DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Oktober 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 27 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Portfoliotheorie und -management: Faktormodelle] [10 Punkte]*

Zur Evaluation des Assetmanagements sollen die monatlichen Renditen r_A eines Fonds mithilfe eines Regressionsmodells der Gestalt

$$r_A - r_f = \alpha + \sum_{j=1}^{3} \beta_j F_j + \varepsilon$$

untersucht werden, wobei r_f den risikofreien Zins, α eine Konstante, F_j die erklärenden Faktoren und ε eine normalverteilte Fehlergröße mit Erwartungswert 0 bezeichnen.

Nach Kalibrierung an 36 Monatsdaten liefert

- das CAPM mit dem einzigen Faktor F_1 der Überrenditen des Marktportfolios die Schätzwerte $\hat{\alpha} = 0,46\%$, $\hat{\beta}_1 = 0,93$, ein R^2 von 89% und einen p-Wert von 0,0117 der Teststatistik für die Hypothese $\alpha = 0$,
- das Fama-French-Dreifaktormodell die Schätzwerte $\hat{\alpha} = 0,22\%$, $\hat{\beta}_1 = 0,99$, $\hat{\beta}_2 = 0,36$, $\hat{\beta}_3 = 0,22$, ein R^2 von 93% und einen p-Wert von 0,1394 der Teststatistik für die Hypothese $\alpha = 0$.

Entscheiden Sie auf Basis einer vergleichenden Analyse der Ergebnisse beider Modelle, ob das aktive Management des Fonds zu einer signifikanten Steigerung der Rendite des Fonds geführt hat.

Lösungsskizze:

Auf Grund des kleinen p-Wertes des Tests der Hypothese $\alpha = 0$ und des Schätzwertes für α legt das CAPM die Schlussfolgerung eines erfolgreichen aktiven Assetmanagements nahe. Der Schätzwert $\hat{\alpha}$ fällt im Dreifaktormodell deutlich niedriger aus, und der hohe p-Wert des Test der Hypothese $\alpha = 0$ gibt Anlass, den positiven Schätzwert als zufälliges Ergebnis und nicht als Beleg für ein erfolgreiches Assetmanagement zu betrachten. Nun fällt das R^2 des Dreifaktormodells höher aus, d. h. die Variabilität der insgesamt erzielten Überrendite wird im Dreifaktormodell besser als im CAPM erklärt. D. h., ein Teil des im CAPM ausgewiesenen Schätzwertes für α lässt sich durch die beiden anderen Faktoren F_2 und F_3 erklären. Daher liegt hier kein signifikanter positiver Einfluss des aktiven Assetmanagements vor.

Aufgabe 2. *[Portfoliotheorie und -management: Internationale Investments und Sicherungsstrategien] [20 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* (Internationale Investments und Währungsexposure)

(i) *[5 Punkte]* Für die beiden Währungen W1 und W2 besteht aktuell der folgende Zusammenhang:

i_{W1}	i_{W2}	S	F
0,80%	2,75%	$1,1000 \cdot \frac{W2}{W1}$	$1,1274 \cdot \frac{W2}{W1}$

Hierbei bezeichnen i_{W1} sowie i_{W2} den Periodenzins in den Währungen W1 bzw. W2, S den aktuellen Wechselkurs und F den Forwardkurs für den Wechselkurs am Periodenende. Beschreiben Sie eine Handelsstrategie, mit der ein Arbitragegewinn erzielt werden kann.

(ii) *[4 Punkte]* Wie hoch ist der Gewinn der unter (i) beschriebenen Handelsstrategie, wenn ein Marktteilnehmer in jeder Währung jeweils 100 Geldeinheiten Kredit aufnehmen darf?

(iii) *[3 Punkte]* Passen Sie den Forwardkurs F und die Forwardprämie f unter (ii) so an, dass keine Arbitragemöglichkeit mehr existiert.

(b) *[8 Punkte]* (Sicherungsstrategien für Portfolios)

Betrachten Sie ein Portfolio mit Anfangswert $V_0 = 100$ in $t = 0$, für welches eine CPPI-Strategie mit dem Multiplikator $m = 3$ und konstantem Floor $F_3 = 80$ umgesetzt wird. Die Wertentwicklung des riskanten Assets ist gegeben durch:

t	0	1	2	3
S_t	3120	3276	3538	3680

(i) *[3 Punkte]* Wie groß ist der Aktienanteil bei Fondsauflage, wenn der risikolose Zins $i = -0,5\%/+1\%/+3\%$ beträgt? Geben Sie *kurz* eine Begründung für den Zusammenhang zwischen der Höhe des risikolosen Zinssatzes und dem Aktienanteil.

(ii) *[5 Punkte]* Der risikolose Zins beträgt $i = 1\%$. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, sodass die fehlenden Werte aus der Umsetzung der CPPI-Strategie folgen.

t	S_t Wertentwicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Umschichtung	B_{t+1} vor Umschichtung
0	-	100						
1	5%							
2	8%							
3	4%		80	-	-	-	-	-

Hierbei sind V_t das Vermögen, F_t der diskontierte Floor, CU_t der Risikopuffer, E_t das Exposure in der risikobehafteten Assetklasse sowie B_t der Anteil in der risikolosen Assetklasse zum Zeitpunkt t.

Lösungsskizze:

(a) (i) $t = 0$:

- Kreditaufnahme in Höhe von K in W2 zum Periodenzins 2,75%
- Abschluss eines Devisenforwards zum Kurs F und Nominalbetrag

$$\frac{K}{S} \cdot (1 + 0,80\%)$$

- Tausch des Kreditbetrags in W1 zu $\frac{1}{1{,}1000} \cdot \frac{\text{W1}}{\text{W2}}$ und Anlage zum Periodenzins 0,80%

$t = 1$:

- Rücktausch des Investments in die Währung W2 zu F und Tilgung des Kredits $K \cdot (1 + 2,75\%)$

(ii) t=0:

- Kreditaufnahme: 100 W2
- Abschluss Devisenforward zum Kurs $F = 1,1274 \frac{\text{W2}}{\text{W1}}$ und Nominalbetrag $\frac{100}{1{,}1000} \cdot (1 + 0,80\%) = 91,6364 \cdot \text{W1}$

$t = 1$:

- Anlageergebnis in W1: $\frac{100}{1{,}1000} \cdot (1 + 0,80\%) = 91,6364\,\text{W1}$
- Rücktausch des Investments in W2: $91,6364 \cdot 1,1274 = 103,3137\,\text{W2}$
- Tilgung des Kredits: $100 \cdot (1 + 2,75\%) = 102,7500\,\text{W2}$
- Gewinn: $103,3137\,\text{W2} - 102,7500\,\text{W2} = 0,5637\,\text{W2}$

(iii) Es gilt:

$$(1+i_{\text{Inland}}) = \frac{F}{S}(1+i_{\text{Ausland}}) \quad \Leftrightarrow \quad F = S \cdot \frac{1+i_{\text{Inland}}}{1+i_{\text{Ausland}}} = 1,1000 \cdot \frac{1{,}0275}{1{,}0080} = 1,1213 \frac{\text{W2}}{\text{W1}},$$

$$f = \frac{1+i_{\text{Inland}}}{1+i_{\text{Ausland}}} - 1 = \frac{1{,}0275}{1{,}0080} - 1 = 1,93\%.$$

(b) (i)

i	F_0	C_0	E_0
-0,5%	81,21	18,79	56,36
1,0%	77,65	22,35	67,06
2,0%	73,21	26,79	80,37

Je geringer der risikolose Zins ist, desto schwächer wird der Floor diskontiert. Bei negativen Zinsen wird der Floor sogar aufgezinst. Da sich die Aktienanlage aus der Differenz von aktuellem Vermögen und diskontiertem Floor ergibt, fällt diese bei niedrigen Zinsen kleiner aus als bei hohen Zinsen ($C = V - F$).

(ii)

t	S_t Wertentwicklung	V_t	F_t	CU_t	E_t	B_t	E_{t+1} vor Umschichtung	B_{t+1} vor Umschichtung
0	-	100,00	77,65	22,35	67,05	32,95	70,40	33,28
1	5%	103,68	78,42	25,26	75,78	27,90	81,84	28,18
2	8%	110,02	79,21	30,81	92,43	17,59	96,13	17,77
3	4%	113,90	80,00	-	-	-	-	-

Aufgabe 3. *[Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Ordnen Sie den folgenden Grafiken, die das Marktwertverhalten (y-Achse) gewisser Finanztitel bezüglich paralleler Zinskurvenänderungen (x-Achse) beschreiben, den aufgelisteten Typen von Fixed Income Produkten zu. Nennen Sie stichpunktartig eine Begründung pro Zuordnung.

[1] CMS-Floater mit Multiplikator und Cap

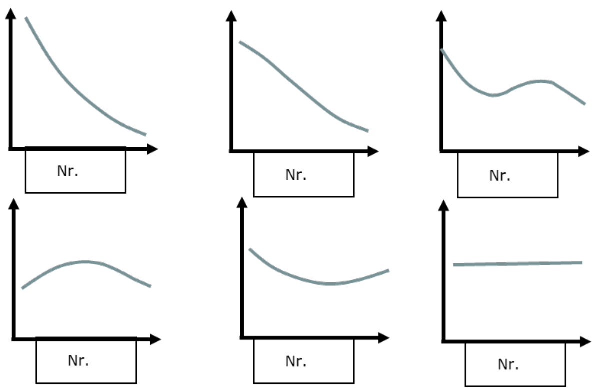
[2] Callable

[3] CMS-Floater mit Multiplikator und Floor

[4] Plain Vanilla Bond

[5] Floater mit Multiplikator 1

[6] CMS-Floater mit Multiplikator, Cap und Floor



(b) *[6 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Sie arbeiten im Risikomanagement für ein Sachversicherungsunternehmen. Ihr Vorstand möchte das Zinsrisiko der Eigenmittel reduzieren. Dabei verringern sich die Eigenmittel momentan bei einem parallelen Absinken der Zinskurve. Sie schlagen eine Umschichtung innerhalb des Bondbestandes vor. Der Marktwert des Bondportfolios soll dabei ungefähr konstant gehalten werden. Beschreiben Sie qualitativ Ihren Vorschlag zur Reduzierung des Zinsrisikos. Welche Titel müssen gekauft, welche verkauft werden? Was passiert dann mit dem Zinsrisiko der Kapitalanlagen?

(ii) *[4 Punkte]* Ihr Vorstand besteht darauf ein Durationsmatching der Aktiv- und Passivseite durchzuführen.

I. Schreiben Sie die allgemeinen Gleichungen auf, die dazu gelöst werden müssen, wenn Sie 1. innerhalb des Bondbestandes umschichten und 2. den Bondbestand erhöhen/ verringern können und die Differenz mit Cash (effektive Duration=0) ausgleichen. Gehen Sie bei 1. davon aus, dass die zu verkaufenden Bonds eine Duration von D_V und einen festen Marktwert von MV_V besitzen.

II. Es seien folgende Werte gegeben:

Marktwert der Passivseite = 900 Mio. €
Marktwert der Aktivseite = 1000 Mio. €
effektive Duration der Passivseite = 15
effektive Duration der Aktivseite = 11

Sie können 5-jährige französische Staatsanleihen mit effektiver Duration von 4,5 und 30-jährige französische Staatsanleihen mit effektiver Duration von 25 in beliebigen Volumina kaufen. Sie sollen sich für einen der beiden Titel entscheiden. Um die Käufe zu finanzieren, haben Sie 120 Mio. € Cash (effektive Duration=0) zur Verfügung. Nennen Sie den Titel und die Höhe des Volumens, den Sie für Cash kaufen, um die Durationslücke zu schließen.

(c) *[8 Punkte]*

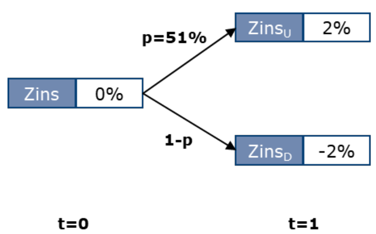
(i) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie, was man unter einem Single Callable Bond und einem Single Putable Bond versteht. Gehen Sie dabei darauf ein, welche Rechte oder Pflichten Emittent und Gläubiger jeweils haben.

(ii) *[1 Punkt]* Es seien am Markt ein Callable, Putable und Plain Vanilla Bond mit sonst gleichen Merkmalen (Emittent, Laufzeit, Kupon, Seniorität, Nominal) zu erhalten. Welche zwei Ungleichungen gelten für die drei Marktwerte von Callable, Putable und Plain Vanilla Bond zu jedem Zeitpunkt für den Gläubiger?

(iii) *[5 Punkte]* Es sei der unten stehende Binomialbaum für diskrete Zinsen gegeben. Bestimmen Sie den Marktwert eines Putable Bonds mit folgenden Eigenschaften:

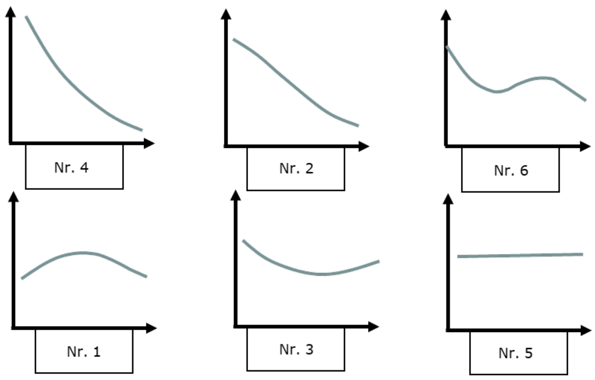
Laufzeit = zwei Jahre
Kupon = 2%
Put-Option im 1. Jahr ($t = 1$) zu 101% des Nominals
Nominal = 100

Gehen Sie von einer flachen Zinsstruktur aus. Seien die Wahrscheinlichkeiten in $t = 1$ für einen Zinsanstieg bei 51% und Rückgang des Zinses bei 49% pro Jahr. Der heutige Zins ($t = 0$) sei 0%.



Lösungsskizze:

(a) Management von Zinstiteln



[4] - Typisches konvexes, monoton fallendes Marktwertverhalten

[2] - Für höhere Zinsen vergleichbar mit Plain Vanilla Bond von [4], für sinkende Zinsen liegt der Marktwert unter dem des Bonds

[6] - Wenn Floor oder Cap greifen, ist das Marktwertverhalten ähnlich eines Bonds, dazwischen Floater; wenn Multiplikator groß genug, steigt der Marktwert

[1] - Für höhere Zinsen ist Marktwertverhalten ähnlich eines Bonds (wegen Cap), im Floating Bereich für geringere Zinsen auf Grund Multiplikator sinkend bzgl. sinkender Zinsen

[3] - Analog zu [1], nur umgekehrt

[5] - Floater mit Multiplikator 1, ohne Cap und Floor ist kaum zinssensitiv

(b) (i) Sie werden die Duration des Bondbestandes verlängern. Dazu verkaufen Sie Bonds mit eher kurzen Laufzeiten und kaufen Bonds mit eher langen Laufzeiten. Da Sie die Duration des Bondbestandes erhöhen und den Marktwert des Bondportfolios erhöhen, erhöht sich das Zinsrisiko der Assets.

(ii) I. Es seien:

$D_{A,L,NA}\ldots$ Duration der Assets, Liabilities, Neuanlage
$MV_{A,L,NA}\ldots$ Marktwert der Assets, Liabilities, Neuanlage

Für alle parallelen Zinsänderungen Δ_{Zins} gilt

$$0 = (D_A \cdot MV_A - D_L \cdot MV_L) \cdot \Delta_{Zins},$$

d. h. es muss nach Umschichtung der Kapitalanlage $D_A \cdot MV_A = D_L \cdot MV_L$ gelten.

1. $D_A \cdot MV_A - D_V \cdot MV_V + D_{NA} \cdot MV_{NA} = D_L \cdot MV_L$
2. $D_A \cdot MV_A + D_{NA} \cdot MV_{NA} = D_L \cdot MV_L$

II. Sie kaufen 30-jährige französische Staatsanleihen im Volumen von

$$MV_{NA} = \frac{D_L \cdot MV_L - D_A \cdot MV_A}{D_{NA}} = 100 \text{ Mio. €},$$

um die Durationslücke zu schließen. Die 5-jährige Anleihe müsste in einem deutlich höheren Volumen gekauft werden, um die Durationslücke zu schließen. Ihnen steht dazu aber zu wenig Cash zur Verfügung.

(c) (i) *Callable Bond:* Bond, bei dem der Emittent das Recht hat, den Bond zu einem festgelegtem Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis (Betrag) zu kündigen.

Putable Bond: Bond, bei dem der Gläubiger das Recht hat, den Bond zu einem festgelegtem Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis (Betrag) zu kündigen.

(ii) Es gilt zu jedem Zeitpunkt für die Marktwerte (MW) aus Sicht des Gläubigers:

$$MW_{Callable} \leq MW_{Bond} \leq MW_{Putable}$$

(iii) Bewertung durch Rückwärtseinsetzen, mit analoger Bezeichnung des Marktwertes im Szenario und Zeitschritt wie beim Zins.

In $t = 2$:

Zahlung nach 2 Jahren=100+2
Strike=101

In $t = 1$:

$$MW_U = 2 + \max\left\{\frac{100+2}{1+2\%}, 101\right\} = 103,00$$
$$MW_D = 2 + \max\left\{\frac{100+2}{1-2\%}, 101\right\} = 106,08$$

In $t = 0$:

$$MW_{Putable} = \frac{0,51 \cdot MW_U + 0,49 \cdot MW_D}{1+0\%} = 104,51$$

Aufgabe 4. *[Risikomanagement von Optionen] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gegeben sei eine Einheit eines (dividendenfreien) Basisobjekts mit Kursverlauf $(S_t; 0 \leq t \leq T)$ sowie ein Long Put auf eine Einheit eines Basisobjekts mit Laufzeit T, Ausübungspreis K und Kursverlauf $(P_t; 0 \leq t \leq T)$. Ein *(1:1)-Put-Hedge* besteht aus der Kombination dieser beiden Positionen.

(i) *[3 Punkte]* Wie lautet die Gewinn/Verlust-Position G_T dieses Put-Hedges in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T zum Zeitpunkt T? Vernachlässigen Sie dabei Zinseffekte.

(ii) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gewinn/Verlust-Position in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T graphisch dar.

(b) *[6 Punkte]* Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell, in dem der Aktienpreisprozess unter dem statistischen Maß P gegeben ist durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \geq 0,$$

wobei W ein Wiener-Prozess ist sowie $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ den Drift- bzw. Volatilitätsparameter bezeichnen. Der Preis C_t einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T im Zeitpunkt t ist gegeben als $v(x, \tau)$, wobei x der Aktienkurs in t ist und $\tau = T - t$ die Restlaufzeit darstellt.

(i) *[3 Punkte]* Erklären Sie, wie die Sensitivität „Delta" approximativ zur Absicherung einer Call-Optionsposition gegen Wertänderungen in der Basisposition „Aktie" verwendet werden kann (Delta-Hedge). Wie kann umgekehrt die Wertänderung in der Aktie durch Call-Optionen abgesichert werden?

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau λ über das Zeitintervall $[t, t+h]$ für den Gewinn/Verlust einer Call-Position auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation.

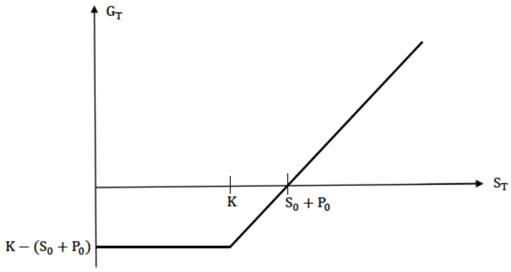
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregel zur Quantiltransformation.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $P_0 = P_0(K)$ gilt für die Gewinnposition:

$$\begin{aligned} G_T &= S_T - S_0 + P_T - P_0 \\ &= S_T + \max\{K - S_T, 0\} - (S_0 + P_0) \\ &= \max\{S_T, K\} - (S_0 + P_0) \\ &= \begin{cases} K - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T \leq K, \\ S_T - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Graphische Darstellung:



(b) (i) Ist $(S_t)_{t\geq 0}$ der Preisprozess der Aktie, so gilt approximativ für die Wertänderung des Optionspreises in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t).$$

Dies erlaubt, die Optionsposition gegen Preisänderungen des Basiswertes statisch im Zeitintervall $[t, t+h]$ abzusichern, indem $\Delta(S_t, \tau) = \Phi(d_+(S_t, \tau))$-Einheiten der Aktie im Zeitpunkt t gekauft werden. Dadurch wird eine Position im Basiswert aufgebaut, deren Wertänderungen bei Preisbewegung den Wertänderungen der Optionsposition genau entgegengesetzt sind. Das resultierende Portfolio aus Option und Basisposition hat dann ein Gesamt-Delta von Null (Δ-neutral).

Umgekehrt sind $1/\Delta(S_t, \tau)$-Einheiten der Call-Option zu erwerben, um die Änderung in der Basisposition zu kompensieren.

(ii) Für die Wertänderung der Call-Option gilt approximativ

$$\Delta C = C_{t+h} - C_t \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t) = \Delta(S_t, \tau)S_t(e^{\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h} - 1).$$

also mithilfe der Regel für die Quantiltransformation

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta C) &\approx \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1)) \\ &= -q_{\Delta(S_t,\tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h)-1)}(\lambda) \\ &= -\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma q_{W_{t+h}-W_t}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1) \\ &= -\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - real-world] [33 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Die Modellierung der realistischen Änderung eines Risikofaktors rf vom Zeitpunkt t zu $t + \Delta$ kann über verschiedene Größen beschrieben werden. Beschreiben Sie zwei Größen hiervon formal, gehen Sie *kurz* auf zentrale Eigenschaften ein und nennen Sie je einen potentiellen Vor- und Nachteil der Verwendung dieser Größe.

(b) *[10 Punkte]* Sie sollen die einjährige realistische Entwicklung der 5-jährigen EUR-Spotrate über einen Zeithorizont von einem Jahr modellieren. Dazu sollen Sie zum einen jährliche Differenzen und zum anderen jährliche shifted Log-Returns mit einem Shift-Parameter $\delta = 3\%$ verwenden, beide unter Normalverteilungsannahme. Die annualisierten Volatilitäten dieser beiden Zielgrößen betragen für

- Differenzen: 0,63%,
- Shifted Log-Returns: 11,55%.

Die Mittelwerte der Normalverteilung betragen in beiden Fällen 0. Die 5-jährige EUR-Spotrate zum Stichtag lag bei 0,18%.

(i) *[4 Punkte]* Ermitteln Sie für beide Modelle das $0,5\%$-Quantil der Verteilung der 5-jährigen EUR-Spotrate für ein Jahr nach dem Stichtag.

(ii) *[4 Punkte]* Wie ändern sich diese Werte, wenn der Stichtagswert der 5-jährigen EUR-Spotrate bei 5% liegen würde?

(iii) *[2 Punkte]* Worauf sind die Unterschiede zwischen (i) und (ii) zurückzuführen?

Hinweis: Das 0,5%-Quantil der Standardnormalverteilung liegt bei -2,57583.

(c) *[6 Punkte]* Nennen Sie drei wesentliche Punkte, die bei der Wahl der Datenbasis zur realistischen Modellierung eines Risikofaktors zu beachten sind, und erläutern Sie diese *kurz*.

(d) *[10 Punkte]* Zum Stichtag betragen der risikofreie Zinssatz in EUR zur Laufzeit 5 Jahre 0,2% sowie der Spread einer BBB gerateten Unternehmensanleihe ohne Kuponzahlungen aus dem EUR-Raum zur Laufzeit 5 Jahre 2%.

(i) *[4 Punkte]* Ermitteln Sie daraus die vom Markt eingepreiste annualisierte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, risk neutral})}$ dieses Titels unter der Annahme, dass eine Recovery Rate von 30% vorliegt.

(ii) *[3 Punkte]* Empirische Untersuchungen über einen längeren Zeitraum liefern Auskunft über die tatsächlich realisierten Ausfälle eines solchen Titels. Erläutern Sie, wo sich diese Ausfallrate $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})}$ im Vergleich zu dem Wert aus (i) in der Regel befindet und wie sich dieser Unterschied begründen lässt.

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum es aufgrund der Aussage in (ii) insbesondere für Versicherer lukrativ sein kann, solche Investments zu tätigen.

Lösungsskizze:

(a) Im Kurs wurden fünf Größen vorgestellt [Es sind nur zwei Beispiele gefragt.]:

1. Differenzen: Zielgröße ist $\text{diff}(t) = \text{rf}(t+\Delta) - \text{rf}(t)$.
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t) + \text{diff}(t)$
   - Vor-/Nachteile: Modellierung der Unterschiede ist levelunabhängig; Werte von rf können potentiell beliebig negativ werden
2. Returns: Zielgröße ist $\text{ret}(t) = \frac{\text{rf}(t+\Delta)}{\text{rf}(t)} - 1$.
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t)(1 + \text{ret}(t))$
   - Vor-/Nachteile: Modellierung der Unterschiede ist levelabhängig; rf kann (de-facto) nie negativ werden (gegeben ein positiver Startwert zu $t = 0$)
   - Nachteil: Explodierende Returns sobald Zeitreihe gegen Null geht
3. Shifted returns: Zielgröße ist $\text{shifted.ret}(t) = \frac{\text{rf}(t+\Delta)+\delta}{\text{rf}(t)+\delta} - 1$.
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = (\text{rf}(t) + \delta) \cdot (1 + \text{shifted.ret}(t)) - \delta$
   - Vorteil: Bei angemessener Wahl fallen Probleme mit explodierenden Werten (im Gegensatz zu Returns) weg, falls die Zielgröße gegen Null geht.
   - Nachteile: Keine untere Schranke möglich; angemessene Wahl von δ ist nicht-trivial
4. Log-Returns: Zielgröße ist $\text{log.ret}(t) = \ln\left(\frac{\text{rf}(t+\Delta)}{\text{rf}(t)}\right)$.
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t) e^{\text{log.ret}(t)}$
   - Vor-/Nachteile: Modellierung der Unterschiede ist levelabhängig; rf kann nie negativ werden (gegeben ein positiver Startwert zu $t = 0$)
   - Nachteile: Explodierende Log-Returns sobald Zeitreihe gegen Null geht; Argument des Logarithmus muss positiv sein

5. Shifted Log-Returns: Zielgröße ist $\text{shifted.log.ret}(t) = \ln\left(\frac{\text{rf}(t+\Delta)+\delta}{\text{rf}(t)+\delta}\right)$
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = (\text{rf}(t)+\delta)\cdot e^{\text{shifted.log.ret}(t)} - \delta$.
   - Vorteil: Bei angemessener Wahl fallen Probleme mit explodierenden/nicht-definierten Werten (im Gegensatz zu Log-Returns) weg, falls die Zielgröße gegen Null geht; untere Schranke möglich von rf, d. h. $-\delta$
   - Nachteil: Angemessene Wahl von δ ist nicht-trivial

(b) (i) Für Differenzen $r_5(t+1) = r(t) + \text{diff}(1) = 0,0018 + \text{diff}(1)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0;(0,63)^2)$ gilt für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}(0,0018 + \text{diff}(1)) = 0,0018 + q_{0,5\%}(\text{diff}(1)) \\ &= 0,0018 - 0,0063 \cdot 2,57583 = -1,45\%. \end{aligned}$$

Für shifted Log-Returns gilt

$$\begin{aligned} r_5(t+1) &= (r(t)+\delta)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - \delta \\ &= (0,0018 + 0,03)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,03 \end{aligned}$$

mit $\text{shifted.log.ret}(1) \sim \mathcal{N}(0,(0,1155)^2)$ und damit für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}((0,0018+0,03)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,03) \\ &= (0,0018+0,03)e^{q_{0,5\%}(\text{shifted.log.ret}(1))} - 0,03 \\ &= (0,0018+0,03)e^{-0,1155\cdot 2,57583} - 0,03 = -0,64\%. \end{aligned}$$

(ii) Analog zu (i) folgt: Für Differenzen $r_5(t+1) = r(t) + \text{diff}(1) = 0,05 + \text{diff}(1)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0;(0,63)^2)$ gilt für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}(0,05 + \text{diff}(1)) = 0,05 + q_{0,5\%}(\text{diff}(1)) \\ &= 0,05 - 0,0063 \cdot 2,57583 = 3,37\%. \end{aligned}$$

Für shifted Log-Returns gilt

$$\begin{aligned} r_5(t+1) &= (r(t)+\delta)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - \delta \\ &= (0,05 + 0,03)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,03 \end{aligned}$$

mit $\text{shifted.log.ret}(1) \sim \mathcal{N}(0,(0,1155)^2)$ und damit für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_5(t+1)) &= q_{0,5\%}((0,05+0,03)e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0,03) \\ &= (0,05+0,03)e^{q_{0,5\%}(\text{shifted.log.ret}(1))} - 0,03 \\ &= (0,05+0,03)e^{-0,1155\cdot 2,57583} - 0,03 = 2,94\%. \end{aligned}$$

(iii) Bei (i) führten Differenzen zu einem extremeren Quantil als die shifted Log-Returns, während sich dieser Effekt bei (ii) dreht und dort die shifted Log-Returns ein extremeres 0,5%-Quantil aufweisen. Die Stresshöhe ist bei Differenzen immer dieselbe und hängt nicht vom Stichtagswert des Risikofaktors ab, während dies bei shifted Log-Returns der Fall ist. Bei einem relativ niedrigen Ausgangswert von 0,18% fällt der Stress bei shifted Log-Returns daher noch relativ gering aus, aber steigt bei dem höheren Ausgangswert von 5% stark an. Dies ist eine Konsequenz der Eigenschaften der shifted Log-Returns und wird auch als „Elastizität“ bezeichnet.

(c) Wesentliche Punkte sind u. a.:

- Vorliegen einer angemessen langen Historie, um daraus stabil statistische Kenngrößen zur Kalibrierung zu schätzen und zugleich möglichst viele für die Dynamik des Risikofaktors relevante Informationen zu erfassen (z. B. historische Krisen/Extremereignisse)
- Wahl der Granularität der Daten der Zeitreihe (tägliche/wöchentliche/monatliche Daten), sodass ein sinnvoller Kompromiss zwischen einer möglichst geringen Autokorrelation in den Daten und einer entsprechend großen verfügbaren Datenmenge besteht.
- Daten müssen zum jeweiligen Exposure passen, um dessen real-world Entwicklung angemessen abzubilden.

(d) (i) Das Nominal wird gleich 1 gesetzt. Dann gilt für den Marktpreis der Anleihe

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = (1 + 0,0018 + 0,02)^{-5} = 0,8978$$

sowie für den Preis einer analogen risikofreien Anleihe

$$\text{ZCB}_5 = (1 + 0,0018)^{-5} = 0,991.$$

Für diese Preise besteht bei risikoneutraler Bewertung der Zusammenhang

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = \text{ZCB}_5 (p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} \cdot 1 + (1 - p_5^{(\text{survive,risk-neutral})}) \cdot 1 \cdot \text{RR}),$$

wobei RR die Recovery Rate bezeichnet. Daraus folgt

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = \frac{\text{Preis}_5^{\text{BBB}} / \text{ZCB}_5 - \text{RR}}{1 - \text{RR}} = 0,8656.$$

Es gilt somit

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = (p_{\text{annualized}}^{(\text{survive,risk-neutral})})^5 = (1 - p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})})^5$$

und somit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})} = 1 - 0,8656^{1/5} = 2,85\%$

(ii) Die tatsächlich realisierte annualisierte Ausfallrate eines solchen Titels $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$ liegt in der Regel deutlich unterhalb von $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, risk-neutral)}}$ aus (i). Dies liegt daran, dass Investoren für die Möglichkeit des Ausfalls (aber auch für die potentiell niedrigere Liquidität) eines solchen Titels eine Kompensation fordern, um ein solches Investment zu tätigen. Diese Kompensation („Risikoprämie") besteht darin, dass der Marktwert einen Abschlag gegenüber dem sich aus den tatsächlich erwarteten Risiken (u. a. bemessen anhand von $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$) bemessenen Preis reflektiert, um ein solches Investment attraktiv zu machen.

(iii) Versicherer können den in (ii) beschriebenen Preisunterschied ausnutzen, da sie typischerweise als „buy-and-hold"-Investoren agieren und somit den Titel inklusive des Preisabschlags (repräsentiert u. a. durch die Differenz zwischen $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, real world)}}$ und $p_{\text{annualized}}^{\text{(default, risk-neutral)}}$) erwerben, diesen auch in Zeiten höherer Spreads nicht verkaufen müssen und am Ende mit höherer Wahrscheinlichkeit als $p_5^{\text{(survive, risk-neutral)}}$ das Nominal zurückbezahlt bekommen. Damit können sie effektiv die Risikoprämie realisieren.

Aufgabe 6. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - risikoneutral] [27 Punkte]*

(a) *[14 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, was sich hinter dem Martingaltest im Kontext der risikoneutralen Modellierung verbirgt, und formulieren Sie diesen für Zero-Coupon-Bonds mit Restlaufzeit von i Jahren.

(ii) *[10 Punkte]* Sie sollen den Wechselkurs zwischen zwei Währungen A und B in einem risikoneutralen ESG stochastisch über folgende stochastische Differentialgleichung modellieren:

$$d\,\mathrm{FX}_t^{(A|B)} = \mathrm{FX}_t^{(A|B)}(\mu\,dt + \sigma\,dW_t), \quad \mathrm{FX}_0^{(A|B)} = \mathrm{fx}^{(A|B)}(0).$$

Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die Zinsen jeder Laufzeit in beiden Währungen deterministisch auf dem Niveau r_A (Währung A) und r_B (Währung B) verlaufen.

- Leiten Sie für diesen Fall die Wahl des Drifts μ explizit her.
- Formulieren Sie den Martingaltest für ein Investment, das nach 5 Jahren einen erwarteten Payoff von 1 Einheit in Währung B hat und begründen Sie, dass unter Verwendung des oben genannten Drifts dieses Investment den Martingaltest besteht.

(b) *[5 Punkte]* Erläutern Sie, warum es im Kontext der marktkonsistenten Kalibrierung von ESGs sinnvoll sein kann, anstelle von Optionspreisen auf implizite Volatilitäten als Kalibrierungsziele zuzugreifen. Nennen Sie zwei Vorteile dieses Ansatzes gegenüber der Verwendung von Optionspreisen.

(c) *[8 Punkte]* In der Praxis können im Rahmen der risikoneutralen Bewertung (bedingte) Erwartungswerte unter einem risikoneutralen Maß häufig nur mit Monte-Carlo-Verfahren bestimmt werden. Hierbei tritt ein Approximationsfehler auf, der durch Varianzreduktionstechniken reduziert werden kann.

(i) *[4 Punkte]* Nennen Sie drei gebräuchliche Varianzreduktionstechniken. Gehen Sie für ein Verfahren auf einen Vorteil sowie einen Nachteil bzw. eine Problematik der Methode ein.

(ii) *[4 Punkte]* Wie hängen die Varianzen von naivem Monte-Carlo-Schätzer und antithetischem Schätzer zusammen. Erläutern Sie, unter welchen Umständen die Verwendung antithetischer Zufallszahlen somit vorteilhaft ist.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Martingaltest prüft empirisch im risikoneutralen Kontext das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Formal:

$$V_0 = \mathrm{E}\left[\frac{V_t}{B_t}\right],$$

wobei $(V_t)_{t\geq 0}$ den Preisprozess eines Assets sowie $(B_t)_{t\geq 0}$ den Wertprozess des Geldmarktkontos mit $B_0 = 1$ bezeichnen und das Asset vor t keine Cash Flows auszahlt.

Für einen Zero-Coupon-Bond mit Laufzeit i gilt zum Zeitpunkt t

$$\mathrm{E}[\,\mathrm{Disk}(t)\cdot \mathrm{ZCB}_i(t)] = \mathrm{ZCB}_{i+t}(0)$$

mit

- $\mathrm{Disk}(t) = 1/B_t$: Diskontfaktor zum Zeitpunkt t
- $\mathrm{ZCB}_i(t)$: Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeit i Jahre zum Zeitpunkt t

(ii) Der Martingaltest für ein Investment, das 1 Einheit von Währung B zum Zeitpunkt $t = 0$ aufweist, vergleicht folgende beide Größen:

- Wert des Investments in $t = 0$ aus Sicht von Währung B: 1
- Erwarteter Wert des diskontierten Payoffs nach Umtausch von der 1 Einheit in Währung B aus dem vorherigen Punkt in Währung A, Anlage über T Jahre und nachfolgender Konvertierung in Währung B:

$$\mathrm{E}\left[\tfrac{1}{\mathrm{fx}_0^{A|B}}\cdot e^{r_A T}\cdot \mathrm{FX}_T^{A|B}\cdot e^{-r_B T}\right]$$

Es muss folglich gelten:

$$1 = \mathrm{E}\left[\tfrac{1}{\mathrm{fx}_0^{A|B}}\cdot e^{r_A T}\cdot \mathrm{FX}_T^{A|B}\cdot e^{-r_B T}\right] = \tfrac{1}{\mathrm{fx}_0^{A|B}}\cdot e^{(r_A-r_B)T}\cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{FX}_T^{A|B}\right]$$

Für den Wechselkurs-Prozess

$$d\,\mathrm{FX}_t^{A|B)} = \mu\,\mathrm{FX}_t^{A|B}\,dt + \sigma FX_t^{A|B}\,dW_t, \quad \mathrm{FX}_0^{A|B} = \mathrm{fx}_0^{A|B}$$

gilt $\mathrm{E}[\,\mathrm{FX}_T^{A|B}] = \mathrm{fx}_0^{A|B}\cdot e^{\mu T}$. Damit folgt aus der obigen Gleichung

$$1 = \tfrac{1}{\mathrm{fx}_0^{A|B}}\cdot e^{(r_A-r_B)T}\cdot \mathrm{fx}_0^{A|B}\cdot e^{\mu T},$$

woraus $\mu = r_B - r_A$ folgt und der Martingaltest dadurch bestanden wird.

(b) Marktpreise von Optionen sind in der Regel abhängig von der zugrunde liegenden Zinskurve, da diese u. a. die Diskontierung der zukünftigen Cash Flows der Option beeinflusst. Dies bedeutet, dass die Marktpreise von Optionen nur bei Verwendung der Marktzinskurve eine valide marktnahe Quotierung der Optionslandschaft darstellen. Im Kontext von marktkonsistenten ESG-Kalibrierungen wird in der Regel eine Zinskurve verwendet, die aus verschiedenen Gründen bewusst vom Markt abweicht (u. a. Swapkurve als Ausgangskurve, Abzug CRA, Addition VA, Inter-/Extrapolation mit Smith-Wilson), sodass hier die simultane Betrachtung von Marktpreisen zusammen mit Nicht-Markt-Zinskurven ein verzerrtes Bild widerspiegelt, da die Optionspreise unter der verwendeten Zinskurve andere wären. Implizite Volatilitäten stellen genau darauf ab, den Marktpreis von dem in der Diskontierung enthaltenen Zinseffekt zu befreien, und sind daher besser als Kalibrierungsziel geeignet als Marktpreise von Optionen.

Vorteile dieses Vorgehens sind u. a.:

- Saubere Trennung des Zinseffektes auf den Optionspreis
- Einheitliche Kalibrierungsziele in Zinsstressen
- Intuitiverer Zugang zu den Werten der Kalibrierung - Preise können sich mit der Zinskurve ändern, bei Swaptions steigen ferne etwa die Preise mit dem Tenor, da man hier mit steigenden Tenors mehr Cash Flows hat, während implizite Volatilitäten sich genau davon abstrahieren (und man so etwa auch Kalibrierungsziele für Zinsvolatilitäten über verschiedene Tenors vergleichen und einordnen kann)
- Bessere Vergleichbarkeit der Kalibrierungsziele zwischen den Stichtagen (aus dem oben genannten Grund)

(c) (i) Gängige Beispiele sowie Beispiele für Vor- und Nachteile/Probleme sind:

- Antithetische Variablen:
  - \+ Sehr leicht zu implementieren
  - − Für komplexe Bewertungsgrößen oft nur mäßige Varianzreduktion
- Stratified Sampling:
  - \+ Deutliche Erhöhung der Homogenität
  - − Reduktion der Zufälligkeit für enge Gitter verringert Aussagekräftigkeit von Konfidenzintervallen
- Niederdiskrepanzfolgen:
  - \+ Äußerst homogene Verteilung

    – Deterministische Folge: Keine Varianz, somit kein Konfidenzintervall - Je nach Folge, hohe Simulationszahl für mehr Dimensionen nötig

- Kontrollvariablen:
    + Keine Einflussnahme auf die Zufallszahlen-Erzeugung
    – Geeignete Kontrollvariable ist oft nicht ohne weiteres identifizierbar

(ii) Die Varianz des antithetischen Schätzers ist gleich der Varianz des naiven Schätzers korrigiert um den Kovarianzterm der antithetischen Paare

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}_A) = \mathrm{Var}(\bar{Y}) + \frac{1}{n}\,\mathrm{Cov}(Y_1, \tilde{Y}_1).$$

Die Varianz reduziert sich also, falls der Kovarianzterm negativ ist. Dies ist insbesondere bei monoton linearen Funktionen $f(U_{i,j}) = Y_i$ der zugrunde liegenden gleichverteilten Zufallszahlen der Fall.

Aufgabe 7. *[Projektion von Kapitalanlagen] [20 Punkte]*

(a) *[14 Punkte]* (Surplus und Duration Matching)

Sie sind Verantwortlicher Aktuar der LV AG, die eine feste Verpflichtung in Höhe von 1.000 € in 10 Jahren hat. Dieser Verpflichtung steht die risikolose Anlage in einen einjährigen Zero-Coupon-Bond und einen fünfzehnjährigen Zero-Coupon-Bond gegenüber. Die aktuelle Zinsstrukturkurve ist flach und beträgt für alle Laufzeiten $r = 2\%$ (annualisierte, diskrete Verzinsung).

(i) *[5 Punkte]* Der Nennwert beider Wertpapiere ist jeweils 550 €. Berechnen Sie Marktwert und Macaulay-Duration des Surplus der LV AG.

Hinweis: Die Macaulay-Duration zum Zinsniveau r ist definiert durch $\mathrm{D}_{Mac}(r) = -(1+r) \cdot \frac{P'(r)}{P(r)}$, wobei $P(r)$ der Marktwert zum Zins r ist.

(ii) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie durch Angabe der Nominalwerte ein Duration-Matching-Portfolio aus den beiden Zero-Coupon-Bonds, bei dem sich die Barwerte der Assets und Liabilities entsprechen.

(iii) *[4 Punkte]* Die Verpflichtungen können wahlweise mit den beiden Kapitalanlagen

- Unternehmensanleihe mit BBB Rating, jährlichen Couponzahlungen und Restlaufzeit 10 Jahre
- US-Treasuries mit Restlaufzeit 20 Jahre und halbjährlichen Couponzahlungen

bedeckt werden. Nennen Sie jeweils zwei zusätzliche Risiken für die Kapitalanlage gegenüber der Investition in einen risikolosen, in Euro denominierten 10-jährigen Zero-Coupon-Bond.

(b) *[6 Punkte]* (Bilanzierung von Aktien)

Im Geschäftsjahr 2017 hat die Risk-On VVaG 20.000 Inhaberaktien des Unternehmens U zum Kurs von 65 € gekauft. In den Folgejahren wird folgende Kursentwicklung beobachtet:

t	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Kurs in €	63	68	75	68	55	50

(i) *[4 Punkte]* Mit welchem Wert stehen diese Aktien jeweils in der HGB-Bilanz der Risk-On VVaG? Ermitteln Sie jeweils die notwendigen Abschreibungen/Zuschreibungen sowie die vorhandenen Stillen Reserven/Lasten, die sich aus dem strengen Niederstwertprinzip ergeben.

(ii) *[2 Punkte]* Welche Veränderungen ergeben sich in Teilaufgabe (i), wenn vom Wahlrecht nach §341b HGB Gebrauch gemacht wird?

Lösungsskizze:

(a) (i) Barwert der Liabilities: $\text{BW}_L = \frac{1.000€}{1{,}02^{10}} = 820,35€$

Barwert der Assets: $\text{BW}_A = \frac{550€}{1{,}02^{1}} + \frac{550€}{1{,}02^{15}} = 539,22 + 408,66 = 947,88€$

Marktwert Surplus: $\text{MW}_S = \text{BW}_A - \text{BW}_L = 947,88 - 820,35€ = 127,53€$

Macaulay-Duration: $\text{MW}_S \cdot \text{Dur}^S_{Mac} = \text{BW}_A \cdot \text{D}^A_{Mac} - \text{BW}_L \cdot \text{D}^L_{Mac}$

- $\text{D}^L_{Mac} = 10$
- $\text{D}^A_{Mac} = 1,02 \cdot \frac{1 \cdot \frac{550}{1{,}02^2} + 15 \cdot \frac{550}{1{,}02^{16}}}{947{,}88} = 7,04$
- $\text{D}^S_{Mac} = 7,04 \cdot \frac{947{,}33}{127{,}53} - 10 \cdot \frac{820{,}35}{127{,}53} = -12,03$

(ii) Es gilt $\text{BW}_A \cdot \text{D}^A_{Mac} = \text{BW}_L \cdot \text{D}^L_{Mac}$, somit aber aufgrund der Voraussetzung $\text{BW}_L = \text{BW}_A$ speziell $\text{D}^A_{Mac} = \text{Dur}^L_{Mac}$. Damit folgt für die anteilige Portfoliozusammensetzung

$$10 = 15 \cdot x + 1 \cdot (1 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 64,29\%.$$

Dies liefert

$$\text{BW}_{15} = 820,35€ \cdot 64,29\% = 527,37€,$$
$$\text{BW}_1 = 820,35€ \cdot (1 - 64,29\%) = 292,98€,$$

also die Nennwerte der Zero-Coupon-Bonds $N_1 = 298,84€$, $N_{15} = 709,77€$.

(iii)

Alternative Kapitalanlage	**Zusätzliches Risiko**
Unternehmensanleihe	Ausfallrisiko Wiederanlagerisiko der Couponzahlungen
Fremdwährungeanleihe	Fremdwährungsrisiko Marktwertrisiko bei Verkauf nach 10 Jahren

(b) (i)

t	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Kurs in EUR	63	68	75	68	55	50
Marktwert in TEUR	1.260	1.360	1.500	1.360	1.100	1.000
Buchwert in TEUR	1.260	1.300	1.300	1.300	1.100	1.000
Zu-/Abschreibung in TEUR	-40	40	-	-	-200	-100
Stille Reserven/Lasten in TEUR	-	60	200	60	-	-

(ii)

t	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Kurs in EUR	63	68	75	68	55	50
Marktwert in TEUR	1.260	1.360	1.500	1.360	1.100	1.000
Buchwert in TEUR	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300	1.300
Zu-/Abschreibung in TEUR	-	-	-	-	-	-
Stille Reserven/Lasten in TEUR	-40	60	200	60	-200	-300

Aufgabe 8. *[Abbildung von Investmentrisiken unter Solvency II] [12 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* In Ihrem Portfolio wird eine festverzinsliche Unternehmensanleihe von der Ratingagentur S&P von A auf BBB zurückgestuft. Vereinfacht sei angenommen, dass die modified Duration vor und nach dem Downgrade 7 beträgt. Die Bank empfiehlt Ihnen, die Anleihe in einen Floater des gleichen Unternehmens mit identischer Fälligkeit und Bonität sowie einer Duration von 0,5 zu tauschen, um die Effekte im Spreadrisiko zu mildern.

(i) *[3 Punkte]* Berechnen Sie für die festverzinsliche Anleihe den Effekt des Downgrades auf den Stressfaktor im Spreadmodul. Wie würde sich der Stressfaktor durch den Tausch in den Floater ändern?

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie qualitativ, welche Effekte aus dem Tausch im Zinsmodul resultieren würden.

Hilfsmittel:

Zuweisung von Ratings externer Ratingagenturen zu einer objektiven Skala von Bonitätsstufen

Bonitätsstufe	0	1	2	3	4	5	6
Standard & Poor's Credit Market Services France S.A.S., Standard & Poor's Credit Market Services Italy S.r.l., Standard & Poor's Credit Market Services Europe Limited							
Skala für langfristige Emittentenratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, R, SD/D
Skala für langfristige Emissionsratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, C, D

Quelle: Durchführungsverordnung (EU) 2016/1800

Auszug Tabelle Spread-Risiko von Anleihen und Krediten:

Bonitätseinstufung		0		1		2		3		4		5 und 6	
Duration (dur_i)	$stress_i$	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i
bis zu 5	$b_i \cdot dur_i$	—	0,9 %	—	1,1 %	—	1,4 %	—	2,5 %	—	4,5 %	—	7,5 %
mehr als 5 und bis zu 10	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 5)$	4,5 %	0,5 %	5,5 %	0,6 %	7,0 %	0,7 %	12,5 %	1,5 %	22,5 %	2,5 %	37,5 %	4,2 %
mehr als 10 und bis zu 15	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 10)$	7,0 %	0,5 %	8,4 %	0,5 %	10,5 %	0,5 %	20,0 %	1,0 %	35,0 %	1,8 %	58,5 %	0,5 %

Quelle: Delegierte Verordnung (EU) 2015/35

(b) *[6 Punkte]* Zwei Lebensversicherungsunternehmen überlegen sich, mit einer identischen Anlage die Aktienquote jeweils um 1%-Punkt zu erhöhen. Können beide mit einem identischen Effekt auf die Solvabilitätsquote rechnen? Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

Lösungsskizze:

(a) (i) Ein S&P Rating von A entspricht der Bonitätsstufe 2, ein Rating von BBB der Stufe 3.

- Stressfaktor vor Downgrade $= 7\% + 2 \cdot 0,7\% = 8,4\%$
- Stressfaktor nach Downgrade $= 12,5\% + 2 \cdot 1,5\% = 15,5\%$
- Der Stressfaktor würde sich durch den Tausch in den Floater nicht ändern, da er das gleiche Rating und die gleiche Credit Duration aufweist, die für die Berechnung des Stressfaktors relevant ist.

(ii) Die Effekte im Zinsmodul hängen davon ab, ob insgesamt der Zinsanstieg oder die Zinssenkung das dominante Risiko darstellt.

- Zinsanstieg dominantes Risiko: Tausch positiv, da bei Floater bei einem Zinsanstieg nur geringe Marktwertverluste auftreten.
- Zinssenkung dominantes Risiko: Tausch negativ, da die festverzinsliche Anleihe bei einem Zinsrückgang einen größeren Marktwertgewinn verzeichnet.

(b) Nein, beide Unternehmen müssen das zusätzliche Aktien-Exposure zwar mit dem gleichen Faktor stressen, der Einfluss auf die Solvabilitätsquote weicht aber in der Regel voneinander ab, da die Effekte von der Ausgangssituation der Unternehmen abhängen.

- Eine Änderung der Asset Allokation nimmt sowohl Einfluss auf die Eigenmittel in der Solvency II Ausgangsbilanz als auch auf das SCR.
- Die höhere Aktienquote erhöht aufgrund der Asymmetrie der Gewinnbeteiligung den Zeitwert der Optionen und Garantien und verringert dadurch die Eigenmittel in der Ausgangsbilanz.
- Im Stress mindert die Verlustausgleichsfähigkeit der zukünftigen Überschussbeteiligung die Auswirkung des Aktienverlusts auf das SCR.
- Die Diversifikationseffekte hängen nicht nur von den Korrelationsfaktoren sondern auch vom Gewicht der Risiken zueinander ab.
- Unterschiedliche Managementregeln (Überschussdeklaration, Umschichtung/ Neuanlage von Kapitalanlagen).

Aufgabe 9. *[Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [28 Punkte]*

(a) *[11 Punkte]* Ihr Versicherungsunternehmen hat sich entschieden, ein dynamisches Hybridprodukt aufzulegen. Der Garantiefonds soll eine monatliche Wertuntergrenze von 80% aufweisen. Ihre Analysen haben ergeben, dass das riskante Asset maximal 20% in einem Monat verlieren sollte. Die risikolose Anlage hat eine Verzinsung von null.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Allokation zu Monatsbeginn (Startwert = 100).

(ii) *[2 Punkte]* Nach einer Woche hat der Fonds den Wert 92 angenommen. Wie sieht die neue Allokation aus?

(iii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie kurz, was man in diesem Kontext unter dem Gap-Risiko versteht. Gibt es Unterschiede im Gap-Risiko zwischen den Fällen (i) und (ii)?

(iv) *[2 Punkte]* Wie gehen Versicherungsunternehmen in der Regel mit dem Gap-Risiko um?

(b) *[7 Punkte]* Welche Bedeutung kommt dem konventionellen Sicherungsvermögen im Rahmen der in Deutschland dominierenden neuen/alternativen Versicherungsprodukte zu? Gehen Sie dabei für zwei Produkttypen Ihrer Wahl auch darauf ein, wie sich in diesem Kontext das niedrige Zinsniveau auswirkt.

(c) *[10 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Was versteht man unter Variable Annuities? Bitte nennen Sie stichpunktartig die wesentlichen Charakteristika dieser Produkte.

(ii) *[6 Punkte]* Erläutern Sie das Grundprinzip, nach denen die Garantien bei Variable Annuities gesteuert werden und zeigen Sie stichpunktartig drei wesentliche Herausforderungen/Probleme auf, die hierbei auftreten.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Allokation im Garantiefonds wird durch ein CPPI gesteuert.

- Barwert der Garantie $= 80 \Rightarrow$ Puffer bzw. Cushion $= 20$
- Multiplikator $= (1/\text{max. Verlust}) = (1/20\%) = 5$
- Allokation in riskante Assets $= \text{Multiplikator} \cdot \text{Puffer} = 5 \cdot 20 = 100$
- Allokation in risikolose Anlage $= 0$

(ii)
- Barwert der Garantie $= 80 \Rightarrow$ Puffer bzw. Cushion $= 12$

- Allokation in riskantes Asset = $\text{Multiplikator} \cdot \text{Puffer} = 5 \cdot 12 = 60$
- Allokation in risikolose Anlage = 32

(iii) Das Gap-Risiko beschreibt den Fall, dass in einer Zeitphase, in der nicht im Rahmen des CPPI umgeschichtet werden kann, das riskante Asset mehr verliert als der unterstellte maximale Verlust. Der Wert des Fonds fällt dann unter die Wertuntergrenze.

Gap-Risiko ist in Fall (i) größer. Zwar führt in beiden Fällen ein höherer „Overnight-Verlust“ als 20% zu einer Unterschreitung der Wertuntergrenze. Aufgrund der höheren Allokation in das riskante Asset ist in Fall (i) der absolute Wert der Unterschreitung jedoch höher.

(iv) Das Gap-Risiko lässt sich kaum mit am Markt handelbaren Finanzinstrumenten hedgen. Versicherungsunternehmen verlangen daher häufig eine „harte“ Garantie des Fondsanbieters bzw. eine dritte Partei (i.d.R. Investmentbank) übernimmt dieses Gap-Risiko in Form sogenannter „Crash Puts“ bzw. Garantieswaps.

(b) Die in Deutschland dominierenden neuen/alternativen Versicherungsprodukte stellen die Garantie vollständig (neue Klassik, Index-Select, statische Hybridprodukte) oder teilweise (dynamische Hybridprodukte) über das konventionelle SV dar.

Niedriges Zinsniveau erhöht den Barwert von Garantien bilanziell (niedriger Höchstrechnungszins, sinkender Referenzzins für ZZR), regulatorisch (risikolose Basiszinskurve) und ökonomisch. Gleichzeitig verringert es die Verzinsung/Überschussbeteiligung des konventionellen SV (auch wegen geringerem Risikopuffer für riskante Anlagen).

- Neue Klassik: Trade-Off zwischen Garantien und chancenreicherer Kapitalanlage nimmt zu.
- Index-Select: Geringe Überschussbeteiligung reduziert direkt oder indirekt die Möglichkeiten der Partizipation an chancenreichen Indizes (weniger Geld für den Erwerb von Optionen).
- Statisches Hybridprodukt: Aufgrund hohem Barwert der Garantie sowie geringer Überschussbeteiligung fließen nur wenig Mittel in die Fondsanlage.
- Dynamisches Hybridprodukt: Höherer Anteil bzw. früheres Umschichten in das konventionelle SV, negative Effekte auf Umfang Fondsanlage, jedoch deutlich niedriger als bei statischem Hybrid.

(c) (i)
- spezifische Ausgestaltung fondsgebundener LV/RV, die verschiedene Formen von Garantien aufweisen können
- explizite Trennung der Kapitalanlage über Fonds und Darstellung der Garantie
- dadurch prinzipiell freie Fondswahl für VN
- Garantie wird separat von der Fondsanlage mit Finanzinstrumenten direkt am Kapitalmarkt abgesichert
- VN bezahlt explizite, transparente Gebühr für Garantie
- in Auszahlungsphase muss Kapitalanlage nicht fondsgebunden sein

(ii) Grundprinzip ist das dynamische Hedging, d. h. das kontinuierliche Anpassen der zur Absicherung der Garantie erworbenen Finanzinstrumente (insb. Optionen, Futures, Swaps und Swaptions).

- Im Zeitpunkt t muss Barwert der Garantie dem Marktwert des Hedgeportfolios entsprechen.
- Im Übergang von t auf $t+1$ müssen beide Werte in gleicher Weise auf die Änderung der Marktparameter reagieren. Ermittlung und Steuerung über die „Greeks“.
- Anpassung des Hedgeportfolios in $t+1$, damit beim Übergang von $t+1$ auf $t+2$ beide Portfolien wiederum die gleiche Sensitivität aufweisen.

Herausforderungen/Probleme:

- Bestimmung der Sensitivität des Barwerts der Garantien gegenüber Marktparametern (komplexe Monte-Carlo-Simulationen notwendig, Modell- und Parameterrisiken)
- Wahlrechte VN bzgl. Fondsauswahl
- Laufzeit der Garantien i.d.R. deutlich länger als Laufzeit der zum Hedgen verwendeten Finanzinstrumente
- Schwankende Preise der Hedge-Instrumente (Gebühr für Garantie wird zu Beginn fixiert)
- Liquiditätsrisiken (insb. in Krisenphasen)
- Basisrisiken: unterschiedliche Wertentwicklung der Underlyings der Derivate und der Fonds
- Transaktionskosten steigen mit Häufigkeit der Anpassung
- Nicht oder kaum hedgebare Risiken (z. B. Langlebigkeit)