Schriftliche Prüfung im Grundwissen

Schadenversicherungsmathematik

gemäß Prüfungsordnung 3
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 19. Juni 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten. Sie enthält 8 Aufgaben und bei jeder Aufgabe sind 15 Punkte zu erreichen.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Christian Hipp, Martin Morlock,
Hanspeter Schmidli, Klaus D. Schmidt

Aufgabe 1 (Risikomodelle)

Eine Aktuarin soll das Risiko eines Kollektivs tarifieren, beim dem die jährliche Schadenzahl N und die Schadenhöhen X_k mit $k \in \mathbb{N}$ unabhängig sind und die durch

n	0	1	2	3	4
$P[N = n]$	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1

und

x	20	40	100	200
$P[X_k = x]$	0.2	0.2	0.2	0.4

gegebenen Verteilungen besitzen.
Berechnen Sie das Solvenzkapital, das heißt, das kleinste Kapital s mit

$$P\left[\sum_{k=1}^{N} X_k \leq s\right] \quad \geq \quad 0.99$$

Lösung: Sei

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

Die Bedingung $P[S \leq s] \geq 0.99$ ist gleichwertig mit der Bedingung

$$P[S > s] \leq 0.01$$

Wir bestimmen die größten Werte, die die Zufallsvariable S annehmen kann, und deren Wahrscheinlichkeiten.

– Nach Voraussetzung gilt

$$P[S > 800] = 0$$

– Der Wert 800 wird genau dann angenommen, wenn vier Schäden der Höhe 200 auftreten, und es gilt

$$\begin{aligned} P[S = 800] &= P[N = 4] \cdot (P[X = 200])^4 \\ &= 0.1 \times 0.4^4 \\ &= 0.00256 \end{aligned}$$

– Die nächstkleineren Werte 700, 640, 620 von S ergeben sich, wenn vier Schäden auftreten, von denen drei die Schadenhöhe 200 besitzen und einer die Schadenhöhe x mit $x \in \{20, 40, 100\}$ besitzt. Für alle $x \in \{20, 40, 100\}$ gilt

$$\begin{aligned} P[S = x] &= P[N = 4] \cdot \binom{4}{1} \cdot P[X = x] \cdot (P[X = 200])^3 \\ &= 0.1 \times 4 \times 0.2 \times 0.4^3 \\ &= 0.00512 \end{aligned}$$

– Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} P[S > 700] &= P[S = 800] \\ &= 0.00256 \\ &\leq 0.01 \\ P[S > 640] &= P[S \geq 700] \\ &= P[S = 700] + P[S = 800] \\ &= 0.00512 + 0.00256 \\ &= 0.00768 \\ &\leq 0.01 \\ P[S > 620] &= P[S \geq 640] \\ &= P[S = 640] + P[S \geq 700] \\ &= 0.00512 + 0.00768 \\ &= 0.01280 \\ &> 0.01 \end{aligned}$$

Daher gilt $s = 640$.

Aufgabe 2 (Risikomodelle)

Der Gesamtschaden X eines Risikos wird durch die Pareto–Verteilung mit den Parametern $\alpha \in (0, \infty)$ und $\beta \in (2, \infty)$ und den Tailwahrscheinlichkeiten

$$P[X > t] \;:=\; \left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^{\beta}$$

für $t \in [0, \infty)$ modelliert.

(a) In welcher Weise hängt der Variationskoeffizient dieser Verteilung vom Parameter α ab?
(5 Punkte)

(b) In welcher Weise hängt der Variationskoeffizient dieser Verteilung vom Parameter β ab?
(5 Punkte)

(c) Berechnen Sie für einen Versicherungsvertrag mit einem Selbstbehalt der Höhe $d \in (0, \infty)$ die Tailwahrscheinlichkeiten

$$P[(X - d)^{+} > t \mid X > d]$$

mit $t \in [0, \infty)$ und klären Sie die Abhängigkeit des zugehörigen Variationskoeffizienten von der Höhe des Selbstbehaltes.
(5 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\alpha}{\beta - 1} \\ \mathrm{var}[X] &= \frac{\alpha^2\beta}{(\beta-1)^2(\beta-2)} \end{aligned}$$

Für das Quadrat des Variationskoeffizienten gilt daher

$$\frac{\mathrm{var}[X]}{(E[X])^2} = \frac{\beta}{\beta - 2}$$

Daher hängt der Variationskoeffizient nicht vom Parameter α ab.

(b) Wegen

$$\frac{\beta}{\beta - 2} = 1 + \frac{2}{\beta - 2}$$

ist der Variationskoeffizient monoton fallend in β.

(c) Für alle $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} P[(X-d)^+ > t \mid X > d] &= P[X - d > t \mid X > d] \\ &= P[X > d + t \mid X > d] \\ &= \frac{P[X > d + t]}{P[X > d]} \\ &= \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha + d + t}\right)^\beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha + d}\right)^\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha + d}{\alpha + d + t}\right)^\beta \end{aligned}$$

Nach (a) hängt der zugehörige Variationskoeffizient nicht von der Höhe des Selbstbehaltes ab.

Aufgabe 3 (Tarifierung)

Für einen Versicherungsvertrag sei die Anzahl N der Schäden binomialverteilt mit den Parametern 3 und 0.2 und die Schadenhöhen X_k seien identisch verteilt mit

x	1	2	3	4
$P[X_k = x]$	0.4	0.3	0.2	0.1

Dabei wird angenommen, dass die Annahmen des kollektiven Modells erfüllt sind.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie.
(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie für den Gesamtschaden S und $s \in \{0, 1, 2\}$ die Wahrscheinlichkeiten $P[S = s]$.
(6 Punkte)

(c) Es wird erwogen, eine Beitragsrückerstattung der Höhe 1 zu gewähren, wenn die Höhe des Gesamtschadens 0, 1 oder 2 ist. Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall der Einführung dieser Beitragsrückerstattung.
(3 Punkte)

(d) Halten Sie diese Beitragsrückerstattung für ökonomisch sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Der Gesamtschaden des Versicherungsvertrags ist durch die Zufallsvariable

$$S \;:=\; \sum_{j=1}^{N} X_j$$

gegeben. Es gilt $E[N] = 3 \times 0.2 = 0.6$ und $E[X] = 2$. Daraus ergibt sich die Nettorisikoprämie

$$E[S] \;=\; E[N] \cdot E[X] \;=\; 0.6 \times 2 \;=\; 1.2$$

(b) Für alle $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt

$$P[N = k] \;=\; \binom{3}{k} \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{3-k}$$

und damit

k	0	1	2	3
$P[N = k]$	0.512	0.384	0.096	0.008

Wegen

$$P[S = s] \;=\; \sum_{k=0}^{3} P[N = k] \cdot P\left[\sum_{j=1}^{k} X_j = s\right]$$

ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
P[S = 0] &= P[N = 0] \\
&= 0.512 \\
P[S = 1] &= P[N = 1] \cdot P[X_1 = 1] \\
&= 0.384 \times 0.4 \\
&= 0.1536 \\
P[S = 2] &= P[N = 1] \cdot P[X_1 = 2] + P[N = 2] \cdot P[X_1 + X_2 = 2] \\
&= P[N = 1] \cdot P[X_1 = 2] + P[N = 2] \cdot P[X_1 = 1] \cdot P[X_2 = 1] \\
&= 0.384 \times 0.3 + 0.096 \times 0.4 \times 0.4 \\
&= 0.13056
\end{aligned}$$

(c) Bei Einführung der Beitragsrückerstattung ist die Versicherungsleistung durch die Zufallsvariable

$$T \;:=\; \chi_{\{S \le 2\}} + S$$

gegeben. Wegen

$$\begin{aligned}
P[S \le 2] &= P[S = 0] + P[S = 1] + P[S = 2] \\
&= 0.512 + 0.1536 + 0.13056 \\
&= 0.79616
\end{aligned}$$

ergibt sich die Nettorisikoprämie

$$\begin{aligned} E[T] &= E[\chi_{\{S \leq 2\}}] + E[S] \\ &= P[S \leq 2] + E[S] \\ &= 0.79616 + 1.2 \\ &= 1.99616 \end{aligned}$$

(d) Die Einführung der Beitragsrückerstattung ist vor allem aus folgenden Gründen ungeeignet:

- Durch die Beitragsrückerstattung erhöht sich die Nettorisikoprämie um $E[\chi_{\{S \leq 2\}}] = 0.79616$. Dieser Erhöhung steht mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.79616 eine Beitragsrückerstattung der Höhe 1 gegenüber.
- Durch die Beitragsrückerstattung erhöht sich der Erwartungswert der Anzahl der Zahlungsvorgänge von $E[N] = 0.6$ für Schadenzahlungen um 0.79616 für die separat zu leistenden Beitragsrückerstattungen. Der Auszahlungsaufwand steigt damit auf mehr als das Doppelte.

Aufgabe 4 (Tarifierung)

Das Bonus–Malus–System eines Versicherungsunternehmens hat die drei Klassen 0, 1 und 2. Einstiegsklasse ist die Klasse 0 mit der Basisprämie BP. Bei einem schadenfreien Verlauf wird ein Versicherungsnehmer im Folgejahr eine Klasse höher eingestuft oder er bleibt in der höchsten Klasse 2. Im Schadenfall wird er im Folgejahr in die Klasse 0 eingestuft.

Dem Versicherungsunternehmen ist bekannt, dass sein Kollektiv zu 70% aus Versicherungsnehmern des Typs A und zu 30% aus Versicherungsnehmern des Typs B besteht. Ein Versicherungsnehmer des Typs A bleibt im Laufe eines Jahres mit der Wahrscheinlichkeit 0.8 schadenfrei; ein Versicherungsnehmer des Typs B mit der Wahrscheinlichkeit 0.6.

Die Schadenereignisse treten unabhängig voneinander auf. Im Schadenfall ist der Jahresgesamtschaden eines Versicherungsnehmers gleich 2000.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert ES des Schadenbedarfs eines Versicherungsnehmers ohne Berücksichtigung seiner individuellen Schadenerfahrung.
(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Verteilung der Versicherungsnehmer des Typs A und die der Versicherungsnehmer des Typs B auf die Klassen 0, 1 und 2 zwei Jahre nach ihrem Einstieg in die Klasse 0. Diese Verteilungen sind stationär, d.h., sie ändern sich in den Folgejahren nicht mehr.
(3 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im stationären Fall ein Versicherungsnehmer vom Typ A bzw. B ist, falls er sich in der Klasse 0 befindet.
(3 Punkte)

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert ES_0 des Schadenbedarfs eines Versicherungsnehmers, der sich im stationären Fall in der Klasse 0 befindet.
(1 Punkt)

(e) Berechnen Sie die Basisprämie BP im stationären Fall, falls Versicherungsnehmern

– in der Klasse 0 keine Ermäßigung,
– in der Klasse 1 eine Ermäßigung von 10% und
– in der Klasse 2 eine Ermäßigung von 20% auf die Basisprämie

gewährt wird.
(4 Punkte)

(f) Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Erwartungswert ES_0 des Schadenbedarfs in der Klasse 0 und der Basisprämie BP.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Für den Erwartungswert des Schadenbedarfs im Kollektiv gilt

$$ES = 2000 \times \Big(0.2 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3\Big) = 520$$

(b) Für den Risikotyp A ergibt sich aus der Übergangsmatrix und der Anfangsverteilung $(\,1 \quad 0 \quad 0\,)^T$

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.16 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

und für den Risikotyp B ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.40 \\ 0.24 \\ 0.36 \end{pmatrix}$$

(c) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer, der sich im stationären Fall in der Klasse 0 befindet, vom Risikotyp A ist, gilt

$$P[A|0] = \frac{P[0|A]\,P[A]}{P[0|A]\,P[A] + P[0|B]\,P[B]} = \frac{0.20 \times 0.7}{0.20 \times 0.7 + 0.40 \times 0.3} = 0.54$$

und für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass er vom Risikotyp B ist, gilt

$$P[B|0] = 1 - P[A|0] = 1 - 0.54 = 0.46$$

(d) Es gilt

$$ES_0 = 2000 \times \Big(0.20 \times 0.54 + 0.40 \times 0.46\Big) = 584$$

(e) Die Basisprämie ergibt sich aus der Darstellung des erwarteten Schadenbedarfs als gewichtetes Mittel der Prämien in den drei Klassen. Es gilt

$$\begin{aligned} 520 &= ES \\ &= \Big(0.20 \times 0.7 + 0.40 \times 0.3\Big) \times BP \\ &\quad + \Big(0.16 \times 0.7 + 0.24 \times 0.3\Big) \times (1 - 0.1) \times BP \\ &\quad + \Big(0.64 \times 0.7 + 0.36 \times 0.3\Big) \times (1 - 0.2) \times BP \\ &= 0.8704 \times BP \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich die Basisprämie

$$BP = 597.43$$

(f) Versicherungsnehmer in der Klasse 0 zahlen die Basisprämie BP, und diese ist höher als die risikogerechte Nettorisikoprämie ES_0. Aufgrund des Äquivalenzprinzips für das Kollektiv muss daher in mindestens einer der höheren Klassen die rabattierte Basisprämie niedriger sein als die risikogerechte Nettorisikoprämie für diese Klasse.

Aufgabe 5 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2016 bis 2019 die Schadenstände der Abwicklungsjahre 0 bis 3 sowie die Prämien:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2016	300	480	600	720	750
2017	280	420	570		750
2018	320	450			750
2019	300				750

(a) Berechnen Sie die Chain–Ladder Faktoren.
(2 Punkte)

(b) Schätzen Sie alle Endschadenstände mit dem Chain–Ladder Verfahren.
(3 Punkte)

(c) Beurteilen Sie auf der Grundlage der Ergebnisse aus (b) die Annahme, dass eine anfalljahrunabhängige Endschadenquote vorliegt.
(2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die additiven Schadenquotenzuwächse und die additive Endschadenquote.
(6 Punkte)

(e) Schätzen Sie den Endschadenstand für 2018 mit dem additiven Verfahren.
(2 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\varphi_3^{\mathrm{CL}} &= \frac{720}{750} = 1.20 \\
\varphi_2^{\mathrm{CL}} &= \frac{600+570}{480+420} = 1.30 \\
\varphi_1^{\mathrm{CL}} &= \frac{480+420+450}{300+280+320} = 1.50
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
S_{2016,3}^{\mathrm{CL}} &= S_{2016,3} \\
&= 720 \\
S_{2017,3}^{\mathrm{CL}} &= S_{2017,2} \cdot \varphi_3^{\mathrm{CL}} \\
&= 570 \times 1.20 \\
&= 684 \\
S_{2018,3}^{\mathrm{CL}} &= S_{2018,1} \cdot \varphi_2^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_3^{\mathrm{CL}} \\
&= 450 \times 1.30 \times 1.20 \\
&= 702 \\
S_{2019,3}^{\mathrm{CL}} &= S_{2019,0} \cdot \varphi_1^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_2^{\mathrm{CL}} \cdot \varphi_3^{\mathrm{CL}} \\
&= 300 \times 1.50 \times 1.30 \times 1.20 \\
&= 702
\end{aligned}
$$

(c) Die individuellen Endschadenquoten

$$
\begin{aligned}
S_{2016,3}^{\mathrm{CL}}/\pi_{2016} &= 720/750 = 0.960 \\
S_{2017,3}^{\mathrm{CL}}/\pi_{2017} &= 684/750 = 0.912 \\
S_{2018,3}^{\mathrm{CL}}/\pi_{2018} &= 702/750 = 0.936 \\
S_{2019,3}^{\mathrm{CL}}/\pi_{2019} &= 702/750 = 0.936
\end{aligned}
$$

sind recht ähnlich. Dies spricht für die Annahme einer anfalljahrunabhängigen Endschadenquote.

(d) Aus dem Abwicklungsdreieck für Schadenstände erhält man das folgende Abwicklungsdreieck für Zuwächse:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2016	300	180	120	120	750
2017	280	140	150		750
2018	320	130			750
2019	300				750

Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_3^{\mathrm{AD}} &= \frac{120}{750} = 0.16 \\
\zeta_2^{\mathrm{AD}} &= \frac{120+150}{750+750} = 0.18 \\
\zeta_1^{\mathrm{AD}} &= \frac{180+140+130}{750+750+750} = 0.20 \\
\zeta_0^{\mathrm{AD}} &= \frac{300+280+320+300}{750+750+750+750} = 0.40
\end{aligned}$$

und damit

$$\kappa^{\mathrm{AD}} = \zeta_0^{\mathrm{AD}} + \zeta_1^{\mathrm{AD}} + \zeta_2^{\mathrm{AD}} + \zeta_3^{\mathrm{AD}} = 0.40 + 0.20 + 0.18 + 0.16 = 0.94$$

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}
S_{2018,3}^{\mathrm{AD}} &= S_{2018,1} + \zeta_2^{\mathrm{AD}} \cdot \pi_{2018} + \zeta_3^{\mathrm{AD}} \cdot \pi_{2018} \\
&= 450 + (0.18 + 0.16) \times 750 \\
&= 705
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Reservierung)

Die folgende Tabelle enthält für die Anfalljahre 2016 bis 2019 die Schadenstände der Abwicklungsjahre 0 bis 3 und die Prämien sowie externe Schätzer für das Abwicklungsmuster für Quoten:

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2016				510	535
2017			504		600
2018		540			700
2019	366				800
γ_k^{extern}	0.50	0.75	0.90	1	

(a) Schätzen Sie die Reserven für 2018 und 2022 mit dem Loss–Development Verfahren.
(4 Punkte)

(b) Berechnen sie die Cape–Cod Endschadenquote.
(2 Punkte)

(c) Schätzen Sie die Reserven für 2018 und 2022 mit dem Cape–Cod Verfahren.
(4 Punkte)

(d) Erklären Sie die Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus (a) und (c).
(2 Punkte)

(e) Nehmen Sie an, dass die Werte 504 und 540 versehentlich vertauscht wurden. Auf welche der vorher betrachteten Schätzer von Reserven wirkt sich diese Vertauschung aus, und auf welche nicht?
(3 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
S^{\text{LD}}_{2018,3} &= S_{2018,1}/\gamma^{\text{extern}}_1 &&= 540/0.75 &&= 720 \\
S^{\text{LD}}_{2019,3} &= S_{2019,0}/\gamma^{\text{extern}}_0 &&= 366/0.50 &&= 732 \\
S^{\text{LD}}_{2019,2} &= \gamma^{\text{extern}}_2 \cdot S_{2019,0}/\gamma^{\text{extern}}_0 &&= 0.90 \times 732 &&= 658.80
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
R^{\text{LD}}_{2018} &= S^{\text{LD}}_{2018,3} - S_{2018,1} &&= 720 - 540 &&= 180 \\
R^{\text{LD}}_{(2022)} &= S^{\text{LD}}_{2019,3} - S^{\text{LD}}_{2019,2} &&= 732 - 658.80 &&= 73.20
\end{aligned}$$

(b) Für die verbrauchten Prämien erhält man

Anfall-jahr i	**Abwicklungsjahr** k 0	1	2	3	**Prämie** π_i
2016				535	535
2017			540		600
2018		525			700
2019	400				800
γ^{extern}_k	0.50	0.75	0.90	1	

und damit die Cape–Cod Endschadenquote

$$\kappa^{\text{CC}} = \frac{366 + 540 + 504 + 510}{400 + 525 + 540 + 535} = 0.96$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
S^{\text{CC}}_{2018,3} &= S_{2018,1} + (\gamma^{\text{extern}}_3 - \gamma^{\text{extern}}_1) \cdot \kappa^{\text{CC}} \cdot \pi_{2018} \\
&= 540 + (1 - 0.75) \times 0.96 \times 700 \\
&= 708 \\
S^{\text{CC}}_{2019,3} &= S_{2019,0} + (\gamma^{\text{extern}}_3 - \gamma^{\text{extern}}_0) \cdot \kappa^{\text{CC}} \cdot \pi_{2019} \\
&= 366 + (1 - 0.50) \times 0.96 \times 800 \\
&= 750 \\
S^{\text{CC}}_{2019,2} &= S_{2019,0} + (\gamma^{\text{extern}}_2 - \gamma^{\text{extern}}_0) \cdot \kappa^{\text{CC}} \cdot \pi_{2019} \\
&= 366 + (0.90 - 0.50) \times 0.96 \times 800 \\
&= 673.20
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
R^{\text{CC}}_{2018} &= S^{\text{CC}}_{2018,3} - S_{2018,1} &&= 708 - 540 &&= 168 \\
R^{\text{CC}}_{(2022)} &= S^{\text{CC}}_{2019,3} - S^{\text{CC}}_{2019,2} &&= 750 - 673.20 &&= 76.80
\end{aligned}$$

(d) Die Ergebnisse deuten auf einen Ausreißer im Jahr 2018 hin. Der Ausreißereffekt wird durch das Cape–Cod Verfahren im betroffenen Jahr 2018 gedämpft und im Jahr 2019 teilweise kompensiert.

(e) Beim Loss–Development Verfahren wirkt sich die Vertauschung nur auf die Prädiktoren der zukünftigen Schadenstände und Zuwächse der Jahre 2017 und 2018 und auf die Prädiktoren der von diesen Zuwächsen abhängigen Reserven aus. Der Prädiktor der Reserve für 2022 ist von der Vertauschung daher nicht betroffen.
Beim Cape–Cod Verfahren wirkt sich die Vertauschung nur auf die Prädiktoren der zukünftigen Schadenstände der Jahre 2017 und 2018 aus. Die Cape–Cod Endschadenquote ändert sich jedoch nicht. Daher sind die Prädiktoren der zukünftigen Zuwächse und Reserven von der Vertauschung nicht betroffen.

Aufgabe 7 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität M_{XL} und Limit L_{XL} zahlt bei einem Einzelschaden der Höhe X den Betrag

$$\tilde{X} \quad := \quad \min\Big\{\max\{X - M_{\mathrm{XL}}, 0\}, L_{\mathrm{XL}}\Big\}$$

Eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität M_{SL} und Limit L_{SL} zahlt bei einem Gesamtschaden der Höhe S den Betrag

$$\tilde{S} \quad := \quad \min\Big\{\max\{S - M_{\mathrm{SL}}, 0\}, L_{\mathrm{SL}}\Big\}$$

Ein Erstversicherer hat für einen Bestand eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M_{\mathrm{XL}} = 1000$ und Limit $L_{\mathrm{XL}} = 1000$ und eine Stop–Loss Rückversicherung mit Priorität $M_{\mathrm{SL}} = 5000$ und Limit $L_{\mathrm{SL}} = 10000$ abgeschlossen.

(a) Wie viele Einzelschäden der Höhe 2500 kann der Erstversicherer mit einer Reserve von 5000 und den Leistungen der beiden Rückversicherer bezahlen?
(5 Punkte)

(b) Wie hoch muss die Reserve des Erstversicherers sein, damit er zusammen mit den Leistungen der beiden Rückversicherer fünf Schäden der Höhe 5000 bezahlen kann?
(5 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass eine Reserve von 5000 zusammen mit den Leistungen der beiden Rückversicherer reicht, damit der Erstversicherer k Schäden der (gleichen) Höhe $x > 2000$ bezahlen kann, wenn

$$k \quad \leq \quad \frac{15000}{x - 1000}$$

gilt.
(5 Punkte)

Lösung:

(a) Für jeden Einzelschaden der Höhe 2500 verbleibt nach der Schadenexzedentenrückversicherung eine Haftung des Erstversicherers in Höhe von 1500. Aus der Reserve von 5000 und der maximalen Leistung der Stop–Loss Rückversicherung in Höhe von 10000 ergibt sich, dass der Erstversicherer zehn Schäden der Höhe 2500 bezahlen kann.

(b) Für jeden Einzelschaden der Höhe 5000 verbleibt nach der Schadenexzedentenrückversicherung eine Haftung des Erstversicherers in Höhe von 4000. Der Erstversicherer benötigt daher 20000, um fünf Schäden der Höhe 5000 bezahlen zu können. Da aus der Stop–Loss Rückversicherung maximal 10000 zur Verfügung stehen, benötigt der Erstversicherer eine Reserve von 10000.

(c) Für jeden Einzelschaden der Höhe x verbleibt nach der Schadenexzedentenrückversicherung eine Haftung des Erstversicherers in Höhe von $x - 1000$. Aus der Reserve von 5000 und der maximalen Leistung der Stop–Loss Rückversicherung in Höhe von 10000 ergibt sich für die Anzahl k der Schäden der Höhe x, die der Erstversicherer bezahlen kann, die Bedingung $k\,(x - 1000) \leq 15000$.

Aufgabe 8 (Risikoteilung und Rückversicherung)

Eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität M und Limit L zahlt bei einem Einzelschaden der Höhe X den Betrag

$$\tilde{X} \;:=\; \min\{\max\{X - M, 0\}, L\}$$

Ein Versicherungsbestand wird durch das kollektive Modell $\langle N, \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$ mit dem Gesamtschaden

$$S \;:=\; \sum_{k=1}^{N} X_k$$

modelliert, bei dem die Schadenzahl N die Negativbinomialverteilung mit

$$P[N = n] \;:=\; 0.8 \times 0.2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt und die Schadenhöhen die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1000]$ besitzen.

(a) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Versicherungsbestand.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M = 200$ und Limit $L = 800$ besteht.
(5 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Nettorisikoprämie für den Fall, dass bei jedem Schaden der Versicherungsnehmer, der den Schaden verursacht, einen Eigenanteil bis zu 100 selbst bezahlen muss, und dass eine Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M = 200$ und Limit $L = 800$ besteht.
(5 Punkte)

Lösung:

(a) Für die Schadenzahl N liegt die Negativbinomialverteilung mit den Parametern 1 und 0.2 vor. Daher gilt

$$E[N] \quad = \quad \frac{0.2}{0.8} \quad = \quad 0.25$$

Außerdem gilt $E[X] = 500$. Daraus ergibt sich

$$E[S] \quad = \quad E[N] \cdot E[X] \quad = \quad 0.25 \times 500 \quad = \quad 125$$

(b) Bei einer Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M = 200$ und Limit $L = 800$ trägt der Rückversicherer von jeder Schadenhöhe X den Betrag

$$\begin{aligned} X' &:= \min\{\max\{X - 200, 0\}, 800\} \\ &= \max\{X - 200, 0\} \end{aligned}$$

Daher liegen 20% der Masse der Verteilung von X' im Punkt 0 und 80% der Masse sind gleichverteilt auf dem Intervall $(0, 800]$. Daher gilt

$$E[X'] \quad = \quad 0.2 \times 0 + 0.8 \times 400 \quad = \quad 320$$

Für die Zufallsvariable

$$S' \quad := \quad \sum_{k=1}^{N} X'_k$$

folgt daraus

$$E[S'] \quad = \quad E[N] \cdot E[X'] \quad = \quad 0.25 \times 320 \quad = \quad 80$$

(c) Bei einem Eigenanteil in Höhe von maximal 100 und in einer Schadenexzedentenrückversicherung mit Priorität $M = 200$ und Limit $L = 800$ trägt der Rückversicherer von jeder Schadenhöhe X den Betrag

$$\begin{aligned} X'' &:= \min\{\max\{\max\{X - 100, 0\} - 200, 0\}, 800\} \\ &= \min\{\max\{\max\{X - 300, -200\}, 0\}, 800\} \\ &= \max\{X - 300, 0\} \end{aligned}$$

Daher liegen 30% der Masse der Verteilung von X'' im Punkt 0 und 70% der Masse sind gleichverteilt auf dem Intervall $(0, 700]$. Daher gilt

$$E[X''] \quad = \quad 0.3 \times 0 + 0.7 \times 350 \quad = \quad 245$$

Für die Zufallsvariable

$$S'' \quad := \quad \sum_{k=1}^{N} X''_k$$

folgt daraus

$$E[S''] \quad = \quad E[N] \cdot E[X''] \quad = \quad 0.25 \times 245 \quad = \quad 61.25$$