DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 9. Oktober 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen. Die Klausur ist als *Open-Book-Klausur* konzipiert.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Peter Albrecht, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Prof. Dr. Raimond Maurer

Aufgabe 1. *[Zahlungsströme, Versicherungs- u. Finanzmarktprodukte][12 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Gegeben sei eine dreijährige DAX-Bull-Anleihe mit den folgenden Modalitäten:

- Es erfolgen keine laufenden Zinszahlungen (Zerobond-Variante).
- Der Nennwert der Anleihe beläuft sich auf 100.000 €.
- Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer der Bull-Anleihe die Rückzahlung des Nennwerts sowie eine potentielle Bonus-Zahlung. Die Bonus-Zahlung erfolgt, wenn der DAX am Ende der Laufzeit höher steht als bei Erwerb der Anleihe.
- Der Anfangsstand des DAX betrage 10.000 € (umgerechnet in Geldeinheiten).
- Die Höhe der Bonus-Zahlung beträgt 60% der (nicht annualisierten) Drei-Perioden-Gesamtrendite des DAX und ist bezogen auf den Nennwert der Anleihe.

Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_3 der Bull-Anleihe aus Sicht des Käufers der Anleihe formal dar. Zerlegen Sie diese Position dann so, dass die eingebettete Option offengelegt wird. Welcher Optionstyp mit welchen Modalitäten geht hier jeweils in welchem Umfang ein?

(b) *[6 Punkte]* Gegeben sei ein Discount-Zertifikat auf eine Einheit der YZ-Aktie mit einer Laufzeit von 3 Jahren. Am Ende der Laufzeit erhält der Käufer des Zertifikats den Marktwert S_3 der YZ-Aktie, maximal aber den Betrag 5.000 € (Cap).

Stellen Sie zunächst die Rückfluss-Position V_3 des Zertifikats zum Zeitpunkt 3 formal dar. Zerlegen Sie diese Position dann alternativ auf *zwei Weisen* so, dass die jeweilige eingebettete Optionsposition offengelegt wird. Welche Optionen mit welchen Modalitäten gehen in diese beiden Zerlegungen ein?

Hinweis: Es gilt $\min\{-x, 0\} = -\max\{x, 0\}$.

Lösungsskizze:

(a) <u>Rückfluss-Position:</u>

$V_3 = \max\{100.000, 100.000(1 + 0{,}6 \cdot \frac{\text{DAX}(3)-\text{DAX}(0)}{\text{DAX}(0)})\}$, wobei $\text{DAX}(t)$ den DAX-Stand zum Zeitpunkt t bezeichne.

Zerlegung:

$$\begin{aligned} V_3 &= 100.000 + \max\left\{0{,}6 \cdot 100.000 \cdot \tfrac{\text{DAX}(3)-\text{DAX}(0)}{\text{DAX}(0)}, 0\right\} \\ &= 100.000 + \tfrac{60.000}{\text{DAX}(0)} \cdot \max\{\text{DAX}(3) - \text{DAX}(0), 0\} \\ &= 100.000 + 6 \cdot \max\{\text{DAX}(3) - 10.000, 0\} \end{aligned}$$

Die Zerlegung beinhaltet 6 dreijährige DAX-Call-Optionen mit einem Ausübungspreis in Höhe von 10.000.

(b) Rückfluss-Position:

$$V_3 = \min\{S_3, 5.000\}$$

Zerlegung 1:

$$\begin{aligned} V_3 &= S_3 + \min\{5.000 - S_3, 0\} \\ &= S_3 - \max\{S_3 - 5.000, 0\} \end{aligned}$$

Zerlegung 1 beinhaltet einen Short Call auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis 5.000.

Zerlegung 2:

$$\begin{aligned} V_3 &= 5.000 + \min\{S_3 - 5.000, 0\} \\ &= 5.000 - \max\{5.000 - S_3, 0\} \end{aligned}$$

Zerlegung 2 beinhaltet einen Short Put auf die YZ-Aktie mit Laufzeit 3 und Ausübungspreis 5.000.

Aufgabe 2. *[Individualbewertung] [16 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Betrachten Sie einen Investor, der dem Erwartungsnutzen-Kalkül (Bernoulli-Prinzip) folgt und die Nutzenfunktion $u(x) = x^\alpha/\alpha$ besitzt, wobei $x > 0$ und $0 < \alpha < 1$. Bestimmen Sie für diesen Fall das Arrow/Pratt-Maß $r(x)$ für die absolute Risikoaversion sowie das Sicherheitsäquivalent $s(X)$ für eine beliebige Zufallsvariable $X > 0$, für die $\mathbb{E}[u(X)]$ wohldefiniert ist! Ist das Arrow/Pratt-Maß monoton steigend oder monoton fallend im Vermögen x?

(b) *[4 Punkte]* Das Nullnutzenprinzip für die Bestimmung der Risikoprämie π lautet $\mathbb{E}[u(\pi - S)] = u(0)$, wobei S den zu versichernden Schaden bezeichnet. Wie lautet die Nullnutzenprämie im Falle der Nutzenfunktion $u(x) = -\exp(-\alpha x)$ mit Parameter $\alpha > 0$?

(c) *[6 Punkte]* Anfangs- bzw. Endvermögen eines Investors sind gegeben durch v_0 bzw. V_1. Die zugehörige Logrendite R ist gegeben durch $R = \ln(V_1/v_0)$. Der Investor bewertet das *Endvermögen* durch den Erwartungsnutzen $\mathbb{E}[u(V_1)]$ auf der Basis seiner persönlichen Risikonutzenfunktion u.

(i) *[1 Punkt]* Bestimmen Sie die hierzu *äquivalente* Nutzenfunktion $\tilde{u}$, sodass $\mathbb{E}[\tilde{u}(R)]$ zu einer identischen Bewertung führt.

(ii) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den korrespondierenden Arrow/Pratt-Maßen $\tilde{r}(x)$ und $r(x)$.

Hinweis: $V_1 = v_0 \cdot \exp(R)$

Lösungsskizze:

(a) Das Arrow/Pratt-Maß ist definiert durch

$$r(x) := -u''(x)/u'(x).$$

Im Falle $u(x) = x^\alpha/\alpha$ gilt $u'(x) = x^{\alpha-1}$ und $u''(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Insgesamt folgt damit $r(x) = -(\alpha-1)\frac{1}{x} = (1-\alpha)\frac{1}{x}$. Das Arrow/Pratt-Maß ist somit monoton fallend im Vermögen x.

Das Sicherheitsäquivalent genügt der Bedingung

$$u(s(X)) = \mathbb{E}[u(X)],$$

im Falle $u(x) = x^\alpha/\alpha$ somit

$$\frac{s(X)^\alpha}{\alpha} = \mathbb{E}\left[\frac{X^\alpha}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[X^\alpha]$$

und damit insgesamt

$$s(X) = (\mathbb{E}[X^\alpha])^{1/\alpha}.$$

(b) Die Bedingung für die Nullnutzenpämie π lautet in diesem Fall

$$\mathbb{E}[-\exp(-a(\pi - S))] = -\exp(-a \cdot 0) = -1.$$

Hieraus folgt $\exp(-a\pi)\mathbb{E}[\exp(aS)] = 1$, und dies führt insgesamt zum Prämienprinzip („Exponentielles Prämienprinzip“)

$$\pi(S) = \tfrac{1}{a} \ln \mathbb{E}[\exp(aS)].$$

(c) Aus $V_1 = v_0 e^R$ folgt $\mathbb{E}[u(V_1)] = \mathbb{E}[u(v_0 e^R)]$.

(i) Die Nutzenfunktion $\tilde{u}(x) := u(v_0 e^x)$ führt somit zu einer identischen Bewertung.

(ii) Es gilt $\tilde{u}'(x) := v_0 e^x u'(v_0 e^x)$ und $\tilde{u}''(x) = u''(v_0 e^x)(v_0 e^x)^2 + v_0 e^x u'(v_0 e^x)$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x) &= -\frac{\tilde{u}''(x)}{\tilde{u}'(x)} = -\frac{u''(v_0 e^x) v_0 e^x}{u'(v_0 e^x)} - 1 \\ &= r(v_0 e^x) v_0 e^x - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *[Grundprinzipien der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

Gegeben seien die folgenden einperiodigen Finanzmarktmodelle, in denen die zwei primären Finanztitel „Sparbuch“ und „Aktie“ folgende Wertentwicklungen besitzen:

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1,1} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1,1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 88} \\ \boxed{S_0^1 = 50} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 44} \end{tikzcd}$$

(2) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1,1} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1,1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 88} \\ \boxed{S_0^1 = 50} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 55} \end{tikzcd}$$

(3) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = \frac{1}{3}$, $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^0(\omega_1) = 1,1} \\ \boxed{S_0^0 = 1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^0(\omega_2) = 1,1} \\ & \boxed{S_1^0(\omega_3) = 1,1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \boxed{S_1^1(\omega_1) = 88} \\ \boxed{S_0^1 = 50} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{S_1^1(\omega_2) = 88} \\ & \boxed{S_1^1(\omega_3) = 44} \end{tikzcd}$$

(a) *[10 Punkte]*

(i) *[8 Punkte]* Welche dieser drei Finanzmarktmodelle sind arbitrage-frei? Begründen Sie Ihre Antwort! Geben Sie für die arbitrage-freien Modelle alle äquivalenten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße an.

(ii) *[2 Punkte]* Untersuchen Sie die arbitrage-freien Finanzmarktmodelle hinsichtlich der Vollständigkeit. Begründen Sie Ihre Aussagen!

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie das Finanzmarktmodell (1), in dem zusätzlich eine Europäische Call-Option auf die Aktie mit Fälligkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ und Ausübungspreis 55 gehandelt wird.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den arbitrage-freien Preis C_0 der Call-Option zum Zeitpunkt $t = 0$ durch risikoneutrale Bewertung.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die Replikationsstrategie für die Call-Option sowie das in $t = 0$ erforderliche Anfangsinvestment. Was stellen Sie fest?

(iii) *[4 Punkte]* Wird hingegen analog zur klassischen Lebensversicherungsmathematik der Preis der Call-Option mit Auszahlungsprofil C_1 als Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[C_1/S_1^0]$ der diskontierten Auszahlung unter dem „statistischen“ Maß $\mathbb{P}$ berechnet, so lässt das erweiterte Marktmodell Arbitrage zu.

Geben Sie eine Arbitrage-Strategie an und berechnen Sie Ihren Gewinn.

(c) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie im Finanzmarktmodell (3) die Menge der arbitrage-freien Preise für den Contingent Claim C_1, definiert durch

$$C_1(\omega_1) = 33, \quad C_1(\omega_2) = 110, \quad C_1(\omega_3) = 66.$$

Ist der Contingent Claim C_1 replizierbar?

Lösungsskizze:

(a) (i) Der *1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung* besagt, dass ein (einperiodiges) Finanzmarktmodell genau dann arbitrage-frei ist, wenn ein äquivalentes risikoneutrales Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Mit dieser Charakterisierung folgt:

Finanzmarktmodell (1):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2$, eines zum Ursprungsmaß $\mathbb{P}$ äquivalenten risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ sind bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 \quad \text{bzw. konkret} \quad 50 = 80q_1 + 40q_2$$

sowie die Nebenbedingung $q_1 + q_2 = 1$. Damit folgt zunächst

$$50 = 80q_1 + 40(1 - q_1) = 40q_1 + 40$$

und entsprechend $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$. Das Finanzmarktmodell ist arbitrage-frei.

Finanzmarktmodell (2):

Analog zum Finanzmarktmodell (1) berechnet man die eindeutigen Gewichte $q_1 = 0$ und $q_2 = 1$. Damit ist das korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ nicht äquivalent zu $\mathbb{P}$; das Modell ist nicht arbitrage-frei.

Bemerkung: Alternativ kann argumentiert werden, dass die Aktie in Szenario ω_2 dieselbe Rendite und im Szenario ω_1 eine echt höhere Rendite als das Sparbuch liefert und somit systematisch besser ist. Eine Arbitrage-Strategie ist der Kauf einer Aktie durch Aufnahme eines Kredits der Höhe 50 in $t = 0$ und Verkauf der Aktie sowie Rückzahlung des Kredits in $t = 1$.

Finanzmarktmodell (3):

Die Gewichte $q_i := \mathbb{Q}[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, eines äquivalenten risikoneutralen Maßes sind bestimmt durch

$$\frac{S_0^1}{S_0^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^1}{S_1^0}\right] = \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_1) \cdot q_1 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_2) \cdot q_2 + \frac{S_1^1}{S_1^0}(\omega_3) \cdot q_3$$

sowie die Nebenbedingung $q_1+q_2+q_3=1$. Durch Einsetzen der Werte im konkreten Modell ergibt sich

$$50 = 80q_1 + 80q_2 + 40q_3 = 80(1-q_3) + 40q_3 = 80 - 40q_3.$$

Es folgt $q_3 = \frac{3}{4}$, $q_1 + q_2 = \frac{1}{4}$. Jede Aufteilung $q_1(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha$, $q_2(\alpha) = \frac{1}{4}(1-\alpha)$ mit $\alpha \in (0,1)$ definiert ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_\alpha$, das zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist. Das Finanzmarktmodell ist arbitrage-frei.

(ii) Ein arbitrage-freies Finanzmarktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert (*2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung*). Damit ist mit den Erkenntnissen aus Teil (i) das arbitrage-freie Marktmodell (1) vollständig, während das Marktmodell (3) unvollständig ist.

Bemerkung: Alternativ kann argumentiert werden, dass Marktmodell (1) vollständig ist, da für jeden Contingent Claim eine Replikationsstrategie durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten bestimmt werden kann. Im Marktmodell (3) ist Replikation mit dem Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen verbunden. Dies ist für bestimmte Contingent Claims nicht möglich; das Marktmodell ist unvollständig.

(b) (i) Das Auszahlungsprofil der Call-Option beträgt zur Fälligkeit

$$C_1(\omega) = (S_1^1(\omega) - 55)^+ = \begin{cases} 33 & \text{für } \omega = \omega_1, \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel ergibt sich der arbitrage-freie Preis

$$C_0 = S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] = 30q_1 + 0q_2 = 30 \cdot \frac{1}{4} = 7,5.$$

(ii) Für die Replikationsstrategie ϑ muss gelten

$$C_1(\omega) = V_1^\vartheta(\omega) = S_1^0(\omega)\cdot\vartheta^0 + S_1^1(\omega)\cdot\vartheta^1, \quad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Hieraus resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1,1\cdot\vartheta^0 + 88\cdot\vartheta^1 &= 33, \\ 1,1\cdot\vartheta^0 + 44\cdot\vartheta^1 &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $\vartheta^1 = \frac{3}{4}$, $\vartheta^0 = -30$. Die Replikationsstrategie besteht also im Kauf von $\frac{3}{4}$ Einheiten der Aktie und der Kreditaufnahme von 30. Das hierfür erforderliche Anfangskapital beträgt

$$V_0^\vartheta = -30\cdot S_0^0 + \tfrac{3}{4}\cdot S_0^1 = -30\cdot 1 + \tfrac{3}{4}\cdot 50 = 7,5$$

und entspricht dem eindeutigen arbitrage-freien Preis C_0 des Contingent Claims C_1.

(iii) Unter dem statistischen Maß $\mathbb{P}$ gilt $C_0^{\mathbb{P}} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[C_1/S_1^0] = 15$. Wäre dies der Preis der Call-Option C_1, so könnte man zum Zeitpunkt 0 eine Einheit von C_1 zum Preis $C_0^{\mathbb{P}} = 15$ verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis $C_0 = 7,5$ implementieren und das freie Kapital $C_0^{\mathbb{P}} - C_0 = 7,5$ in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die durch den Verkauf der Call-Option eingegangene Zahlungsverpflichtung C_1 erfüllt werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen C_1 und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $S_1^0(C_0^{\mathbb{P}} - C_0) = 1,1 \cdot 7,5 = 8,25$. Netto bleibt also für jedes Szenario der risikofreie Gewinn $8,25$, d. h. ein Preis $C_0^{\mathbb{P}} = 15$ ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage.

(c) Für den Contingent Claim $C_1(\omega_1) = 33$, $C_1(\omega_2) = 110$, $C_1(\omega_3) = 66$ berechnet man unter jedem der risikoneutralen Maße $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, aus (a) einen arbitrage-freien Preis

$$\begin{aligned} C_{0,\alpha} &= S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\alpha}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] \\ &= S_0^0\left(\frac{C_1(\omega_1)}{S_1^0}\cdot q_1(\alpha) + \frac{C_1(\omega_2)}{S_1^0}\cdot q_2(\alpha) + \frac{C_1(\omega_3)}{S_1^0}\cdot q_3\right) \\ &= 30\cdot\tfrac{1}{4}\alpha + 100\cdot\tfrac{1}{4}(1-\alpha) + 60\cdot\tfrac{3}{4} \\ &= 70 - 17,5\alpha. \end{aligned}$$

Dieser hängt explizit von $\alpha \in (0,1)$ ab. Man erhält die Menge der arbitrage-freien Preise $\mathcal{C}_0 = (52{,}5; 70)$, also ein ganzes Preisintervall.

Der Contingent Claim ist nicht replizierbar, da anderenfalls der arbitrage-freie Preis eindeutig wäre und den Kosten der Replikation entsprechen würde.

Bemerkung: Alternativ kann argumentiert werden, dass alle im Finanzmarktmodell replizierbaren Contingent Claims die Struktur

$$C_1(\omega) = \vartheta^0 S_1^0(\omega) + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

besitzen, also eine Linearkombination der primären Finanztitel darstellen. Da sich die Auszahlungen des Contingent Claims in den Szenarien ω_1, ω_2 unterscheiden, ist der vorliegende Contingent Claim nicht replizierbar.

Aufgabe 4. *[Zinsen, Zinsprodukte, Zinssensitivitäten] [32 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Ein Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe seiner Zins- und Tilgungszahlungen $\{N \cdot i, \ldots, N \cdot i, N \cdot (i+1)\}$. Dabei bedeute N den Nennwert und i die Nominalverzinsung des Bonds. Der Standardbond habe eine Laufzeit von T Jahren und einen anfänglichen Kaufkurs in Höhe von P_0.

Bestimmen Sie unter Verwendung der geometrischen Summe die Effektivverzinsung des Standardbonds unter der Annahme, dass die Wiederanlage der Zinsrückflüsse zum (fristigkeitsunabhängigen) Marktzins $i_0 > 0$ erfolgt.

(b) *[7 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Gegeben sei ein beliebiger Zinstitel mit Barwert $P_0(r)$ unter der zum Zeitpunkt 0 bestehenden flachen Zinsstruktur der Höhe r. Sei $t > 0$ ein beliebiger Zeitpunkt.

Welche Beziehung besteht zwischen der modifizierten Duration $\mathrm{DUR}_t^M(r)$ in t und der modifizierten Duration $\mathrm{DUR}_0^M(r)$ in 0?

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Konvexität eines Zerobonds mit Rückzahlungsbetrag N und Laufzeit T.

(c) *[8 Punkte]* Ein Investor möchte einen Anlagebetrag von 10.000 € bei einem derzeitigen Marktzins von 10% p. a. und flacher Zinsstruktur in festverzinsliche Wertpapiere investieren. Ihm stehen Zerobonds mit Nennwert 1 sowie einer Restlaufzeit von einem Jahr bzw. sieben Jahren zur Verfügung. Gehen Sie von einer hälftigen Aufteilung des Investitionsbudgets aus.

Berechnen Sie das Vermögen des Investors nach vier Jahren, wenn sich der Marktzins nach der Investition

- nicht ändert,
- unmittelbar nach Anlage auf 8% absinkt und im Weiteren dort verbleibt,
- unmittelbar nach Anlage auf 12% ansteigt und im Weiteren dort verbleibt.

Vergleichen Sie die Vermögensposition des Investors in den Szenarien mit einer Zinsänderung gegenüber dem Szenario ohne Zinsänderung.

(d) *[10 Punkte]* Gegeben seien die Zeitpunkte $t < u \leq T_1 < T_2$. Betrachten Sie einen in t abgeschlossenen Forward-Kontrakt (Long-Position) mit Fälligkeit T_1 auf einen Zerobond mit Nennwert $N = 1$ und Fälligkeit T_2.

Der Forwardpreis in t wird definitionsgemäß so bestimmt, dass der Wert des Kontrakts in t den Wert 0 annimmt. Welchen Wert besitzt ein in t erworbener (Long-Position) Forward-Kontrakt zum Zeitpunkt u? Stellen Sie diesen Wert explizit in Abhängigkeit von der Differenz zweier Forwardpreise dar!

Lösungsskizze:

(a) Ausgedrückt über die Kuponzahlung $Z := N \cdot i$ lautet der Endwert der Rückflüsse bei Verzinsung mit i_0 ($q_0 := 1 + i_0$):

$$\begin{aligned} Z(q_0^{T-1} + \ldots + q_0 + 1) + N &= Z(1 + q_0 + \ldots + q_0^{T-1}) + N \\ &= Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichung für den Effektivzins r_{eff}:

$$P_0(1 + r_{\text{eff}})^T = Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N$$

Folgerung:

$$r_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{P_0}\left(Z\frac{q_0^T - 1}{q_0 - 1} + N\right)\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

(b) (i) Gemäß der Definition der modifizierten Duration gilt

$$\text{DUR}_0^M(r) = -P_0'(r)/P_0(r) \quad \text{bzw.} \quad \text{DUR}_t^M(r) = -P_t'(r)/P_t(r).$$

Nun gilt $P_t'(r) = t(1+r)^{t-1}P_0(r) + P_0'(r)(1+r)^t$ und damit

$$\begin{aligned} \text{DUR}_t^M(r) &= -\frac{t(1+r)^{t-1}P_0(r) + (1+r)^t P_0'(r)}{(1+r)^t P_0(r)} \\ &= -\frac{t}{1+r} - \frac{P_0'(r)}{P_0(r)} = \text{DUR}_0^M(r) - \frac{t}{1+r}. \end{aligned}$$

(ii) Die Konvexität CONV(r) einer Zahlungsreihe $\{Z_1, \ldots Z_T\}$ ist allgemein definiert durch

$$\text{CONV}(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{\sum_{t=1}^T t(t+1)Z_t(1+r)^{-t}}{(1+r)^2 \sum_{t=1}^T Z_t(1+r)^{-t}}.$$

Im Falle des betrachteten Zerobonds gilt $Z_1 = \ldots = Z_{T-1} = 0$ und $Z_T = N$. Damit reduziert sich der Ausdruck für die Konvexität auf

$$\text{CONV}(r) = \frac{T(T+1)N(1+r)^{-T}}{(1+r)^2 N(1+r)^{-T}} = T(T+1)(1+r)^{-2}.$$

(c) <u>Keine Zinsänderung:</u>

$$5.000 \cdot (1,1)^4 + 5.000 \cdot (1,1)^4 = 10.000 \cdot (1,1)^4 = 14.641,00.$$

Zinsrückgang auf 8%:

In $t = 0$ betragen die Marktpreise der Zerobonds mit Nennwert 1 und mit Restlaufzeit von einem bzw. sieben Jahren bei Bewertung zum Marktzins $(1,1)^{-1}$ bzw. $(1,1)^{-7}$. Insofern können zu Beginn bei hälftiger Aufteilung des Startkapitals $5.000 \cdot 1,1 = 5.500,00$ und $5.000 \cdot (1,1)^7 = 9.743,59$ Einheiten der Zerobonds mit Restlaufzeit von einem bzw. sieben Jahren erworben werden.

- Entwicklung Zerobond 1:

  Rückzahlung zu 1 in $t = 1$, dann Wiederanlage über 3 Jahre zu 8%, d. h. zu $(1,08)^3 = 1,2597$

- Entwicklung Zerobond 2:

  Wert in $t = 4$ entspricht dem abgezinstem Endwert bei 8%, d. h. $(1,08)^{-3} = 0,7938$

- Wert in $t = 4$ insgesamt somit:

$$5.500,00 \cdot 1,2597 + 9.743,59 \cdot 0,7938 = 14.662,81$$

Zinsanstieg auf 12%:

Analog: $5.500,00 \cdot (1,12)^3 + 9.743,59 \cdot (1,12)^{-3} = 14.662,40$

In den Szenarien mit einer Zinsänderung ist das Vermögen des Investors jeweils höher als im Szenario mit unverändertem Zins.

(d) Bezeichne $P(T_1, T_2)$ den Wert des T_2-Bonds in T_1 und $F(t; T_1, T_2)$ den Preis des in t abgeschlossenen Forward-Kontrakts. Der Rückfluss aus dem Kontrakt zum Zeitpunkt T_1 beläuft sich mithin auf

$$P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2).$$

Der Wert dieser Zahlung in u ist damit

$$(P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2))P(u, T_1) = P(u, T_2) - F(t; T_1, T_2)P(u, T_1).$$

Nun gilt

$$F(u; T_1, T_2) = \frac{P(u, T_2)}{P(u, T_1)}.$$

Hieraus resultiert insgesamt für den Wert des Forward-Kontrakts zum Zeitpunkt $t < u \leq T_1$:

$$(F(u; T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2))P(u, T_1).$$

Der gesuchte Wert in u lässt sich damit als Funktion der Differenz zweier Forwardpreise ausdrücken.

Aufgabe 5. *[Bewertung von Aktienderivaten: Binomialmodell und Grenzübergang zu Black-Scholes-Preisen] [25 Punkte]*

(a) *[18 Punkte]* Betrachten Sie das zweiperiodige Binomialmodell, in dem für die Aktie ein Startpreis von 100 € sowie pro Periode eine prozentuale Aufwärtsbewegung von 30% und eine prozentuale Abwärtsbewegung von 20% unterstellt werden. Der einperiodige Zinssatz für die sichere Kapitalanlage bzw. -aufnahme betrage bei flacher Zinsstruktur $r = 5\%$.

Im Markt wird eine *Europäische Put-Option* auf die Aktie mit Fälligkeit in $t = 2$ und Ausübungspreis 120 € gehandelt.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie für alle Szenarien die Auszahlung C_2 der Put-Option zum Fälligkeitszeitpunkt $t = 2$ an.

(ii) *[9 Punkte]* Berechnen Sie durch risikoneutrale Bewertung die arbitragefreien Preise der Put-Option zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$.

(iii) *[6 Punkte]* Berechnen Sie - mithilfe der arbitrage-freien Preise aus (ii) - die Replikationsstrategie, beginnend in $t = 0$, für die Put-Option.

(b) *[7 Punkte]* Der Black-Scholes-Preis einer Europäischen Put-Option mit Maturität T und Ausübungspreis $K > 0$ auf eine Aktie mit Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$C_0^{\text{put}} = -S_0\Phi(-d_+(S_0,T)) + e^{-rT}K\Phi(-d_-(S_0,T)),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung darstellt, r der risikofreie Zins ist, σ die Volatilität der Aktie bezeichnet und die Konstanten $d_\pm(S_0,T) = (\ln(S_0/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T)/(\sigma\sqrt{T})$ verwendet werden.

Erläutern Sie inklusive Herleitung die *Put-Call-Parität* und nutzen Sie diese, um die Black-Scholes-Formel für den Preis C_0^{call} einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Ausübungspreis $K > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ herzuleiten.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit „Down"-Faktor $d = 0,8$ und „Up"-Faktor $u = 1,3$ ist der Kursverlauf S_0, S_1, S_2 der Aktie gegeben durch:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = u^2S_0 = 169} \\
 & \boxed{S_1 = uS_0 = 130} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\boxed{S_0 = 100} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{S_2 = udS_0 = 104} \\
 & \boxed{S_1 = dS_0 = 80} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{S_2 = d^2S_0 = 64}
\end{tikzcd}$$

Hieraus ist die terminale Auszahlung der Put-Option für alle vier Szenarien $\omega \in \Omega = \{(u,u),(u,d),(d,u),(d,d)\}$ ablesbar:

$$C_2(\omega) = (120 - S_2(\omega))^+ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = (u,u), \\ 16 & \text{für } \omega = (u,d) \text{ und } \omega = (d,u), \\ 56 & \text{für } \omega = (d,d). \end{cases}$$

(ii) Die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten unter dem eindeutigen risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ sind gegeben durch

$$q = \tfrac{1+r-d}{u-d} = 0,5$$

für eine Aufwärtsbewegung sowie durch $1-q = 0,5$ für eine Abwärtsbewegung der Aktie. Damit gilt $\mathbb{Q}[\{\omega\}] = (1-q)^{2-N(\omega)}q^{N(\omega)} = 0,25$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $N(\omega)$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bezeichnet.

Es sei C_t der arbitrage-freie Preis der Put-Option in $t = 0,1,2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_1((u,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_2|\mathcal{F}_1\right](u,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[C_2((u,u))q + C_2((u,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1,05}(0\cdot 0,5 + 16\cdot 0,5) = \tfrac{160}{21} = 7,6190, \\ C_1((d,\cdot)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_2|\mathcal{F}_1\right](d,\cdot) = \tfrac{1}{1+r}[C_2((d,u))q + C_2((d,d))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1,05}(16\cdot 0,5 + 56\cdot 0,5) = \tfrac{720}{21} = 34,2857 \end{aligned}$$

und rekursiv ergibt sich

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{1+r}C_1\right] = \tfrac{1}{1+r}[C_1((u,\cdot))q + C_1((d,\cdot))(1-q)] \\ &= \tfrac{1}{1,05}\left[\tfrac{160}{21}\cdot 0,5 + \tfrac{720}{21}\cdot 0,5\right] = 19,9546. \end{aligned}$$

Bemerkung: Alternativ berechnet man direkt

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{C_2}{(1,05)^2}\right] = \tfrac{1}{(1,05)^2}(0+16+16+56)\cdot 0,25 = 19,9546.$$

(iii) Die in (ii) berechneten arbitrage-freien Preise entsprechen im vollständigen Binomialmodell den Kosten der perfekten Replikation in den jeweiligen Knoten. Die Berechnung der Stückzahlen x in der Aktie und y im Sparbuch mit Wertentwicklung $(1;1+r;(1+r)^2) = (1;1,05;1,1025)$ erfolgt in jedem Knoten durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

$\underline{t = 1, \omega = (u,\cdot)}$:

$$\begin{aligned} 169x &+ 1,1025y = 0 \\ 104x &+ 1,1025y = 16 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = -16/65 = -0,2462$, $y = 37,7324$.

<u>$t = 1, \omega = (d, \cdot)$:</u>

$$\begin{aligned} 104x &+ 1,1025y = 16 \\ 64x &+ 1,1025y = 56 \end{aligned}$$

Damit gilt $x = -1$, $y = 108,8435$.

<u>$t = 0$:</u>

$$\begin{aligned} 130x &+ 1,05y = \tfrac{160}{21} \\ 80x &+ 1,05y = \tfrac{720}{21} \end{aligned}$$

Damit gilt $x = -8/15 = -0,5333$, $y = 73,2880$.

(b) Auf Ebene der Auszahlungsprofile der Optionen gilt

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Da das Funktional $f(S_T) \mapsto e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_T)]$ der Black-Scholes-Preise zu $t = 0$ linear ist, resultiert hieraus die Put-Call-Parität

$$C_0^{\text{call}} - C_0^{\text{put}} = S_0 - e^{-rT}K,$$

d. h. die Preise von Aktie, Call- und Put-Option sind abhängig voneinander. Sind zwei dieser Preise bekannt, so kann der dritte mit der Put-Call-Parität berechnet werden. Insbesondere folgt die Black-Scholes-Bewertungsformel für die Call-Option:

$$\begin{aligned} C_0^{\text{call}} &= C_0^{\text{put}} + S_0 - e^{-rT}K \\ &= -S_0\Phi(-d_+(S_0,T)) + e^{-rT}K\Phi(-d_-(S_0,T)) + S_0 - e^{-rT}K \\ &= S_0[1 - \Phi(-d_+(S_0,T))] - e^{-rT}K[1 - \Phi(-d_-(S_0,T))] \\ &= S_0\Phi(d_+(S_0,T)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(S_0,T)). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. *[Value at Risk: Eigenschaften, Alternativen, Anwendungen] [20 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Betrachten Sie die zwei Finanzpositionen X_1 und X_2 mit wie folgt spezifizierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$X_1 = \begin{cases} 3.000 & \text{mit W. } 0,940 \\ -2.000 & \text{mit W. } 0,050 \\ -7.000 & \text{mit W. } 0,010 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 3.000 & \text{mit W. } 0,940 \\ -2.000 & \text{mit W. } 0,050 \\ -7.000 & \text{mit W. } 0,007 \\ -10.000 & \text{mit W. } 0,002 \\ -20.000 & \text{mit W. } 0,001 \end{cases}$$

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie für beide Finanzpositionen den Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0,01$. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse, um einen entscheidenden Nachteil des Risikomaßes Value at Risk zu beschreiben.

(ii) *[5 Punkte]* In der Praxis ist der Tail Value at Risk (TV@R) eine gängige Alternative zum Value at Risk. Berechnen Sie für beide Finanzpositionen den Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0,01$. Kommentieren Sie das Ergebnis!

Hinweis: Für eine diskrete Zufallsvariable Y mit möglichen Realisationen $\{y_1, \ldots, y_n\}$ und jede Konstante c mit $\mathbb{P}[Y > c] > 0$ gilt

$$\mathbb{E}[Y|Y > c] = \frac{1}{\mathbb{P}[Y>c]} \sum_{i=1,\ldots,n, y_i>c} y_i \mathbb{P}[Y = y_i].$$

(b) *[5 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie einen weiteren wesentlichen Kritikpunkt am Value at Risk an und illustrieren Sie diesen anhand eines Beispiels.

(ii) *[2 Punkte]* Geben Sie inklusive formaler Definition ein Risikomaß auf Basis des Value at Risk an, das den Kritikpunkt für alle Finanzpositionen behebt. Begründen Sie, warum Ihr Risikomaß auch den Kritikpunkt aus (a) aufhebt.

(c) *[8 Punkte]* Die *Solvabilitätskapitalanforderung* (SCR) unter Solvency II wird durch den Mean Value at Risk $\text{SCR}(E_1) = \text{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathbb{E}[E_1])$ zum Niveau $0,005$ der Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont definiert.

(i) *[3 Punkte]* Leiten Sie für eine normalverteilte Finanzposition X explizite Berechnungsformeln für $\text{V@R}_{0,005}(X)$ sowie $\text{SCR}(X)$ her.

(ii) *[5 Punkte]* Gegeben seien zwei gemeinsam normalverteilte Finanzpositionen X, Y mit Korrelation ρ.

Zeigen Sie mithilfe von (i), dass in diesem Fall die Anwendung der Wurzelformel zur Risikoaggregation mathematisch korrekt auf das SCR der Position $X + Y$ führt und sich das SCR subadditiv verhält. Wie beurteilen Sie allgemein die Anwendbarkeit der Wurzelformel zur Risikoaggregation?

Lösungsskizze:

(a) (i) Aus der Definition des Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Finanzposition X,

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X + m < 0] \leq \lambda\},$$

lässt sich unmittelbar

$$\mathrm{V@R}_{0,01}(X_1) = \mathrm{V@R}_{0,01}(X_2) = 2.000$$

ablesen. Trotz identischem V@R ist die Finanzposition X_2 offensichtlich gefährlicher als X_1. Der Value at Risk berücksichtigt nur die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Verlusten über einer kritischen Grenze, nicht aber die potentiellen Höhen der Verluste, die diese kritische Grenze übersteigen.

(ii) Der Tail Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) = \mathbb{E}[-X \mid -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

Nach Hinweis gilt für $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_k) &= \mathbb{E}[-X_k \mid -X_k > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)] \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}[-X_k > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)]} \sum_{i=1,\dots,n,\, -x_i > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_k)} -x_i \mathbb{P}[X_k = x_i]\end{aligned}$$

mit den Realisierungen $\{x_1, x_2, x_3\} = \{3.000, -2.000, -7.000\}$ für X_1 sowie $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{3.000, -2.000, -7.000, -10.000, -20.000\}$ für X_2.

Für X_1 erfüllt nur $x_3 = -7.000$ die Bedingung $-x_3 > \mathrm{V@R}_{0,01}(X_1)$, und entsprechend gilt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) = \frac{1}{0,01}(7.000 \cdot 0,01) = 7.000.$$

Für X_2 sind $x_3 = -7.000$, $x_4 = -10.000$ und $x_5 = -20.000$ zu berücksichtigen, und es folgt

$$\mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = \frac{1}{0,01}(7.000 \cdot 0,007 + 10.000 \cdot 0,002 + 20.000 \cdot 0,001) = 8.900.$$

Daher ergibt sich

$$7.000 = \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_1) < \mathrm{TV@R}_{0,01}(X_2) = 8.900,$$

d. h. der gefährlicheren Finanzposition X_2 wird auch das höhere Risiko zugeordnet, da der TV@R - im Gegensatz zum V@R - auch die Verlusthöhen jenseits des V@R berücksichtigt.

(b) (i) Das Risikomaß V@R ist im Allgemeinen nicht subadditiv und kann insofern ökonomisch sinnvolle Diversifikation bestrafen.

Beispiel:

Es seien zwei stochastisch unabhängige Finanzpositionen X_1, X_2 gegeben:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5 \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5 \end{cases} \qquad (i = 1,2)$$

Für diese beträgt der Value at Risk zum Niveau $0,5$ jeweils -1. Für die aggregierte Finanzposition ergibt sich

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,25, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,5, \\ -2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,25. \end{cases}$$

Deren Value at Risk zum Niveau $0,5$ beträgt 0. Damit gilt jedoch

$$\mathrm{V@R}_{0,5}(X_1 + X_2) > \mathrm{V@R}_{0,5}(X_1) + \mathrm{V@R}_{0,5}(X_2).$$

(ii) Eine Alternative ist das kohärente Risikomaß Average Value at Risk, definiert zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ via

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha,$$

unter dem das gemessene Risiko durch Diversifikation reduziert werden kann. Da $\mathrm{V@R}_\alpha$ modulo Vorzeichen ein α-Quantil ist und der Average Value at Risk somit per Definition über alle Quantile mit Niveau $\alpha \in (0,\lambda]$ mittelt, werden im Gegensatz zum Value at Risk mit festen Niveau λ der gesamte untere Tail der Verteilung bzw. extreme Verluste berücksichtigt.

(c) (i) Für die Normalverteilung (stetige Verteilung) ist der Value at Risk zum Niveau $\lambda = 0,005$ bestimmt durch $\lambda = \mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0]$. Hierbei gilt

$$\mathbb{P}[X + \mathrm{V@R}_\lambda(X) < 0] = \mathbb{P}\left[\tfrac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \le \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right] = \Phi\left(\tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right),$$

da die normierte Zufallsvariable $(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X)$ standardnormalverteilt ist. Dies liefert

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \tfrac{-\mathrm{V@R}_\lambda(X)-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

und damit nach Umformen $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -\mathbb{E}[X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma(X)$.

Insbesondere folgt (z. B. mit der Cash-Invarianz des Value at Risk)

$$\mathrm{SCR}(X) = \mathrm{V@R}_{0,005}(X - \mathbb{E}[X]) = \mathrm{V@R}_{0,005}(X) + \mathbb{E}[X] = -\Phi^{-1}(0,005)\sigma(X).$$

(ii) Da X, Y gemeinsam normalverteilt sind, ist auch die aggregierte Position $X + Y$ normalverteilt, d. h. die SCRs aller Finanzpositionen entsprechen nach Teilaufgabe (i) bis auf den positiven Faktor $-\Phi^{-1}(0,005)$ der Standardabweichung. Nach elementarer Stochastik gilt (unabhängig von den Verteilungen)

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Dies impliziert nach Multiplikation mit $-\Phi^{-1}(0,005)$ erstens

$$\mathrm{SCR}(X+Y) = \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

d. h. die Aggregation des Risikokapitals per Wurzelformel ist im Normalverteilungskontext mathematisch korrekt. Zweitens folgt

$$\mathrm{SCR}(X+Y) \leq \sqrt{(\mathrm{SCR}(X))^2 + (\mathrm{SCR}(Y))^2 + 2\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)} = \mathrm{SCR}(X)+\mathrm{SCR}(Y),$$

d. h. das SCR ist im Normalverteilungskontext auch subadditiv.

Die Wurzelformel liefert eine mathematisch korrekte Aggregation für gemeinsam normalverteilte Risiken (bzw. allgemeiner elliptische Verteilungen). Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken (speziell: schiefe Verteilungen, heavy tails) oder Abhängigkeiten (speziell: Tailabhängigkeiten) ist die Wurzelformel mathematisch hingegen nicht korrekt.

Aufgabe 7. *[Axiomatische Theorie der Risikomaße] [20 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Gegeben sei ein monetäres Risikomaß ρ auf einer Menge von Finanzpositionen $\mathcal{X}$.

(i) *[4 Punkte]* Definieren Sie die Akzeptanzmenge von ρ und zeigen Sie, dass das Risikomaß ρ umgekehrt aus seiner Akzeptanzmenge rekonstruiert werden kann. Interpretieren Sie diese Rekonstruktionsformel ökonomisch.

(ii) *[1 Punkt]* Erläutern Sie, wie z. B. eine Aufsichtsbehörde ausgehend von (i) ein Risikomaß definieren kann.

(iii) *[3 Punkte]* Geben Sie die beiden Eigenschaften an, unter denen das monetäre Risikomaß ρ kohärent ist. Interpretieren und würdigen Sie diese Eigenschaften ökonomisch.

(iv) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass jedes kohärente Risikomaß auch ein konvexes Risikomaß ist.

(b) *[3 Punkte]* Das entropische Risikomaß zum Parameter $\eta > 0$ ist für eine Finanzposition X mit $\mathbb{E}[e^{-\eta X}] < \infty$ gegeben durch

$$e_\eta(X) := \frac{1}{\eta} \ln \mathbb{E}[e^{-\eta X}].$$

Überprüfen Sie anhand der definierenden Eigenschaften, dass e_η ein monetäres, konvexes Risikomaß ist.

Hinweis: Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $X \in L^p, Y \in L^q$ gilt die Hölder'sche Ungleichung:

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}.$$

(c) *[7 Punkte]* Angenommen, eine Versicherungsgruppe mit Risikobudget B (Obergrenze für das Risikokapital) besteht aus n Tochtergesellschaften, die Versicherungsgeschäft betreiben. Die Basiseigenmittel der Tochtergesellschaften im Einjahreshorizont seien gegeben durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die konsolidierten Basiseigenmittel der Gruppe durch $X = X_1 + \ldots + X_n$.

Erläutern Sie, wie der Vorstand der Gruppe ein Limit- und Schwellenwertsystem für die Tochtergesellschaften etablieren kann, sodass bei einer Risikomessung mit einem subadditiven Risikomaß ρ das Risikobudget der Gruppe eingehalten wird. Welche Probleme können in der Praxis resultieren, wenn die Risikomessung hingegen mit dem Value at Risk erfolgt?

Lösungsskizze:

(a) (i) Werden Finanzpositionen $X \in \mathcal{X}$ mit Risiko $\rho(X) \leq 0$ als akzeptabel angesehen, so definiert $\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$ die Akzeptanzmenge von ρ. Das Risikomaß ρ kann umgekehrt aus der Akzeptanzmenge via

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}\} \tag{1}$$

rekonstruiert werden, da aufgrund der Cash-Invarianz gilt:

$$X + m \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X + m) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X) - m \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(X) \leq m.$$

Formel (1) erlaubt, monetäre Risikomaße mit Kapitalanforderungen zu assoziieren: $\rho(X)$ ist das kleinste Kapital, das zur Finanzposition X hinzugefügt werden muss, sodass X akzeptabel wird.

(ii) Konzeptionell könnte eine Aufsichtsbehörde zunächst spezifizieren, welche Finanzpositionen akzeptabel sind, und anschließend Kapitalanforderungen via (1) definieren. (Mathematisch ist die Akzeptanzmenge dazu mit bestimmten Eigenschaften auszustatten.)

(iii) Ein monetäres Risikomaß ρ ist kohärent, falls es zusätzlich folgende Eigenschaften besitzt:

1. *Subadditivität:* $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}$,
2. *Positive Homogenität:* $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$.

Subaddivität spiegelt wider, dass ökonomisch sinnvolle Diversifikation das Risiko reduziert, und ist zentral für wirksame Limit- und Schwellenwertsysteme in der Praxis: Durch Einhalten vorgegebener Schranken für Einzelrisiken kann auch das Risiko der Gesamtposition kontrolliert werden. Die positive Homogenität besagt, dass eine Erhöhung des Exposures das Risiko um denselben Faktor erhöht. Diese Eigenschaft kann jedoch bedingt durch Konzentrations- und Liquiditätsrisiken verletzt sein und ist insofern kritisch zu sehen.

Bemerkung: In der Definition kann Subadditivität durch Konvexität ersetzt werden:

$$\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha \rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{X},\ \alpha \in [0, 1].$$

In diesem Fall implizieren Konvexität im Spezialfall $\alpha = 0,5$ und positive Homogenität unmittelbar die Subadditivität. Umgekehrt folgt bei positiver Homogenität aus Subadditivität die Konvexität, siehe Teilaufgabe iv).

(iv) Ist das Risikomaß ρ kohärent, so gilt für alle $X, Y \in \mathcal{X}$ und jedes $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) &\leq \rho(\alpha X) + \rho((1-\alpha)Y) \quad \text{(Subadditivität)}, \\ &= \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y) \quad \text{(Positive Homogenität)}, \end{aligned}$$

d. h. das Funktional ρ ist konvex auf $\mathcal{X}$.

Bemerkung: Mit der alternativen Definition gilt die Aussage per Definition.

(b) Nachzuweisen sind drei Eigenschaften:

(A) *Inverse Monotonie:* $X \leq Y$ f. s. $\Rightarrow e_\eta(X) \geq e_\eta(Y)$

(B) *Cash-Invarianz:* Für $m \in \mathbb{R}$ gilt $e_\eta(X+m) = e_\eta(X) - m$.

(C) *Konvexität:* Für Finanzpositionen X, Y und $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$e_\eta(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha e_\eta(X) + (1-\alpha)e_\eta(Y).$$

zu (A): Es gilt $e^{-\eta X} \geq e^{-\eta Y}$ für $\eta > 0$. Aufgrund der Monotonie des Erwartungswerts und der Funktion $x \mapsto \frac{1}{\eta}\ln x$ folgt die Behauptung.

zu (B): Es gilt

$$e_\eta(X+m) = \frac{1}{\eta}\ln \mathbb{E}[e^{-\eta(X+m)}] = \frac{1}{\eta}\ln(\mathbb{E}[e^{-\eta X}]e^{-\eta m}) = e_\eta(X) - m$$

zu (C):

$$\begin{aligned} e_\eta(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \frac{1}{\eta}\ln \mathbb{E}[e^{-\eta(\alpha X + (1-\alpha)Y)}] = \frac{1}{\eta}\ln \mathbb{E}[e^{-\eta\alpha X}e^{-\eta(1-\alpha)Y}] \\ &\leq \frac{1}{\eta}\ln\left[\mathbb{E}[(e^{-\eta\alpha X})^{1/\alpha}]^{\alpha}\mathbb{E}[(e^{-\eta(1-\alpha)Y})^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}\right] \\ &= \alpha\frac{1}{\eta}\ln \mathbb{E}[e^{-\eta X}] + (1-\alpha)\frac{1}{\eta}\ln \mathbb{E}[e^{-\eta Y}] \\ &= \alpha e_\eta(X) + (1-\alpha)e_\eta(Y). \end{aligned}$$

(c) Anstatt auf Ebene der Tochtergesellschaften Mikromanagement zu betreiben, kann der Vorstand der Gruppe den Tochtergesellschaften auch individuelle Risikobudgets $B_1, \ldots, B_n$ mit $B_1 + \ldots + B_n = B$ zuweisen, d. h. die Tochtergesellschaften können das Geschäft autark steuern und müssen nur sicher stellen, dass für das individuelle Risiko $\rho(X_i) \leq B_i$ gilt.

Gilt nun $\rho(X_i) \leq B_i$, $i = 1, \ldots, n$, so impliziert die Subadditivität von ρ

$$\rho(X) \leq \rho(X_1) + \ldots + \rho(X_n) \leq B_1 + \ldots + B_n = B.$$

Ist das Risikomaß hingegen wie der Value at Risk nicht subadditiv, so kann das Risikobudget B der Gruppe überschritten werden, obwohl die Tochtergesellschaften die individuellen Risikobudgets B_i eingehalten haben. Ein dezentrale Steuerung im Kontext interner Modelle mit dem Value at Risk ist insofern nur bedingt sinnvoll.

Aufgabe 8. *[Markowitz-Ansatz, effiziente Portfolios] [18 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gegeben seien zwei Aktien mit zugehörigen Einperiodenrenditen R_1 und R_2. Das Präferenzfunktional des Investors (auf der Renditeebene) sei gegeben durch $U(R) = \mathbb{E}[R] - \gamma \cdot \mathrm{Var}(R)$. Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Investmentgewichte des optimalen (präferenzmaximalen) Portfolios aus den beiden Aktien! Die Investmentgewichte seien dabei nicht auf den Wertebereich $[0, 1]$ beschränkt.

Hinweis: Es genügt die Überprüfung der notwendigen Bedingung für Optimalität.

(b) *[14 Punkte]* Gegeben sei ein Markowitz-Basismodell mit drei riskanten Finanztiteln, deren Renditen R_1, R_2, R_3 unkorreliert sind und identische Renditevarianzen der Höhe $0,25$ besitzen. Die Renditeerwartungswerte der Finanztitel seien gegeben durch $\mathbb{E}[R_1] = 0,05$, $\mathbb{E}[R_2] = 0,1$ und $\mathbb{E}[R_3] = 0,15$. Es gibt keine Leerverkaufsbeschränkungen.

(i) *[11 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe eines Lagrange-Ansatzes die Investmentgewichte der (lokal) varianzminimalen Portfolios, die Menge der effizienten Portfolios sowie die Gleichung des effizienten Rands.

(ii) *[3 Punkte]* Visualisieren Sie Ihre Berechnungsergebnisse in einer Graphik.

Lösungsskizze:

(a) Im Zwei-Wertpapier-Fall gilt auf Basis der Investmentgewichte x bzw. $1 - x$, wobei $R = R(x) := xR_1 + (1-x)R_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R] &= x\mathbb{E}[R_1] + (1-x)\mathbb{E}[R_2] = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x \\
\mathrm{Var}(R) &= x^2\mathrm{Var}(R_1) + (1-x)^2\mathrm{Var}(R_2) + 2x(1-x)\mathrm{Cov}(R_1, R_2) \\
&= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12},
\end{aligned}$$

wobei $\sigma_{12} := \mathrm{Cov}(R_1, R_2)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
U(R) &= \mathbb{E}[R] - \gamma\mathrm{Var}(R) \\
&= \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x - \gamma\left[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}\right]
\end{aligned}$$

und

$$0 = dU(R)/dx = (\mu_1 - \mu_2) - 2\gamma\sigma_1^2 x + 2\gamma(1-x)\sigma_2^2 - 2\gamma\sigma_{12} + 4\gamma x\sigma_{12}.$$

Insgesamt folgt damit

$$x = \frac{2\gamma(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - (\mu_1 - \mu_2)}{4\gamma\sigma_{12} - 2\gamma(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}.$$

(b) (i) Es seien x_1, x_2, x_3 die Investmentgewichte für die drei Finanztitel. Die Lagrange-Funktion (Formulierung 2) zur Bestimmung des effizienten Rands lautet

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= t(0,05x_1+0,1x_2+0,15x_3) \\ &\quad -\frac{1}{2}(0,25x_1^2+0,25x_2^2+0,25x_3^2)-\lambda(x_1+x_2+x_3-1). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0,05t-0,25x_1-\lambda=0 & \Rightarrow x_1=0,2t-4\lambda \\ L_{x_2} &= 0,1t-0,25x_2-\lambda=0 & \Rightarrow x_2=0,4t-4\lambda \\ L_{x_3} &= 0,15t-0,25x_3-\lambda=0 & \Rightarrow x_3=0,6t-4\lambda \\ L_\lambda &= 1-x_1-x_2-x_3=0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Lösungen der ersten drei Gleichungen in die vierte ergibt $1,2t-12\lambda=1$. Hieraus folgt $\lambda=\frac{1}{10}t-\frac{1}{12}$. Dies führt zu

$$x_1=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}t,\ x_2=\tfrac{1}{3},\ x_3=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}t,$$

den Investmentgewichten der Minimum-Varianz-Portfolios.

Für den Erwartungswert und die Varianz dieser Portfolios berechnet man:

$$\begin{aligned} \mu &= \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{50}t \quad \text{bzw.} \quad t=50\mu-5, \\ \sigma^2 &= \tfrac{1}{50}t^2+\tfrac{1}{12}=50\mu^2-10\mu+\tfrac{7}{12}. \end{aligned}$$

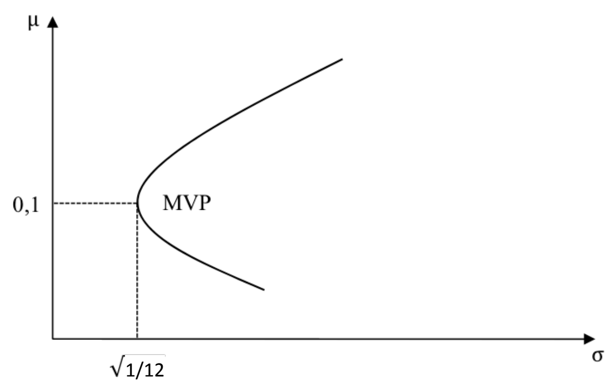
Damit ist die Menge M^* der effizienten Portfolio gegeben durch

$$M^*=\left\{(\sigma,\mu):\sigma^2=\tfrac{1}{50}t^2+\tfrac{1}{12},\ \mu=\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{50}t,\ t\geq 0\right\}.$$

Die Gleichung des effizienten Rands ergibt sich zu

$$\mu=\tfrac{1}{10}+\sqrt{\tfrac{1}{50}\left(\sigma^2-\tfrac{1}{12}\right)}.$$

(ii) Die resultierende Kurve der Minimum-Varianz-Portfolios ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



Der effiziente Rand entspricht dabei dem oberen Ast (inklusive global varianzminimalem Portfolio) dieser Kurve.

Aufgabe 9. *[CAPM-Gleichgewicht] [12 Punkte]*

Im Rahmen der CAPM-Modellwelt seien die beiden Wertpapierportfolios mit den Renditen R_1 und R_2 gemäß der Wertpapiermarktlinie korrekt bewertet. Die Erwartungswerte und Beta-Faktoren seien gegeben durch:

$$\mathbb{E}[R_1] = 0,08, \quad \beta_1 = 0,4,$$
$$\mathbb{E}[R_2] = 0,15, \quad \beta_2 = 1,2.$$

(a) *[4 Punkte]* Wie lautet die Wertpapiermarktlinie? Wie hoch sind der sichere Zins r_0 sowie die erwartete Rendite $\mathbb{E}[R_M]$ des Marktportfolios?

(b) *[2 Punkte]* Unterstellen Sie, dass auf dem Markt ein Wertpapierportfolio mit einer erwarteten Rendite von 15% und einem Beta-Faktor von $1,6$ existiert. Weist dieses Wertpapierportfolio eine Gleichgewichtsrendite auf?

(c) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen der Rendite eines Erwartungswert-Varianz-optimalen Portfolios und der Rendite R_M des Marktportfolios. Begründen Sie Ihre Aussage!

(d) *[3 Punkte]* Unterstellen Sie nun, dass für die Standardabweichung des Marktportfolios $\sigma(R_M) = 0,35$ gilt und dass das Portfolio mit der Rendite R_2 Erwartungswert-Varianz-optimal ist. Berechnen Sie die Standardabweichung von R_2!

Lösungsskizze:

(a) Aus der Gleichung für die Wertpapiermarktlinie ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$0,15 = r_0 + 1,2(\mathbb{E}[R_M] - r_0)$$
$$0,08 = r_0 + 0,4(\mathbb{E}[R_M] - r_0).$$

Hieraus resultiert zunächst $\mathbb{E}[R_M] - r_0 = 0,0875$ und weiter $r_0 = 0,045$ sowie $\mathbb{E}[R_M] = 0,1325$.

Die Wertpapiermarktlinie lautet somit:

$$\mathbb{E}[R] = 0,045 + 0,0875 \cdot \beta.$$

(b) Bei einem Beta von 1,6 ergibt sich im CAPM-Gleichgewicht

$$\mathbb{E}[R] = 0,045 + 0,0875 \cdot 1,6 = 0,185.$$

Relativ zur Gleichgewichtsrendite weist das Portfolio mithin eine zu geringe erwartete Rendite auf.

(c) Alle EV-optimalen Portfolios liegen im Rahmen des CAPM auf der Kapitalmarktlinie, d. h. einer Geraden mit positiver Steigung. Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein EV-optimales Portfolio mit Rendite R $\rho(R, R_M) = 1$ gilt.

(d) Die Menge aller optimalen Portfolios R ist gegeben durch die Kapitalmarktlinie

$$\mathbb{E}[R] = r_0 + \frac{\mathbb{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R) = 0,045 + \frac{0,0875}{0,35}\sigma(R) = 0,045 + 0,25\sigma(R).$$

Dies impliziert

$$\sigma(R_2) = 4(\mathbb{E}[R_2] - 0,045) = 4 \cdot 0,105 = 0,42.$$

Alternative Lösung:

Gemäß Aufgabenteil (c) muss $\rho(R_2, R_M) = 1$ gelten.

Aus $\beta_2 = 1,2$ resultiert dann

$$1,2 = \beta_2 = \frac{\mathrm{Cov}(R_2, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \frac{\rho(R_2, R_M)\sigma(R_2)}{\sigma(R_M)} = \frac{\sigma(R_2)}{0,35}$$

und damit

$$\sigma(R_2) = 0,42.$$