssen diese zum Beispiel auf einem trinomischen Baum approximiert werden. Ausgangspunkt sei die Alternativformulierung analog zum Hull-White-Modell

$$x_t = \ln(r_t) - \varphi(t)$$

mit $dx_t = -\alpha x_t dt + \sigma dW_t.$

- (i) [5 Punkte] Stellen Sie den trinomischen Baum für das Black-Karasinski-Modell graphisch dar. Starten Sie dafür vom Knotenpunkt $r_{i,j}$ zum Zeitpunkt t_i und stellen Sie den Übergang von t_i nach t_{i+1} dar. Benennen Sie alle Übergangswahrscheinlichkeiten und Knotenpunkte und notieren Sie die Knotenpunkte dabei auch in der Alternativformulierung.



- (ii) [6 Punkte] Es sei $E_{i,j}$ der Erwartungswert von x_{i+1} bedingt auf $x_i = x_{i,j}$ und V_i^2 bezeichne die bedingte Varianz. Stellen Sie damit das allgemeine Gleichungssystem für die Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten auf. Bleiben Sie dabei in der Notation, die Sie in Teil (i) etabliert haben und kommentieren Sie die Bedeutung der einzelnen Gleichungen in einem Satz.
- (iii) [2 Punkte] Die Struktur des trinomischen Baums wird festgelegt durch die Parametrisierung $x_{i,j} = j \cdot \sqrt{3V_i^2}$. Weiterhin wird der mittlere Knotenpunkt fixiert durch die Wahl $k = \text{round}\left(E_{i,j} / \sqrt{3V_i^2}\right)$. Hierbei ist k der Index des mittleren Short-Rate-Pfades ($r_{i+1,k}$) in t_{i+1} , der von $r_{i,j}$ erreicht wird. Kommentieren Sie diese Wahl kurz.
- (iv) [5 Punkte] Verwenden Sie obige Struktur, um das Gleichungssystem zu lösen.

Hinweis: Stellen Sie dafür die Übergangswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Größe $\frac{E_{i,j} - x_i}{\sqrt{3V_i^2}}$ dar. Nutzen sie zudem, dass $x_{i,j \pm 1} = x_{i,j} \pm \sqrt{3V_i^2}$.

Lösungsskizze:

- (a) Das Hull-White-Modell führt zu normalverteilten Short Rates; daher sind negative Zinsen im Modell durchaus möglich. Im Gegensatz dazu führt das Black-Karasinski-Modell zu lognormalverteilten Short Rates; somit sind negative Zinsen ausgeschlossen. Eine mögliche Lösung besteht darin, die verschobene Short Rate $r_t + c$ zu simulieren. Dabei stellt allerdings die Bestimmung der angemessenen Verschiebung eine weitergehende Herausforderung dar.

Während das Black-Karasinski-Modell (auch in der erweiterten Fassung) eine untere Schranke aufweist, ist das Hull-White-Modell unbeschränkt und kann somit beliebig tiefe Zinsen generieren. Dies steht im Widerspruch zur Bargeldhaltungsoption, die das Zinslevel nach unten beschränkt. Eine mögliche Lösung besteht in der ex-post Zinskappung solcher Pfade, die ein gegebenes Level unterschreiten. Dabei stellen die Bestimmung der unteren Schranke sowie die Sicherstellung der Risikoneutralität weitergehende Herausforderungen dar.

- (b) (i) Das Vasicek-Modell ist ein endogenes Modell, d. h. eine gegebene Zinsstrukturkurve kann nicht reproduziert werden. Durch die Einführung der Parameterfamilie $\theta(t)$ wird dies ermöglicht. Somit kann eine marktkonsistente Zinssimulation erreicht werden.



(ii) Das Differential dx_t berechnet sich als

$$\begin{aligned} dx_t &= d(r_t - \varphi(t)) = dr_t - \varphi'(t) dt \\ &= \alpha(\theta(t) - r_t) dt + \sigma dW_t - \varphi'(t) dt \\ &= \alpha \left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi'(t) - r_t \right) dt + \sigma dW_t \\ &= \alpha \left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi'(t) - x_t - \varphi(t) \right) dt + \sigma dW_t \\ &= -\alpha x_t dt + \sigma dW_t + \alpha \left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi'(t) - \varphi(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\alpha} \varphi'(t).$$

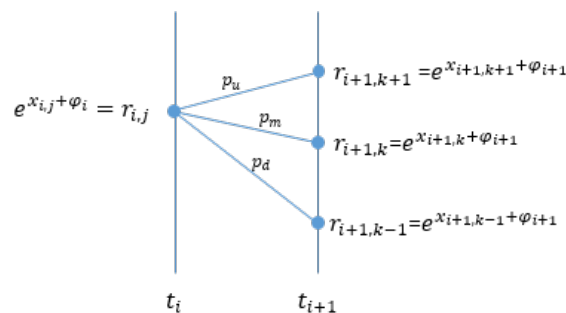
(iii) Aus der SDG für x_t folgt direkt mit $\theta(t) = 0$

$$x_t = x_s e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u.$$

Mit $x_t = r_t - \varphi(t)$ folgt weiterhin für den Short-Rate-Prozess

$$r_t = x_s e^{-\alpha(t-s)} + \varphi(t) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u.$$

(c) (i)



(ii)

$$(I) \quad 1 = p_u + p_m + p_d$$

$$(II) \quad E_{i,j} = p_u x_{i+1,k+1} + p_m x_{i+1,k} + p_d x_{i+1,k-1}$$

$$(III) \quad V_i^2 = p_u (x_{i+1,k+1} - E_{i,j})^2 + p_m (x_{i+1,k} - E_{i,j})^2 + p_d (x_{i+1,k-1} - E_{i,j})^2$$

Gleichung (I) stellt die Vollständigkeit der Wahrscheinlichkeiten sicher. Die anderen beiden Gleichungen gewährleisten, dass das approximative Baumdiagramm Erwartungswert (II) und Varianz (III) des kontinuierlichen Modells reproduziert.



- (iii) Die Parametrisierung der $x_{i,j}$ skaliert mit der Standardabweichung $\sqrt{V_i^2}$, da diese die typische Ausdehnung der Verteilung darstellt. Der Faktor 3 folgt aus Normierungsgründen für den trinomischen Baum. Die Wahl des mittleren Index ist derart, dass der resultierende Wert für $x_{i+1,k}$ nahe dem bedingten Erwartungswert $E_{i,j}$ liegt.
- (iv) Einsetzen des Hinweises führt auf das Gleichungssystem

$$(I) \quad 1 = p_u + p_m + p_d$$

$$(II) \quad E_{i,j} = (p_u + p_m + p_d)x_{i+1,k} + (p_u - p_d)\sqrt{3V_i^2}$$

$$(III) \quad V_i^2 = (p_u + p_m + p_d)(x_{i+1,k} - E_{i,j})^2 + 2(x_{i+1,k} - E_{i,j})\sqrt{3V_i^2}(p_u - p_d) + 3V_i^2(p_u + p_d)$$

Aus (II) folgt durch Ersetzung mittels (I)

$$(II) \quad (p_u - p_d) = \frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}}$$

sowie durch Einsetzen von (I) und (II) in (III)

$$(III) \quad (p_u + p_d) = \frac{V_i^2 + (E_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{3V_i^2}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems kann dann ermittelt werden durch (III) \pm (II) sowie Einsetzen in (I) als

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}} \right)^2,$$

$$p_m = \frac{2}{3} - \left(\frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}} \right)^2,$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{E_{i,j} - x_{i+1,k}}{\sqrt{3V_i^2}} \right)^2.$$



Aufgabe 7. [Numerik und Praktikabilität] [10 Punkte]

Der stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ folge der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x(0),$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozess ist und μ, σ deterministische Funktionen bezeichnen.

- (a) [5 Punkte] Zur Simulation von $(X_t)_{t \geq 0}$ stehen grundsätzlich zwei Ansätze zur Verfügung: die *direkte Simulation* aus der (exakten) Verteilung und die *Diskretisierung*. Nennen Sie für beide Ansätze je einen Vorteil und einen Nachteil.
- (b) [5 Punkte] Für $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ seien nun $\mu(t, X_t) = \mu \cdot X_t$ und $\sigma(t, X_t) = \sigma \cdot X_t$, d. h. $(X_t)_{t \geq 0}$ entspricht einer geometrischen Brownschen Bewegung.
- (i) [2 Punkte] Beschreiben Sie, wie in diesem Fall mittels exakter Simulation Realisierungen von X_t erzeugt werden können.
- (ii) [3 Punkte] Beschreiben Sie, wie mittels Diskretisierung über die Euler-Methode (rekursiv) Realisierungen von X_t erzeugt werden können.

Lösungsskizze:

(a) *Direkte Simulation:*

- Vorteile:
 - Direkte Simulation vermeidet Fehler durch Diskretisierung
 - Vorliegen der Verteilung von X_t ermöglicht oft weiterführende Anwendungen und erleichtert die Validierung der Simulation
- Nachteile:
 - Verfahren oft nicht anwendbar, da bei hinreichender Komplexität der SDE bzw. deren Parameter oft keine Verteilung in geschlossener Form vorliegt
 - Gegebenenfalls hohe Komplexität der Verteilungen

Diskretisierung:

- Vorteile:
 - Kann direkt auf nahezu beliebige Gestalt der SDE angewendet werden
 - Einfach und schnell in der Implementierung



- Nachteile:

- Kann Diskretisierungsfehler aufweisen, welche sich auf verschiedene Arten äußern können
- Abwesenheit einer geschlossenen Verteilung von X_t verhindert weiterführende Anwendungen und erschwert die Validierung der Simulation

[Bemerkung: Zu nennen ist je nur ein Vor- und Nachteil.]

- (b) (i) Für die geometrische Brownsche Bewegung ist die Lösung der SDE gegeben durch

$$X_t = x(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right),$$

d. h. zur Simulation von X_t simuliert man Realisierungen einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ϵ und betrachtet anschließend den Ausdruck $x(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}\epsilon\right)$.

- (ii) Folgt ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ der SDE

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x(0),$$

so liefert das Euler-Verfahren für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $t_{i+1} - t_i = h$ eine Diskretisierung in Form einer Markov-Kette $(Y_{t_i})_{i=1, \dots, n}$ durch die Rekursion

$$Y_0 = x(0), Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(t_i, Y_{t_i})h + \sigma(t_i, Y_{t_i})\Delta W_i,$$

wobei $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ ein normalverteilter Noise-Term mit Mittelwert Null und Varianz h ist. Durch Simulation von (voneinander unabhängigen) standardnormalverteilten Zufallsvariablen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ kann basierend darauf rekursiv eine Realisierung von $Y_{t_{i+1}}$ simuliert werden, indem man $Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(t_i, Y_{t_i})h + \sigma(t_i, Y_{t_i})\sqrt{h}\epsilon_{i+1}$ setzt. Im Fall $\mu(t, X_t) = \mu \cdot X_t$ und $\sigma(t, X_t) = \sigma \cdot X_t$ ergibt sich konkret die Rekursion

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu Y_{t_i} h + \sigma Y_{t_i} \sqrt{h} \epsilon_{i+1} \quad \text{mit } Y_{t_0} = x(0)$$

und mit $Y_{t_{i+1}}$ die gewünschte Realisierung.