



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11. Oktober 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 14 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein



Teil I – Modellierung [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Interne Unternehmensmodelle von Schadenversicherern) [16 Punkte]

Basisinformationen:

- Der Schadenversicherer „Haus & Hof“ betreibt die beiden Sparten Kraftfahrt-Kasko (KK) und Wohngebäude (VGV). „Haus & Hof“ verfügt seit 2016 über ein genehmigtes internes Modell unter Solvency II.
- Zum 01.06.2019 hat ein altersbedingter Vorstandswechsel bei „Haus & Hof“ stattgefunden. Der neue Vorstand soll im Rahmen eines von den Aktuaren geleiteten Workshops in das interne Modell des Unternehmens eingeführt werden. Die Aktuare wollen den Termin insbesondere dazu nutzen, um dem Vorstand die Bedeutung und den Nutzen interner Unternehmensmodelle näherzubringen.

Aufgaben:

- (a) [10 Punkte] Nennen und beschreiben Sie die wesentlichen Komponenten eines typischen internen Unternehmensmodells eines Schadenversicherers.
- (b) [3 Punkte] Nennen Sie drei wesentliche Unterschiede zwischen einem typischen internen Unternehmensmodell eines Schadenversicherers und der Solvency II-Standardformel.
- (c) [3 Punkte] Nennen und erläutern Sie drei mögliche Einsatzbereiche und Fragestellungen, zu denen das interne Modell von „Haus & Hof“ herangezogen werden kann. Gehen Sie hierbei insbesondere auf den Bestand des Unternehmens sowie das daraus resultierende Risikoprofil ein.



Aufgabe 2 (Modellierung - Reserverisiko) [17 Punkte]

Basisinformationen:

- Im internen Modell von „Haus & Hof“ ist unter anderem das Reserverisiko abgebildet.
- Das Abwicklungsdreieck der kumulierten Zahlungen für angefallene, aber noch nicht abgewickelte Schadenfälle in der Sparte KK umfasst die Anfalljahre 2016 - 2018 und besitzt zum Stichtag 31.12.2018 die Gestalt:

Anfalljahr / Abwj	1	2	3
2016	5	10	16
2017	10	15	
2018	15		

- Von den Reservierungsakteuren wurden zum Stichtag 31.12.2018 bereits folgende Best-Estimates $\hat{R}_i^{(2018)}$ der nominalen Bedarfsreserven für die drei Anfalljahre $i \in \{2016, 2017, 2018\}$ ermittelt:

Anfalljahr i	$\hat{R}_i^{(2018)}$
2016	0
2017	10
2018	25

- Die Quantifizierung des ultimativen und einjährigen Reserverisikos in der Sparte KK wird mithilfe des internen Simulationsmodells auf Basis von 1.000 Simulationen vorgenommen, wobei sich der Begriff Risiko in diesem Kontext durchgehend auf den Eintritt eines aus Unternehmenssicht negativen Ereignisses bezieht.
- Diskontierung wird sowohl bei der Ermittlung der Best Estimates wie auch bei der Risikomessung vernachlässigt.



(2.1) Ultimates Reserverisiko [8 Punkte]

Aus dem internen Modell liegen in den 3 schlechtesten Simulationspfaden die folgenden *ultimativen Schadenaufwände* U_i für die Anfalljahre 2016 - 2018 vor:

Simulation M	$^{(M)}U_i$ per Anfalljahr i		
	2016	2017	2018
125	16	34	57
513	16	33	55
812	16	31	60

- (a) [2 Punkte] Was versteht man allgemein unter dem „*ultimativen Reserverisiko*“?
- (b) [6 Punkte] Schätzen Sie aus den vorliegenden Simulationsergebnissen das ultimative Reserverisiko in der Sparte KK als *Expected Shortfall* zum Niveau 99,7%!



(2.2) Einjähriges Reserverisiko [9 Punkte]

Zur Messung des einjährigen Reserverisikos wurde ein stochastisches Re-Reserving im internen Modell durchgeführt. In den 3 schlechtesten Simulationspfaden ergeben sich die folgenden *neugeschätzten Ultimates* $\hat{U}_i^{(2019)}$ am Ende des Kalenderjahres 2019:

Simulation M	${}^{(M)}\hat{U}_i^{(2019)}$ per Anfalljahr i		
	2016	2017	2018
299	16	30	51
513	16	29	48
812	16	30	52

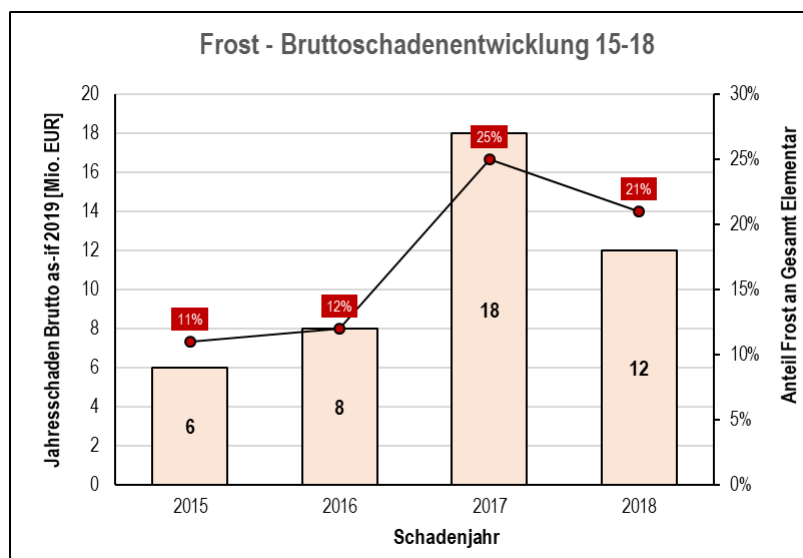
- (a) [3 Punkte] Wie ist das *einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis* allgemein definiert? Geben Sie eine Formeldarstellung an.
- (b) [6 Punkte] Berechnen Sie aus den vorliegenden Simulationen die Verteilung des (nominalen) ökonomischen Abwicklungsergebnisses für das Kalenderjahr 2019 und schätzen Sie davon ausgehend das einjährige Reserverisiko als *Expected Shortfall* zum Niveau 99,7%.

Aufgabe 3 (Modellierung - Naturgefahrenmodellierung) [37 Punkte]

(3.1) Modellierungsansatz für Katastrophenschäden [21 Punkte]

Basisinformationen:

- „Haus & Hof“ bildet auch das Risiko aus Katastrophenschäden im internen Unternehmensmodell ab.
- Die Modellierung der Sparte VGV erfolgt im internen Modell getrennt nach den Gefahren bzw. Schadenursachen Sturm, Hagel, Feuer sowie Rest. Letzteres umfasst u.a. Leitungswasserschäden.
- Derzeit werden lediglich die Naturgefahren Sturm und Hagel explizit modelliert, und zwar mittels geophysikalischer Modelle. Aufgeschreckt durch eine Sonderauswertung zu frostbedingten Leitungswasserschäden hat der Vorstand von „Haus & Hof“ den Aktuaren nun den Arbeitsauftrag erteilt, eine explizite Modellierung der Gefahr Frost im internen Unternehmensmodell zu prüfen.
- Die betreffende Sonderauswertung enthielt folgende Darstellung der Bruttojahresschäden durch Frost nach Schadenjahr (inkl. Exposure-Adjustierung und Indexierung auf das Schadenjahr 2019):



- „Haus & Hof“ verfügt zur Absicherung des VGV-Bestandes gegen Naturgefahren über einen Kumulschadenexzedenten-Rückversicherungsvertrag mit Priorität 15 Mio. EUR und Haftung 125 Mio. EUR. Dieser Vertrag deckt gleichermaßen Sturm-, Hagel- und Frostereignisse ab.
- Mit dem Rückversicherer wurde vereinbart, dass der Ereigniszeitraum für Frostschäden das komplette Kalenderjahr umfasst und damit das gesamte Schadenaufkommen eines Kalenderjahres als Ereignisschaden gewertet wird.



Aufgaben:

- (a) [6 Punkte] Benennen Sie stichpunktartig und zunächst allgemein jeweils zwei mögliche *Vor- und Nachteile* der Verwendung (externer) *geophysikalischer Modelle* und einer *mathematisch-statistischen Modellierung*. Gehen Sie innerhalb der mathematisch-statistischen Modellierung auch kurz auf die Unterschiede zwischen einer *impliziten und expliziten Modellierung* von Naturgefahren ein.
- (b) [4 Punkte] Setzen Sie sich nun qualitativ mit dem Modellierungsansatz und der *Notwendigkeit einer expliziten Modellierung* der Gefahr Frost im internen Modell von „Haus & Hof“ auseinander. Nennen Sie zwei Punkte, die aus der Sicht des Unternehmens für eine explizite Modellierung sprechen. Was könnte wiederum ein Argument für das Beibehalten des aktuellen Modellierungsansatzes sein?
- (c) [3 Punkte] Nennen Sie zwei mögliche Auswirkungen, die eine explizite Modellierung der Gefahr Frost auf das interne Unternehmensmodell und seine Komponenten haben könnte.
- (d) [8 Punkte] Zum Zwecke einer *Materialitätsabschätzung des Brutto- und Netto-risikos* aus Frostschäden führen die Aktuare von „Haus & Hof“ eine *mathematisch-statistische Modellierung* durch. Hierzu wird unterstellt, dass der aggregierte Jahresschaden einer Lognormalverteilung mit Parametern $\mu = 2,25$ und $\sigma^2 = 0,2$ genügt. Berechnen Sie die Werte der *AEP-Kurve* zu den Wiederkehrperioden 5, 20 und 200 gemäß mathematisch-statistischer Modellierung, jeweils vor und nach Anwendung der Rückversicherung. Warum ist eine Betrachtung der AEP-Kurve ausreichend?

Hinweise:

- Eine Zufallsgröße X heißt *lognormalverteilt* mit den Parametern μ und σ , wenn $\ln X$ *normalverteilt* ist mit den Parametern μ und σ .
- Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist die *Gauss'sche Phi-Funktion* Φ . Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte der Inversen der *Gauss'schen Phi-Funktion* an ausgewählten Stützstellen.

q	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
$\Phi^{-1}(q)$	0,84	1,28	1,64	2,05	2,33	2,58	3,09



(3.2) Resimulation aus der Event Loss Table [16 Punkte]

Zur Modellierung der Naturgefahr *Sturm* greift der Versicherer „Haus & Hof“ auf ein externes geophysikalisches Modell zurück. Als Output des externen Modells liegt den Aktuaren die folgende *Event Loss Table* (ELT) vor:

EVENT ID	RATE	PERSPVALUE	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE
4711	0,15	45	7	3	500
4712	0,10	25	10	5	800
4713	0,05	150	25	10	1.000
4714	0,50	5	2	1	100

Im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse wollen die Aktuare von „Haus & Hof“ den Einfluss der *sekundären Unsicherheit* auf die Modellergebnisse quantifizieren.

- [5 Punkte] Erläutern Sie die einzelnen *Komponenten* der vorliegenden ELT. Gehen Sie in diesem Zusammenhang insbesondere auf die *sekundäre Unsicherheit* und ihre generelle Bedeutung bei der Naturgefahrenmodellierung ein.
- [3 Punkte] Wie würden Sie eine solche Sensitivitätsanalyse zur sekundären Unsicherheit *im Simulationsmodell* umsetzen?
- [8 Punkte] Bestimmen Sie anhand der vorliegenden ELT die zugehörige *OEP-Kurve* unter *Vernachlässigung der sekundären Unsicherheit* analytisch.

Hinweis: In einem kollektiven Modell mit Poisson(λ)-verteilter Schadenanzahl N und unabhängig und identisch nach X verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N besitzt die Verteilungsfunktion des Maximums $M_N := \max \{X_1, \dots, X_N\}$ die Gestalt:

$$F_{M_N}(x) = \exp \{-\lambda \cdot (1 - F_X(x))\}$$



Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Der Ablauf des Reserveprozesses) [22 Punkte]

- (a) *[5 Punkte]* Aktuarielle Bewertungen von Schadenreserven können zu unterschiedlichen Zwecken durchgeführt werden. Geben Sie fünf in der Praxis vorkommende verschiedene Zielsetzungen an.
- (b) *[17 Punkte]* Benennen Sie die Stationen des Reserveprozesses und ihre Einordnung im Prozessablauf. Geben Sie zu jeder Station stichpunktartig die wesentlichen Bestandteile an.

Aufgabe 5 (Rechnungslegung unter Solvency II) [25 Punkte]

Die Fragestellungen dieser Aufgabe beziehen sich stets auf das am 01. Januar 2016 in Kraft getretene Regelwerk Solvency II.

- (a) [3 Punkte] Erklären Sie den Begriff „Bester Schätzwert“ (brutto und netto).
- (b) [3 Punkte] Welche Verpflichtungen bedecken die Schadenrückstellungen?
- (c) [3 Punkte] Erläutern Sie die Begriffe „direkte Schadenregulierungskosten“ und „indirekte Schadenregulierungskosten“ im Zusammenhang mit Schadenrückstellungen.
- (d) [3 Punkte] Erklären Sie den Begriff „Prämienrückstellungen“.
- (e) [7 Punkte] Erläutern Sie allgemein, welche Verträge bei der Berechnung der Prämienrückstellungen zu berücksichtigen sind. Geben Sie bei den folgenden vier Beispielen jeweils an, ob die Versicherungsverträge für die Prämienrückstellungen zu berücksichtigen sind (Bilanzstichtag 31.12.2018, keine Begründung erforderlich).
 - (1)** Ein Vertrag, der am 14.12.2018 abgeschlossen wurde mit Beginn des Versicherungsschutzes am 01.01.2019.
 - (2)** Ein Vertrag, der am 14.01.2019 abgeschlossen wurde, allerdings auf den 01.01.2019 (Beginn des Versicherungsschutzes) rückdatiert wurde.
 - (3)** Ein Vertrag, der am 14.12.2018 abgeschlossen wurde mit Beginn des Versicherungsschutzes am 01.02.2019.
 - (4)** Ein nicht gekündigter Vertrag, zu dem die Kündigungsfrist am 31.12.2018 verstrichen war und welcher sich damit automatisch zum 01.01.2019 um ein weiteres Jahr verlängert hat.
- (f) [6 Punkte] Geben Sie ein vereinfachtes Berechnungsverfahren zur Schätzung der (undiskontierten) Prämienrückstellung auf Basis von Prämienvolumina und Quoten an und definieren Sie die verwendeten Bezeichnungen.



Aufgabe 6 (Chain-Ladder Modell) [19 Punkte]

Für ein Geschäftssegment bezeichne C_{ik} , $i, k = 1, \dots, n$ die kumulativen Schadenstände (Anfalljahr i , Abwicklungsjahr k und $C_{i0} = 0$).

- (a) [3 Punkte] Geben Sie die Modellannahmen des Chain-Ladder Modells (CL) nach Mack an. Verwenden Sie die üblichen Bezeichnungen f_k und σ_k^2 für die Abwicklungsfaktoren und Varianzparameter.
- (b) [5 Punkte] Geben Sie die üblichen Schätzer \widehat{f}_k für $k = 2, \dots, n$ und $\widehat{\sigma}_k^2$ für $k = 2, \dots, n - 1$ an. Begründen Sie kurz (keine Beweise), warum diese Schätzer verwendet werden.
- (c) [6 Punkte] Der Zufallsfehler $\text{Var}(C_{i,n} | A_i)$ mit $A_i = \{C_{i,1}, \dots, C_{i,n+1-i}\}$ wird mittels der Rekursionsformel

$$\widehat{\text{Var}}(C_{i,k} | A_i) = \widehat{\text{Var}}(C_{i,k-1} | A_i) \cdot \widehat{f}_k^2 + \widehat{C}_{i,k-1} \cdot \widehat{\sigma}_k^2$$

geschätzt. Leiten Sie die Rekursionsformel her und geben Sie den Rekursionsanfang an.

- (d) [5 Punkte] Zeigen Sie, dass durch

$$\widehat{f}_k^2 - \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für f_k^2 gegeben ist. Warum wird in der Praxis trotzdem \widehat{f}_k^2 zur Schätzung von f_k^2 verwendet?



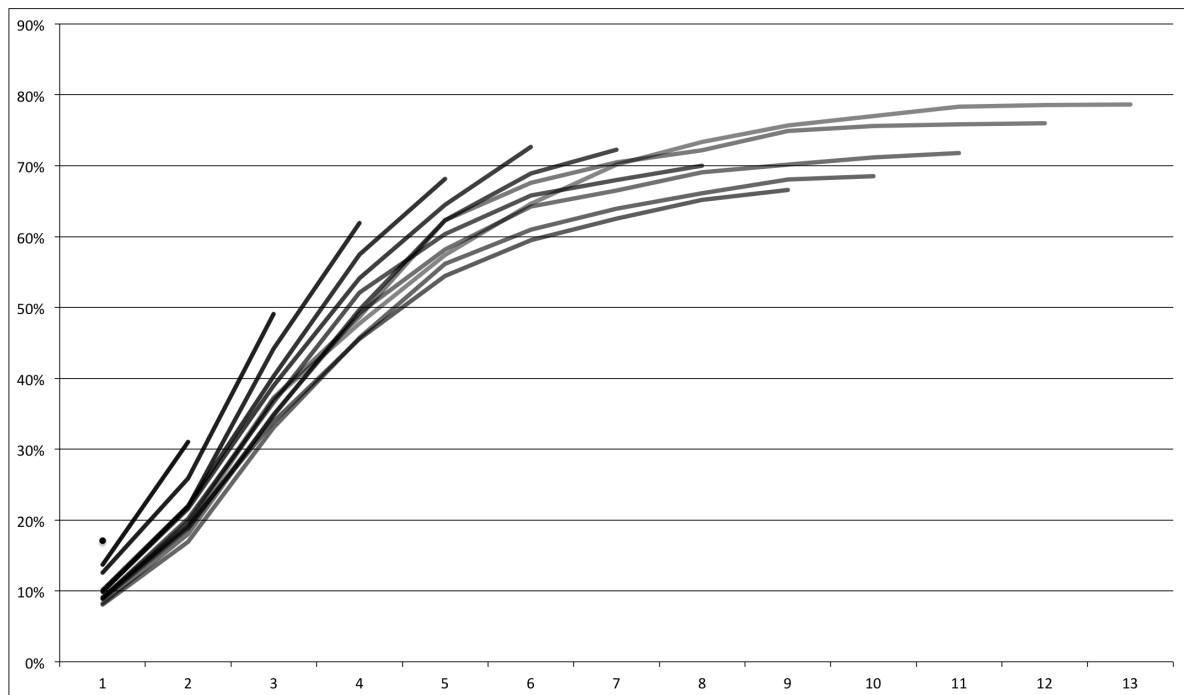
Aufgabe 7 (Bestimmung von Tailfaktoren) [16 Punkte]

Gegeben ist das Abwicklungsdreieck eines Geschäftssegments, dessen Endscha- denstände mit dem Chain-Ladder Verfahren geschätzt werden sollen.

- (a) [2 Punkte] Erklären Sie den Begriff Tail (auch Nachlauf genannt) und definieren Sie den Begriff der Tailfaktoren.
- (b) [8 Punkte] Beschreiben Sie die Schritte, die für die Schätzung von Tailfaktoren durchgeführt werden müssen.
- (c) [6 Punkte] Geben Sie drei Aspekte aus der Praxis an, die bei der Schätzung von Tailfaktoren zu berücksichtigen sind.

Aufgabe 8 (Das Bornhuetter/Ferguson Verfahren in der Praxis) [28 Punkte]

Sie übernehmen die Schadenreservierung für ein Geschäftssegment, das im Vorjahr mit dem Bornhuetter/Ferguson Verfahren reserviert wurde. Aus Ihrem Reservierungssystem stehen Ihnen die Prämienvolumina v_i und die kumulativen Zahlungen C_{ik} für die Anfalljahre $i = 1, \dots, 13$ und die Abwicklungsjahre $k = 1, \dots, 13$ für $i+k \leq 14$ zur Verfügung. Die folgende Abbildung zeigt das kumulative Abwicklungsverhalten der entsprechenden Schadenquoten.



In den Unterlagen finden Sie zwei kumulative Abwicklungsmuster:

(12%, 26%, 48%, 66%, 79%, 87%, 92%, 95%, 97%, 99%, 99%, 100%, 100%) und (33%, 53%, 67%, 79%, 87%, 92%, 96%, 98%, 98%, 99%, 99%, 100%, 100%).

- (a) [3 Punkte] Welches Abwicklungsmuster passt zu der gegebenen Abwicklungsgrafik? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Von der Tarifierungsabteilung erhalten Sie folgende Informationen:

- Die initial erwarteten Schadenquoten für die Anfalljahre (1, 2, ..., 13), die bis auf die neu hinzugekommene Schadenquote von 76% für das Anfalljahr 13 auch im Vorjahr als a-priori Schadenquoten verwendet wurden:

Anfalljahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Schadenquote	79%	79%	76%	70%	68%	70%	71%	74%	75%
Anfalljahr	10	11	12	13					
Schadenquote	75%	74%	75%	76%					



- Die Bruttoprämien seien in den letzten Jahren lediglich an eine stabile Schadeninflation von circa. 2% pro Jahr angepasst worden. Ansonsten habe es keine wesentlichen Änderungen gegeben.
- Außerdem seien der Bestand, die zugrundeliegenden Risiken und deren Abwicklung im wesentlichen gleich geblieben. Policenabgänge (in normalem Umfang) seien durch ähnliches Neugeschäft kompensiert worden.

(b) [3 Punkte] Berechnen Sie die Endschadenquoten der Anfalljahre 2, 12 und 13, die mittels des Bornhuetter/Ferguson Verfahrens auf Basis der gegebenen Parameter prognostiziert werden. Verwenden Sie dazu die Werte aus der Grafik

$$\frac{C_{2,12}}{v_2} = 76\%, \quad \frac{C_{12,2}}{v_{12}} = 31\% \quad \text{und} \quad \frac{C_{13,1}}{v_{13}} = 17\%.$$

(c) [5 Punkte] Legen Sie dar, welches Problem Sie haben, wenn Sie die Abwicklungsgrafik mit den Zahlen und Informationen der Tarifierungsabteilung vergleichen.

Auf Ihre Rückfragen hin führen die Tarifierungsabteilung und die Schadenabteilung zusammen eine Analyse der historischen Schadeninflation durch. Als Ergebnis erhalten Sie die Rückmeldung, dass die Schadeninflation in den letzten drei Jahren um etwa 50% höher als ursprünglich geschätzt war, also bei circa 3% pro Jahr lag.

- (d) [3 Punkte] Was bedeutet diese Erkenntnis für die Tarifierungssituation des Unternehmens? Schätzen Sie (grob) ab, was dies für die initial erwartete Schadenquote des Anfalljahres 13 bedeutet.
- (e) [3 Punkte] Erklärt die Erkenntnis einer höheren Schadeninflation ihr Problem aus Teilaufgabe (c)? Begründen Sie Ihre Aussage.

Bei weiteren Nachforschungen finden Sie einen schweren Fehler in ihrem Reservierungsdatensystem. So wurden seit der Einführung des Systems im Kalenderjahr 7 nur noch die Prämien nicht gekündigter, also automatisch verlängerter Policen erfasst. Für alle danach neu abgeschlossenen Policen wurden zwar stets die Schaden- und Prämien- aber nie die Prämien- und Schaden- in Ihr Reservierungsdatensystem übernommen, so dass mittlerweile ein gutes Drittel der Gesamtprämie fehlt.

- (f) [3 Punkte] Erklärt dieser Sachverhalt Ihr Problem? Begründen Sie Ihre Aussage.
- (g) [2 Punkte] Was bedeutet diese Erkenntnis für die Reservesituation Ihres Unternehmens? Gehen Sie dabei davon aus, dass der von Ihrem Vorgänger berechnete IBNR-Bedarf für das letzte Geschäftsjahr bilanziert wurde.
- (h) [6 Punkte] Geben Sie drei wichtige Schnittstellen an, die Sie über den herausgefundenen Sachverhalt informieren müssen. Begründen Sie Ihre Angaben.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Interne Unternehmensmodelle von Schadenversicherern) [16 Punkte]

(a) [10 Punkte] Zu den Komponenten eines internen Unternehmensmodells eines Schadenversicherers zählen:

a) *Versicherungstechnisches Modell*: Modellierung der versicherungstechnischen Risiken und passivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.

- *Brutto-Modell*: Relevante Brutto-Informationen für die simulierten Jahre:
 - Bruttoschäden (Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden)
 - GuV- und Bilanzdaten (Prämien, Kosten, Bestandsentwicklung)
- *Reserverisiko*: Abwicklung der Schadenreserven für vergangene Anfalljahre und Messung des ultimativen Reserverisikos.
- *Abwicklungsmodell*: Erzeugung der Schaden-Cashflows für bereits angefallene Schäden und Neuschäden, Ausgangspunkt für Überleitung von ultimativem Risikohorizont in die Kalenderjahressicht / einjährige Risikosicht.
- *Rückversicherungsmodell*: Abbildung der wichtigsten RV-Verträge und Berechnung der Netto-Schäden auf Basis der simulierten Brutto-Schäden aus dem Brutto-Modell.

b) *Nicht-versicherungstechnisches Modell (auch: Aktiv-Modell)*: Modellierung der Kapitalanlagerisiken und aktivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.

- *Kapitalmarkt-Modell*: Generiert Kapitalmarktszenarien, erzeugt durch einen ökonomischen Szenariogenerator (ESG)
- *Investment-Modell*: Entwicklung der Buch- und Marktwerte des Portfolios auf Basis der Kapitalmarktpfade aus dem Kapitalmarkt-Modell.

c) *Management-Modell*: Zusammenführen der aktiv- und passivseitigen Cash Flows. Managementregeln für Aktiv- und Passivseite sowie deren Interaktion.

d) *Auswertungs-Modell*: Generierung der Ausgaben und Kenngrößen wie z.B. Ruinwahrscheinlichkeiten, Risikokapital, GuV- und Bilanzposten pro Simulationspfad.

(b) [3 Punkte] Als zentrale Unterschiede zwischen der Solvency II-Standardformel und *internen Unternehmensmodellen* lassen sich bei Schadenversicherern nennen:



- Interne Unternehmensmodelle zeichnen sich durch eine *unternehmensindividuelle Festlegung der Methodik und Modellkalibrierung* aus. Die Parameter der Standardformel werden durch die europäische Aufsicht EIOPA vorgegeben und sind auf ein durchschnittliches europäisches Versicherungsunternehmen kalibriert.
 - Interne Unternehmensmodelle sind im Allgemeinen *simulationsbasiert*, es liegen komplette Wahrscheinlichkeitsverteilungen für alle Risiken vor. In der Standardformel liegen hingegen ausschließlich die 200-Jahresstresse, d.h. die 99,5%-Quantile der Risiken, pro Modul / Untermodul vor, die Berechnungen und Aggregationen erfolgen durchgehend analytisch.
 - Die Modellierung der Schäden für das Neugeschäftsjahr und der Schadenabwicklung für Altschäden erfolgt zunächst *Brutto vor Rückversicherung*, anschließend wird das zugehörige Netto bestimmt. Die *Nettoüberleitung* der Bruttoschäden aus dem Neugeschäftsjahr wird hierbei durch (weitestgehend) einzelvertragliche Abbildung des Rückversicherungsprogramms vorgenommen.
 - Die *Segmentierung der modellierten Sparten* ist im Allgemeinen feiner als die Einteilung nach Geschäftsbereichen gemäß Solvency II. Auch wird bei der Modellierung der Nicht-Katastrophenschäden aus dem Neugeschäftsjahr in der Regel nach *Schadentypen* (Basis- und Großschäden) differenziert.
 - Die *Aggregation* der Einzelverteilungen im internen Unternehmensmodell erfolgt mittels Copulas, nicht analytisch mittels Wurzelformel.
- (c) [3 Punkte] Die möglichen Einsatz- bzw. Analysebereiche des internen Modells für „Haus & Hof“ umfassen:
- Aufgrund der ausgeprägten Naturgefahrenexponierung der Sparten VGV und KK und der über den gemeinsamen Auftritt von Elementarereignissen bestehenden Abhängigkeiten zwischen beiden Sparten kann das interne Modell von „Haus & Hof“ einen wichtigen Beitrag zur *Analyse des unternehmensweiten Elementarexposures* und der *Angemessenheit des Rückversicherungsschutzes im Naturgefahrenbereich* leisten.
 - Mithilfe des internen Modells ließe sich im Rahmen von Szenarioanalysen zudem analysieren, inwieweit die Forcierung des Vertriebs in bestimmten Regionen, die Aufnahme neuer Geschäftsfelder oder der Zukauf weniger naturgefahrenexponierter Bestände Maßnahmen sein könnten, um die *(geografische und spartenübergreifende) Diversifikation auf der Passivseite* zu erhöhen.



- Analyse der *Profitabilität im Neugeschäftsjahr* sowie Bestimmung von Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten (Schadenkostenquoten bei VGV und KK sind marktweit in der Regel recht hoch)
- *Ermittlung von Kapitalkosten* für die Tarifierung
- Analysen zum *Liquiditätsbedarf* (speziell in Simulationspfaden mit Auftritt von Naturereignissen)



Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Modellierung - Reserverisiko) [17 Punkte]

Ultimatives Reserverisiko

- (a) [2 Punkte] Das *ultimate Reserverisiko* lässt sich gemäß Skript definieren als Risiko einer Abweichung des endgültigen Schadenaufwands für bereits angefallene Schäden vom geschätzten Erwartungswert (d.h. das Risiko, dass die Best Estimate Rückstellung nicht ausreicht, um sämtliche Verpflichtungen aus angefallenen Schäden zu erfüllen.).
- (b) [6 Punkte] Der Ultimategeschätzer $\hat{U}_i^{(2018)}$ eines Anfalljahres ermittelt sich als Summe von Best-Estimate $\hat{R}_i^{(2018)}$ und dem jeweiligen Diagonalstand des Schadenzahlungsdreiecks:

Anfalljahr i	$\hat{U}_i^{(2018)}$
2016	16
2017	25
2018	40

Die für das ultimative Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist die Differenz Δ_i zwischen dem tatsächlichen Ultimate U_i und dem zum Stichtag 31.12.2018 geschätzten Ultimate $\hat{U}_i^{(2018)}$. Zur Berechnung der Verteilung dieser Verlustgröße werden die Differenzen Δ_i pro Einzelsimulation und Anfalljahr ermittelt und anschließend zum Gesamtverlust Δ durch Addition der Δ_i über alle Anfalljahre aggregiert:

Simulation M	${}^{(M)}\Delta_i := {}^{(M)}U_i - \hat{U}_i^{(2018)}$ per Anfalljahr i			${}^{(M)}\Delta := \sum_i {}^{(M)}\Delta_i$
	2016	2017	2018	
125	0	9	17	26
513	0	8	15	23
812	0	6	20	26

Allgemein ist der Schätzer für den Expected Shortfall zum Niveau α der Mittelwert der $\lfloor (1 - \alpha)n \rfloor$ -größten Verluste einer Stichprobe vom Umfang n , wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Anteil angibt. Somit lässt sich der Expected Shortfall der Zufallsgröße Δ zum Niveau 99,7% mithilfe des Mittelwertes der vorliegenden Simulationenwerte schätzen, d.h. es ist

$$\widehat{\text{ES}}_{99,7\%}(\Delta) = 25.$$



Einjähriges Reserverisiko

- (a) [3 Punkte] Sei ein Schadenportfolio mit n Anfall- und Abwicklungsjahren gegeben. Mit den Bezeichnungen aus dem Skript lässt sich das ökonomische Abwicklungsergebnis $\widehat{CDR}^{(n \rightarrow n+1)}$ des Schadenportfolios im Zeitintervall $[n; n+1]$ definieren als:

$$\widehat{CDR}^{(n \rightarrow n+1)} := \sum_{j=1}^n \widehat{CDR}_j^{(n \rightarrow n+1)},$$

wobei das ökonomische Abwicklungsergebnis $\widehat{CDR}_j^{(n \rightarrow n+1)}$ des j -ten Anfalljahres wiederum definiert ist als:

$$\widehat{CDR}_j^{(n \rightarrow n+1)} := \hat{R}_j^{(n)} - S_{j, n-j+2} - \hat{R}_j^{(n+1)} = \hat{U}_j^{(n)} - \hat{U}_j^{(n+1)}$$

mit

$\hat{R}_j^{(n)}$:= eingehende nominale Best-Estimate-Reserve für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n$

$S_{j, n-j+2}$:= nominale Zahlungen für Anfalljahr j im Zeitraum $[n; n+1]$

$\hat{R}_j^{(n+1)}$:= ausgehende nominale Best-Estimate-Reserve im Zeitpunkt $t = n+1$

$\hat{U}_j^{(n)}$:= geschätzter Ultimate für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n$

$\hat{U}_j^{(n+1)}$:= geschätzter Ultimate für Anfalljahr j im Zeitpunkt $t = n+1$.

- (b) [6 Punkte] Die Berechnung des einjährigen ökonomischen Abwicklungsergebnisses lässt sich anhand von

$$\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)} = \sum_{i=2016}^{2018} \widehat{CDR}_i^{(2018 \rightarrow 2019)} \quad \text{mit} \quad \widehat{CDR}_i^{(2018 \rightarrow 2019)} = \hat{U}_i^{(2018)} - \hat{U}_i^{(2019)}$$

vornehmen. Dazu sind pfadweise die Differenzen zwischen den Ultimateschätzungen zu Beginn und Ende des Kalenderjahres 2019 zu ermitteln:

Simulation M	${}^{(M)}\widehat{CDR}_i^{(2018 \rightarrow 2019)}$ per Anfalljahr i			${}^{(M)}\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}$
	2016	2017	2018	
299	0	-5	-11	-16
513	0	-4	-8	-12
812	0	-5	-12	-17

Die für das einjährige Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist das negative ökonomische Abwicklungsergebnis. Der Schätzer für den Expected Shortfall zum Niveau 99,7% ist durch den Mittelwert der drei größten Simulationswerte der Verlustvariablen $-\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}$ gegeben, d.h. es ist

$$\widehat{ES}_{99,7\%}(-\widehat{CDR}^{(2018 \rightarrow 2019)}) = 15.$$



Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Naturgefahrenmodellierung) [37 Punkte]

(3.1) Modellierungsansatz für Katastrophenschäden [21 Punkte]

(a) [6 Punkte] Würdigung mathematisch-statistischer Ansätze:

- *Kurzbeschreibung des Ansatzes* (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich): Modellierung auf Basis der (unternehmenseigenen) Schadenhistorie erfolgt eine Anpassung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an Ereignisschäden (in der Regel unter Annahme eines kollektiven Modells) bzw. die Jahresschadenlast nach entsprechender as-if-Transformation der Schäden, um monetäre Inflation, Veränderungen im Exposure und/oder sonstige Schadentrends seit dem originären Ereigniseintritt zu berücksichtigen. Schadenverursacher ist das Versichertenkollektiv, es wird keine weitere Differenzierung nach Einzelrisiken und entsprechender Spezifika wie geographischer Lage, etc... vorgenommen.
- *Schwierigkeiten bei mathematisch-statistischen Ansätzen* bestehen insbesondere in der Repräsentativität der Originalschäden (insbesondere bei Änderungen im Schadenbild und neuen Deckungen, wie z.B. Photovoltaikanlagen), der mitunter eingeschränkten Verfügbarkeit (insbesondere bei Gefahren mit äußerst niedrigen Eintrittswahrscheinlichkeiten, wie z.B. Erdbeben in Deutschland) und einer geeigneten as-if Transformation der Originalschäden (insbesondere bei Bestandsveränderungen). *Vorteile* können u.a. darin bestehen, dass das Unternehmen auf keinen externen Anbieter angewiesen ist, der Kalibrierung ausschließlich der eigene Bestand zugrundeliegt, das Unternehmen größere Freiheiten bei der Kalibrierung besitzt und insbesondere zeitnah auf neue Schadenereignisse reagieren und diese in der Kalibrierung der Schadenverteilungen berücksichtigen kann (was bei externen Anbietern in der Regel erst mit der Veröffentlichung einer neuen Modellversion passiert).
- Bei *expliziter Modellierung* einer Gefahr liegt eine dezidierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Schäden vor, bei der *impliziten Modellierung* wird die Gefahr gemeinsam mit anderen Gefahren modelliert, und aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung lassen sich keine direkten Rückschlüsse auf eine einzelne Gefahr ziehen.

Würdigung (externer) geophysikalischer Modelle:

- *Kurzbeschreibung des Ansatzes* (ist zur Beantwortung der Aufgabe nicht erforderlich): Bei geophysikalischen Modellen handelt es sich um exposure-basierte Simulationstools kommerzieller Anbieter mit verschiedenen Komponenten (Ereigniserzeugung, Portefeuille, Schadenanfälligkeit, Finanzmo-



dul). Die Ereignisschäden bzw. Jahresschäden sind das Resultat eines mehrstufigen Berechnungsprozesses. Modelliert werden lokale Ausprägungen der schadenbestimmenden Parameter der jeweiligen Naturgefahr, welche unter Berücksichtigung der geographischen Verteilung des Bestandes mithilfe risikospezifischer Vulnerabilitätskurven in einen Bruttoschaden übersetzt werden. Abschließend erfolgt die Anwendung der Limit- und Selbstbehaltsstrukturen, um den versicherten Schaden zu erhalten.

- *Vor- und Nachteile der Verwendung externer geophysikalischer Modelle:*
 - Geophysikalische Modelle erlauben im Allgemeinen eine granulare Modellierung auf Basis der zugrundeliegenden Schadentreiber und unter Berücksichtigung von Lage, Spezifika und Deckungen der Risiken. Dadurch sind diese Modelle insbesondere auch zum Pricing und Management des Bestandes geeignet (Bsp: Kumulkontrolle, Analysen zur Auswirkung verschiedener Selbstbehaltsstrukturen,...).
 - Zur Modellierung der Hauptgefahren stehen prinzipiell mehrere geophysikalische Modelle etablierter Drittanbieter zur Verfügung. Dies ist jedoch nicht für alle Gefahren, insbesondere für die Nebengefahren, gewährleistet.
 - Es ist ein Auswahlprozess notwendig, falls für eine Naturgefahr mehrere externe Modelle unterschiedlicher Anbieter verfügbar sind.
 - Grundsätzlich erfordert der Einsatz geophysikalischer Modelle Know-How und ein tiefes Verständnis von Funktionsweise, Methodik und zugrundeliegenden Annahmen, sowohl bei den Modellierern wie auch bei denen, die den Output dieser Modelle im internen Modell verarbeiten.
 - Hohe Anforderungen an Verfügbarkeit, Qualität und Granularität der Bestandsdaten (Lage und Spezifika der versicherten Risiken, Deckungen)

(b) [4 Punkte] Qualitative Überlegungen zum Modellierungsansatz für die Gefahr Frost sollten auf Relevanz / Wesentlichkeit der Gefahr, Modellierbarkeit und Nutzen für Unternehmenssteuerung eingehen, aber auch mögliche Aufwände und Herausforderungen einbeziehen:

- Bei Frost handelt es sich um ein Wetterphänomen, das prinzipiell eine große Fläche und damit eine Vielzahl versicherter Risiken = Gebäude betreffen kann. Dieses Kumulpotential kann sich in einer erhöhten Anzahl an Leitungswasserschäden (abhängig von Intensität und Dauer der Frostperiode) manifestieren.



- Die Naturgefahr Frost wird im CAT-Modul der Solvency II-Standardformel nicht abgebildet (für deutsche Risiken sind nur Sturm, Hagel, Überschwemmung und Erdbeben relevant). Da sich die Kalibrierung der Standardformel am durchschnittlichen europäischen Versicherer orientiert, lässt dies aber nur eingeschränkt Rückschlüsse auf einen Zweipartenversicherer wie „Haus & Hof“ zu. Daraus sollte also keine Unwesentlichkeit der Gefahr für das Unternehmen „Haus & Hof“ abgeleitet werden.
 - Es sind keine externen geophysikalischen Modelle zur Modellierung von Frost auf dem Markt verfügbar. Somit würde nur ein mathematisch-statistischer Ansatz in Frage kommen. Die Schadensysteme/-daten des Versicherers „Haus & Hof“ geben offensichtlich eine Differenzierung und Separierung der Frostschäden her, so dass zumindest perspektivisch eine Schadenhistorie als Ausgangspunkt der Modellierung vorliegt (diese umfasst zunächst nur vier Jahre, was im Hinblick auf eine adäquate Modellierung zu dünn erscheint).
 - Wesentlichkeit: Sowohl der absolute Schadenaufwand wie auch der relative Anteil der Frostschäden an den gesamten Elementarschäden weisen einen steigenden Verlauf in den vier Beobachtungsjahren auf und können sich bereits in einer wesentlichen / materiellen Größenordnung für das Unternehmen befinden.
 - Es liegt Rückversicherungsschutz für Frostschäden vor, es ließ sich sogar in der Datenreihe ein Schadenjahr mit einem Schadenaufkommen jenseits der Priorität des Kumulschadenexzedenten beobachten. Um also die Entlastung und Wirksamkeit der Rückversicherung adäquat im internen Unternehmensmodell darstellen zu können, wäre eine explizite Modellierung angezeigt. Die derzeitige implizite Modellierung lässt eine solche Abbildung der Rückversicherung nicht zu, dadurch könnte der Rückversicherungsvertrag im Modell unter Umständen weniger vorteilhaft erscheinen, als dies in der Realität der Fall ist.
- (c) [3 Punkte] Da „Haus & Hof“ über ein genehmigtes internes Modell verfügt, könnte die Umstellung des Modellierungsansatzes für Frost von einer impliziten auf eine explizite Modellierung ggf. eine *genehmigungspflichtige Modelländerung* bedeuten. In jedem Fall müsste die *Segmentierungs- und Aggregationslogik* des Modells angepasst werden, da die frostbedingten Leitungswasserschäden von den übrigen Schäden des Restsegments separat zu modellieren sind. Das *Rückversicherungsmodell* wäre dahingehend anzupassen, dass neben den Ereignisschäden der Gefahren Sturm und Hagel auch die simulierten Bruttoschäden aus Frostereignissen den Kumulschadenexzedenten durchlaufen. Die entsprechenden RV-Rückflüsse aus diesem Vertrag würden die Netto-Schadenbelastung weiter mindern, und wären damit in den Verteilungen der



Nettoschäden und des Netto-Anfalljahresergebnisses zu berücksichtigen. Im *Abwicklungsmodell* wäre unter Umständen ein entsprechendes Abwicklungsmuster für Frostschäden vorzuhalten. Außerdem wären *Abhängigkeiten* zwischen Frost und den anderen Naturgefahren bzw. den Segmenten Feuer und Rest in der Sparte VGV zu definieren und zu schätzen.

- (d) [8 Punkte] Gemäß Ereignisdefinition für Frostkumule bezieht sich der Ereigniszeitraum auf das komplette Kalenderjahr, daher ist der Ereignisschaden mit dem aggregierten Jahresschaden gleichzusetzen. Insbesondere bedeutet dies, dass die OEP-Kurve (OEP: Occurrence Exceedance Probability) und die AEP-Kurve (AEP: Aggregate Exceedance Probability) übereinstimmen, womit eine Betrachtung der AEP-Kurve ausreichend ist.

Zur Berechnung der Brutto- und Nettojahresschäden S_i bzw. \underline{S}_i zu den Wiederkehrperioden $T_i \in \{5, 20, 200\}$ verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

- Quantilniveau q_i zur Wiederkehrperiode T_i : $q_i = 1 - 1/T_i$
- Bruttojahresschaden S_i zur Wiederkehrperiode T_i :
 $S_i = F_s^{-1}(q_i) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(q_i)$
- Entlastung \bar{S}_i durch den Kumulschadenexzedenten:
 $\bar{S}_i = \min(\max(S_i - 15; 0); 125)$
- Nettoschaden \underline{S}_i zur Wiederkehrperiode T_i : $\underline{S}_i = S_i - \bar{S}_i$

Für die Stützstellen der AEP-Kurve ergibt sich:

T_i	q_i	S_i	\bar{S}_i	\underline{S}_i
5	0,8	13,8	0	13,8
20	0,95	19,8	4,8	15,0
200	0,995	30,1	15,1	15,0



(3.2) Resimulation aus der Event Loss Table [15 Punkte]

(a) [5 Punkte] Die Spalten der vorliegenden Event Loss Table haben die folgende Bedeutung:

- Jedes Einzelszenario wird eindeutig über die *EVENTID* identifiziert
- Die Parameter der Spalte *RATE* geben die mittlere Anzahl der Ereigniseintritte in einem Jahr an.
- Die Spalte *PERSPVALUE* („Perspective Value“) bezieht sich auf den Erwartungswert der Schadenhöhenverteilung des jeweiligen Szenarios. Es handelt sich um den bedingten Erwartungswert des Ereignisschadens gegeben das Szenario tritt ein.
- Die Spalten *STDDEVI* und *STDDEV* beziehen sich auf die unabhängige und korrelierte Standardabweichung, die beide zusammengenommen die Standardabweichung des Ereignisschadens (gegeben das Szenario tritt ein) ergeben und die sog. sekundäre Unsicherheit (= Unsicherheit über die Höhe des Ereignisschadens gegeben das Szenario tritt ein) repräsentieren.
- Die Spalte *EXPVALUE* („Exposed Value“) gibt die vom jeweiligen Ereignis betroffenen versicherten Werte (ausgedrückt anhand Versicherungssumme oder PML=Probable Maximum Loss) an und liefert somit eine Obergrenze für den resultierenden Ereignisschaden im jeweiligen Szenario.

Während sich die *primäre Unsicherheit* auf die Unsicherheit über das grundsätzliche Eintreten eines Ereignisses bezieht, entspricht die *sekundäre Unsicherheit* der Unsicherheit in der Höhe des Schadenaufwands bei Eintritt des Ereignisses. Die sekundäre Unsicherheit trägt dem Umstand Rechnung, dass alle Komponenten eines geophysikalischen Modells (Ereignismodul, Bestandsmodul, Schadenanfälligkeitsmodul und Finanzmodul) in Bezug auf Methodik, Annahmen, Daten und Kalibrierung einer Vielzahl von Unsicherheiten unterworfen sind. Hierzu gehören insbesondere die modellierten Intensitäten der Naturgefahr im Ereigniskatalog und die hinterlegten Vulnerabilitätskurven im Schadenanfälligkeitsmodul.

(b) [3 Punkte] Die Resimulation aus einer Event Loss Table im internen Modell erfolgt in der Regel zweistufig: im ersten Schritt wird zufällig, mit Zurücklegen und gewichtet mit der Ereignisfrequenz = *RATE*, eine Event-ID (stellvertretend für die komplette Zeile) aus allen vorhandenen EVENT-IDs des Ereigniskatalogs gezogen. Dies entspricht der Modellierung der primären Unsicherheit. Im zweiten Schritt wird eine Schwankung um den Erwartungswert (*PERSPVALUE*) des gezogenen Events gelegt (nämlich ebenjene sekundäre Unsicherheit) -



durch Umrechnung der Parameter aus der ELT in Parameter des Schadengrads und anschließender zufälliger Ziehung aus einer Betaverteilung. Um also keine sekundäre Unsicherheit bei der Resimulation zuzulassen, wäre der zweite Simulationsschritt ersatzlos zu streichen und direkt der Erwartungswert des Events zu übernehmen. Damit die Sensitivität bzgl. der sekundäre Unsicherheit nicht durch das Zufallsrauschen überlagert wird, sollte gewährleistet sein, dass in beiden Resimulationsläufen derselbe Zufallszahlensatz verwendet wird und die gezogenen EVENT-IDs jeweils identisch sind.

- (c) [8 Punkte] Es handelt sich offensichtlich um eine Event Loss Table in der Struktur des Anbieters RMS. Dieser ELT liegt ein kollektives Modell mit Poisson-Verteilungsmo- dell und globaler Unabhängigkeitsannahme (zwischen verschiedenen Events = Zeilen und innerhalb der Events) zugrunde. Aufgrund der geforderten Vernachlässigung der sekundären Unsicherheit kann auf die Spalten STDDEVI, STDDEVC und EXPVALUE verzichtet werden, da diese ausschließlich für die Abbildung der sekundären Unsicherheit benötigt werden.

Die OEP-Kurve bezieht sich gemäß Definition

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$$

auf die Verteilung des *maximalen jährlichen Ereignisschadens*

$$M_N := \max \{X_1, \dots, X_N\},$$

wobei X_k die einzelnen Ereignisschäden und N die zufällige Anzahl an Ereignisschäden pro Jahr bezeichnen.

Im vorliegenden Fall sind die $(X_k)_{1 \leq k \leq N}$ unabhängig und identisch verteilt und die Schadenanzahl N genügt einer Poisson-Verteilung mit Parameter λ , der sich als Summe der Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aus der Spalte RATE ermittelt. Somit gilt für die Verteilungsfunktion von M_N nach dem Hinweis in der Aufgabenstellung:

$$F_{M_N}(x) = \exp \{-\lambda \cdot (1 - F_X(x))\}$$

mit F_X Verteilungsfunktion der X_k . Bei F_X handelt es sich wiederum um eine Treppenfunktion, die an den Stützstellen μ_i (Einträge in der Spalte PERSPV-VALUE) jeweils Sprungstellen in Höhe von λ_i/λ aufweist. F_X lässt sich beispielsweise definieren als:

$$F_X(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbb{1}_{[x \leq \mu_i]}}{\lambda}$$

Aus der vorliegenden ELT ergibt sich eine jährliche Ereignisfrequenz von $\lambda = 0,8$. Somit folgt insgesamt für die Verteilungsfunktionen F_X und F_{M_N} an den Stützstellen aus der Event Loss Table:

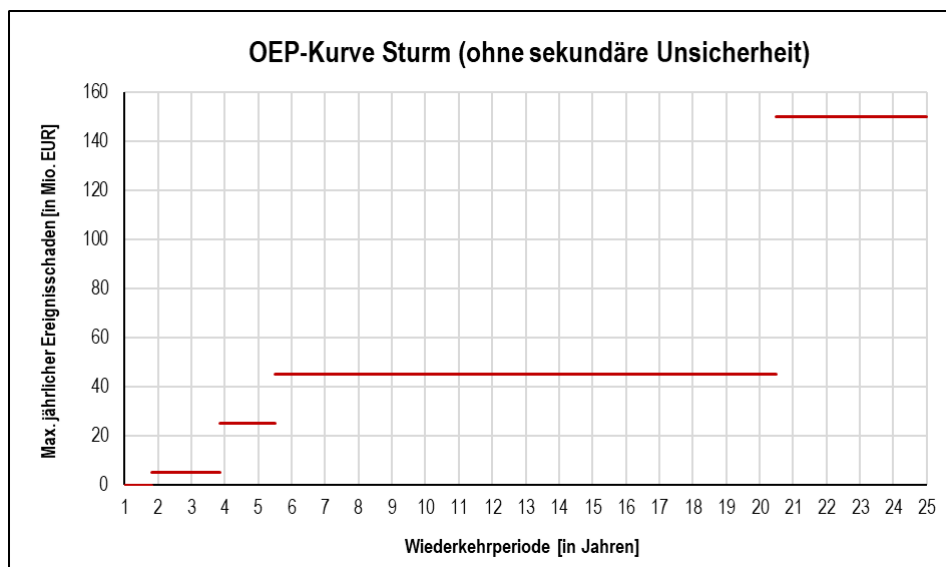


x	$F_X(x)$	$F_{M_N}(x)$	$1/(1 - F_{M_N}(x))$
0	0	0,4493	1,8
5	0,6250	0,7408	3,9
25	0,7500	0,8187	5,5
45	0,9375	0,9512	20,5
150	1,0000	1,0000	∞

Ergänzende Erläuterungen: Zusätzlich zu den Stützstellen 5, 25, 45 und 150 ist auch $F_{M_N}(x)$ an der Stelle $x = 0$ zu betrachten. Da die potentiellen Ereignisschäden (= Stützstellen) allesamt Werte größer als Null aufweisen, repräsentiert $M_N = 0$ gerade den Fall, dass innerhalb von einem Jahr kein Ereignis eintritt. Somit entspricht $F_{M_N}(0)$ der Wahrscheinlichkeit $P(N = 0) = \exp(-\lambda)$.

Wir erhalten daher insgesamt für die OEP-Kurve ohne sekundäre Unsicherheit:

T (in Jahren)	Max. jährlicher Ereignisschaden (in Mio. EUR)
$\leq 1,8$	0
$]1,8; 3,9]$	5
$]3,9; 5,5]$	25
$]5,5; 20,5]$	45
$> 20,5$	150





Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Ablauf Reserveprozess) [22 Punkte]

(a) [5 Punkte] In der Praxis vorkommende Zielsetzungen sind:

- Bestimmung der Rückstellungen für bilanzielle Zwecke (Überprüfung bzw. Plausibilisierung der HGB-Reserven, Ermittlung der versicherungstechnischen Rückstellungen nach Solvency II, Ermittlung der Schadenrückstellungen nach IFRS, US-GAAP oder anderen Standards)
- Unternehmensanalyse durch Ratig-Agentur
- Shareholder-Value Betrachtung bzw. Unternehmensbewertung für Kauf bzw. Verkauf
- Preisfindung bei retrospektiver Rückversicherung, Portfolioübertragung, Ablöseverhandlungen
- Ermittlung angemessener Tarifprämien bei versicherungstechnischen Tarifierungsansätzen
- Beurteilung der in der Bilanz ausgewiesenen Schadenrückstellungen für Risikomanagement, Planungsprozess, Asset Liability Management

(b) [17 Punkte] Die Stationen im Reserveprozess und ihre Bestandteile sind

- (1)** Daten - Datenarchitektur und -generierungsprozesse, Qualitätssicherungsprozesse, Validierungsprozesse
- (2)** Reserveberechnung - Analyse und Berechnung, Backtesting und Actual vs. Expected Analyse, Sensitivitätsanalysen, Kommunikation, Wissensaustausch und Diskussion, Erstellung Reservereport
- (3)** Unabhängige Validierung - Review des Prozesses, Angemessenheit der Daten, Angemessenheit der Methoden, Modelle und Annahmen, Backtesting, Überprüfung der Angemessenheit der Ergebnisse
- (4)** Offizielle Festlegung - Abstimmung der Ergebnisse mit betroffenen Stellen im Unternehmen, Vorstandsbeschluss
- (5)** Weiterverwendung - Veröffentlichung (Vorstände, Wirtschaftsprüfer, Organe, Geschäftseinheiten), Verwendung bei Tarifierung, Bilanzierung, Steuerung, Asset-Liability Management, etc.
- (D)** Prozessdokumentation - Prozessbeschreibung und Dokumentation internes Kontrollsystem, Reservebericht und Dokumentationen bzw. Protokolle für die einzelnen durchgeführten Prozessschritte

Dabei ist die Einordnung im Ablauf durch die Nummerierung (1) bis (5) gegeben. Die Prozessdokumentation lässt sich nicht in den Ablauf einordnen, sondern gehört zum gesamten Prozess.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Solvency II) [25 Punkte]

- (a) [3 Punkte] Der Beste Schätzwert entspricht dem wahrscheinlichkeitsgewichteten Durchschnitt künftiger Zahlungsströme unter Berücksichtigung des Zeitwerts des Geldes (erwarteter Barwert künftiger Zahlungsströme) und unter Verwendung der maßgeblichen risikofreien Zinskurve. Der Beste Schätzwert wird brutto, d.h. ohne Abzug der aus Rückversicherungsverträgen und von Zweckgesellschaften einforderbaren Beträge berechnet. Diese Beträge werden nach § 86 VAG gesondert berechnet. Der Beste Schätzwert abzüglich der einforderbaren Beträge (ohne Finanzrückversicherung) wird als Bester Netto-Schätzwert bezeichnet.
- (b) [3 Punkte] Die Schadenrückstellungen bedecken die Verpflichtungen aus bereits eingetretenen oder verursachten Schäden zu Verträgen, die vor dem oder zum Bilanzstichtag bestanden haben inkl. noch nicht anerkannter / unbekannter Rentenfälle. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Schaden bereits gemeldet wurde oder nicht.
- (c) [3 Punkte] Als Schadenregulierungskosten werden Zahlungen für Schadenregulierung bezeichnet. Sie können unterteilt werden in
- direkte Schadenregulierungskosten: einzelnen Schäden direkt zugeordnete Kosten, wie zum Beispiel vom Versicherungsunternehmen beauftragte Anwalts- oder Gutachterkosten und
 - indirekte Schadenregulierungskosten: allgemeine Kosten im Zusammenhang mit der Schadenregulierung, wie zum Beispiel Gehälter, Gebäude-, Material- oder EDV-Kosten, die einzelnen Schäden nicht verursachungsgerecht zugeordnet werden können.

Die zugehörigen zukünftigen Zahlungsströme sind Teil der Schadenrückstellungen, sofern die entsprechenden Schäden unter das Konzept der Schadenrückstellungen fallen.

- (d) [3 Punkte] Die Prämienrückstellung ist der Saldo aus dem Barwert der Verpflichtungen und dem Barwert zukünftiger (nach dem Bilanzstichtag fällig werdender) Prämien. Der Barwert der Verpflichtungen bezieht sich auf zukünftig eintretende Schadenfälle (inkl. daraus resultierender Rentenfälle) aus Verträgen, die zum Bilanzstichtag bestanden haben. Sie grenzt sich durch den Blick in die Zukunft von der Schadenrückstellung ab, durch welche bereits am bzw. vor dem Bilanzstichtag eingetretene Schadensfälle (unabhängig von der Meldung) Eingang in die Bilanz finden.
- (e) [7 Punkte] Bei der Berechnung der Prämienrückstellung sind sämtliche Zahlungsströme für alle am bzw. vor dem Bilanzstichtag abgeschlossenen Versicherungsverträge zu berücksichtigen, die auch nach dem Bilanzstichtag noch



ganz oder teilweise Versicherungsschutz gewähren oder auch beginnen. Entscheidend ist, ob der Tag, an dem das Versicherungsunternehmen Vertragspartner geworden ist bzw. der Tag, an dem der Versicherungsschutz beginnt, sofern dieser früher liegt, auf bzw. vor den Bilanzstichtag fällt.

Die Verträge aus (1), (3) und (4) sind zu berücksichtigen, der Vertrag aus (2) nicht.

- (f) [6 Punkte] Die Prämienrückstellung $BE_{premium}$ kann mit Hilfe einer geschätzten unternehmensindividuellen Schaden-Kosten-Quote und geschätzten zukünftigen Prämieinnahmen bestimmt werden:

$$BE_{premium} = (CR - AER) \cdot VM + (CR - 1) \cdot FP$$

Dabei gilt:

- $BE_{premium}$: undiskontierte Prämienrückstellung
- CR : geschätzte, undiskontierte Schaden-Kosten-Quote
- AER : geschätzte Abschlusskostenquote für Abschlusskosten des aktuellen Bestandes, die bis zum Laufzeitende bereits angefallen sind
- VM : ökonomische Beitragsüberträge aus bereits bekannten Verträgen
- FP : geschätzte, zukünftige, undiskontierte Brutto-Prämie für alle Verträge des aktuellen Bestandes, die gemäß der Grenzen der Versicherungsverträge zu berücksichtigen sind



Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Chain-Ladder Modell) [19 Punkte]

(a) [3 Punkte] Die Modellannahmen lauten:

(CL1) Die Anfalljahre $\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}$, $i = 1, \dots, n$, sind unabhängig.

(CL2) $E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \mid A_{i,k-1}\right) = f_k$ mit unbekanntem Abwicklungsfaktoren $f_k > 0$ für $k = 2, \dots, n$ und $i = 1, \dots, n$.

(CL3) $\text{Var}\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \mid A_{i,k-1}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k-1}}$ mit unbekanntem Parametern $\sigma_k > 0$ für $k = 2, \dots, n$ und $i = 1, \dots, n$.

Dabei bezeichnet $A_{i,k} = \{C_{i1}, \dots, C_{ik}\}$ für $i, k = 1, \dots, n$.

(b) [5 Punkte] Die üblichen Schätzer sind

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k}}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}} \quad \text{für } k = 2, \dots, n$$

und

$$\widehat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1} \left(\frac{C_{j,k}}{C_{j,k-1}} - \hat{f}_k \right)^2 \quad \text{für } k = 2, \dots, n-1.$$

Der Schätzer \hat{f}_k ist erwartungstreu nach (CL2) und varianzminimierend nach (CL3). Der Schätzer $\widehat{\sigma}_k^2$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für σ_k^2 .

(c) [6 Punkte] Für den Zufallsfehler im Abwicklungsjahr $k > n+1-i$ gilt nach (CL2) und (CL3)

$$\begin{aligned} \text{Var}(C_{i,k} \mid A_i) &= \text{Var}\left(E(C_{i,k} \mid A_{i,k-1}) \mid A_i\right) + E\left(\text{Var}(C_{i,k} \mid A_{i,k-1}) \mid A_i\right) \\ &= \text{Var}(C_{i,k-1} \cdot f_k \mid A_i) + E(C_{i,k-1} \cdot \sigma_k^2 \mid A_i) \\ &= \text{Var}(C_{i,k-1} \mid A_i) \cdot f_k^2 + E(C_{i,k-1} \mid A_i) \cdot \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Die Rekursionsformel ergibt sich für $k > n+2-i$ unmittelbar, indem f_k^2 durch \hat{f}_k^2 , σ_k^2 durch $\widehat{\sigma}_k^2$ und $E(C_{i,k-1} \mid A_i)$ durch $\widehat{C}_{i,k-1}$ geschätzt wird.

Bei $k = n+2-i$ ist $\text{Var}(C_{i,k-1} \mid A_i) = 0$ und $E(C_{i,k-1} \mid A_i) = C_{i,k-1}$, wodurch sich der Rekursionsanfang

$$\widehat{\text{Var}}(C_{i,n+2-i} \mid A_i) = C_{i,n+1-i} \cdot \widehat{\sigma}_{n+2-i}^2$$

ergibt.



(d) [5 Punkte] Mit der Bezeichnung $B_k = \{C_{i,j} \text{ mit } j \leq k, i+j \leq n+1\}$ ist bekanntlich

$$\text{Var}(\widehat{f}_k | B_{k-1}) = \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{f}_k^2 - \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}} | B_{k-1}\right) &= E(\widehat{f}_k^2 | B_{k-1}) - E\left(\frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}} | B_{k-1}\right) \\ &= \text{Var}(\widehat{f}_k | B_{k-1}) + E(\widehat{f}_k | B_{k-1})^2 - \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}} \\ &= f_k^2. \end{aligned}$$

Durch Bildung des Erwartungswerts folgt die Behauptung. Der Schätzer \widehat{f}_k^2 ist zwar nicht erwartungstreu, aber in der Praxis zeigt sich, dass er deutlich stabiler ist. So ist beispielsweise

$$\widehat{f}_k^2 - \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} C_{j,k-1}} < 0$$

möglich, was zu einer unsinnigen Schätzung für f_k^2 führen würde. Zudem liefert \widehat{f}_k^2 für die Schätzung von Zufalls- und Schätzfehler konservativere Werte, was auch ein Argument für diesen Schätzer sein kann.



Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Bestimmung von Tailfaktoren) [16 Punkte]

Es bezeichne C_{ik} mit $i = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, u$ mit $u \geq n$ die kumulativen Schadenstände (Anfalljahr i , Abwicklungsjahr k), wobei die Stände C_{ik} mit $i + k \leq n + 1$ als bekannt gelten.

- (a) [2 Punkte] Eine Schadenabwicklung nach mehr als n Abwicklungsjahren wird als Tail bzw. Nachlauf bezeichnet. Die Faktoren

$$f_k = \frac{E(C_{i,k})}{E(C_{i,k-1})} \quad \text{für } k = n + 1, \dots, u$$

heißen Tailfaktoren. Dabei wird die Unabhängigkeit der individuellen Faktoren $\frac{E(C_{i,k})}{E(C_{i,k-1})}$ vom Anfalljahr i vorausgesetzt.

- (b) [8 Punkte] Schritt (1) ist die Auswahl einer parametrischen Klasse von Abwicklungsfunktionen $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, beispielsweise $\phi(k) = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot k)$ mit $a, b > 0$.

Schritt (2) ist die Auswahl der Abwicklungsjahre $K \subset \{1, \dots, n\}$, die für die Schätzung des Tails verwendet werden sollen.

Schritt (3) ist die Schätzung der Parameter der Abwicklungsfunktion, im Beispiel a und b , beispielsweise durch Minimieren des gewichteten quadratischen Approximationsfehlers von

$$\sum_{k \in K} w_k (\phi(k) - \hat{f}_k)^2,$$

wobei die Gewichte w_k idealerweise Glaubwürdigkeit und Relevanz der \hat{f}_k ausdrücken sollen.

Schritt (4) ist schließlich die Schätzung $\hat{f}_k := \hat{\phi}(k)$ für $k = n + 1, \dots, u$.

- (c) [6 Punkte] In der Praxis sind viele Aspekte relevant. Eine Auswahl stellen folgende Punkte dar:

- Die Verwendung und Auswahl einer parametrischen Klasse von Abwicklungsfunktionen stellt eine sehr starke zusätzliche Modellannahme für die späten Abwicklungsjahre dar. Entscheidend ist nicht, wie gut die Kurve zu den Abwicklungsfaktoren der ersten n Abwicklungsjahre passt, sondern ob das weitere Abwicklungsmuster adäquat abgebildet ist. Daher ist die Verwendung von Informationen über typische Schadenbilder des Portfolios wichtiger als beispielsweise eine große Anzahl an Funktionenklassen zur Auswahl. So könnten beispielsweise schwere Personenschäden ein erneutes Ansteigen des Abwicklungsmusters in hohen Abwicklungsjahren verursachen, Regresse hingegen sogar Rückgänge bei Zahlungsdreiecken hervorrufen.



- Da die Tailfaktoren für Abwicklungsjahre $k > n$ verwendet werden, wird K typischerweise die höheren Abwicklungsjahre enthalten, während die ersten Abwicklungsjahre eher herausgenommen werden. Es kann sinnvoll sein, Ausreißer bei den \widehat{f}_k zu entfernen.
- Sowohl bei der Auswahl der Klasse von ϕ als auch bei der Wahl von K sollten aussagekräftige Grafiken zur Unterstützung verwendet werden.
- Häufig ist es sinnvoll, die Gewichte w_k umgekehrt proportional zu einer Varianzschätzung $\widehat{\text{Var}}(\widehat{f}_k)$ zu wählen. Hier ist aber Vorsicht geboten, wenn die Schätzung $\widehat{\text{Var}}(\widehat{f}_k)$ für ein Abwicklungsjahr k (zufällig) sehr klein ausfällt.
- In die Entscheidung, bis zu welchem Abwicklungsjahr Tailfaktoren verwendet werden, sollte sowohl die Größe der geschätzten Faktoren einfließen (keine irrelevant kleinen Faktoren verwenden), als auch Informationen über die Abwicklungsdauer typischer Schadenbilder.
- Die Verwendung von nur einem (kumulierten) Tailfaktor ist unhandlich, wenn Zahlungsströme erzeugt werden müssen (vgl. Solvency II).
- Abwicklungsmuster aus Benchmarkportfolios können eine Alternative zur obigen Tailfaktorschätzung sein oder wenigstens zur Validierung verwendet werden.



Lösungshinweise zu Aufgabe 8 (Das B/F Verfahren) [28 Punkte]

(a) [3 Punkte] Aus der Grafik liest man ab, dass die älteren, bereits weitgehend abgewickelten Anfalljahre Endschadenquoten zwischen 70% und 80% aufweisen. Nach einem Abwicklungsjahr liegen die Schadenquoten bei 8% bis 10%. Als grobe Schätzung für das Abwicklungsmuster ergibt sich $9\%/75\% \approx 12\%$, was gut zum ersten der beiden Abwicklungsmuster passt, nicht aber zum zweiten. Nach zwei Abwicklungsjahren liegen die Abwicklungsquoten der älteren Anfalljahre zwischen 16% und 22%. Hier ergibt sich für den zweiten Wert des Abwicklungsmusters eine Schätzung von $19\%/75\% \approx 25\%$, was wiederum zum ersten, nicht aber zum zweiten Abwicklungsmuster passt, welches in anfänglichen Abwicklungsjahren eine deutlich schnellere Abwicklung zeigt.

(b) [3 Punkte] Für die mittels Bornhuetter/Ferguson geschätzten Endschadenquoten gilt

$$\frac{\widehat{C}_{i,13}^{BF}}{v_i} = \frac{C_{i,14-i}}{v_i} + \hat{q}_i \cdot (1 - \hat{z}_{14-i}),$$

wobei die a-priori Schadenquoten mit \hat{q}_i und die kumulativen Stände des Abwicklungsmusters mit $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{13}$ bezeichnet wurden. Es folgt

$$\frac{\widehat{C}_{2,13}^{BF}}{v_2} = 76\% + 79\% \cdot (1 - 100\%) = 76\%$$

$$\frac{\widehat{C}_{12,13}^{BF}}{v_{12}} = 31\% + 75\% \cdot (1 - 26\%) = 86,5\% \approx 87\%$$

und

$$\frac{\widehat{C}_{13,13}^{BF}}{v_{13}} = 17\% + 76\% \cdot (1 - 12\%) = 83,88\% \approx 84\%.$$

(c) [5 Punkte] Die Abwicklungsgrafik lässt eine deutlich zyklische Bewegung erkennen. Über die Anfalljahre 1 bis 5 hinweg sanken die Schadenquoten von knapp 80% auf klar unter 70%. Danach zeigen die jeweils bekannten Schadenquotenstände ein sehr deutlich erkennbares ansteigendes Verhalten, von Anfalljahr zu Anfalljahr in der Gegend von 3% bis 5%, jeweils abgelesen im aktuellen Kalenderjahr.

Die gelieferten initialen Schadenquotenschätzungen der Anfalljahre 1 bis 5 passen gut zu dieser Beobachtung. Die Werte für die Anfalljahre 6 bis 9 zeigen wenigstens noch die gleiche Tendenz, die Ausprägung des Anstiegs von 68% auf 75% ist aber viel zu schwach. Ab Anfalljahr 10 stagnieren die gelieferten Schadenquoten, was in starkem Widerspruch zu den bisher beobachteten Schadenquotenverläufen steht.



Die Aussagen über einen im wesentlichen unveränderten Bestand deuten auf ein unverändertes Abwicklungsverhalten hin. Zusammen mit einer stabilen Schadeninflation mit entsprechenden Prämienkorrekturen passt dies zwar zu den initial erwarteten Schadenquoten, da diese in den jüngeren Anfalljahren annähernd konstant bleiben, steht aber in deutlichem Widerspruch zu den beobachteten Zahlungen.

Es besteht also das Problem, dass die wichtigsten Informationen, die für die Reservierung verwendet werden sollen, im Widerspruch zueinander stehen und damit keine verlässliche Basis für den Reserveprozess darstellen.

(d) [3 Punkte] Da die Schadeninflation unterschätzt wurde, fielen die Prämienkorrekturen der letzten drei Jahre zu gering aus, was zu einer Untertarifierung geführt hat. Eine dreijährige Unterschätzung der Schadeninflation um jeweils ca. 1% bei Schadenquoten um die 75% führt zu einer Unterschätzung von grob $3 \cdot 1\% \cdot 75\% = 2,25\%$. Die initial erwartete Schadenquote müsste also von 76% auf ca. 78% angehoben werden.

(e) [3 Punkte] Der Effekt der Untertarifierung hat zwar die richtige Tendenz, ist aber mit grob 2% Schadenquotenpunkten für das jüngste Anfalljahr viel zu klein, um den starken Anstieg der Schadenquoten in der Abwicklungsgrafik zu erklären. Setzt man die Verschlechterung für eine grobe untere Abschätzung mit 3% Schadenquotenpunkten pro Anfalljahr seit dem Anfalljahr 5 an, so ergibt sich

$$68\% + 8 \cdot 3\% = 92\%$$

als Untergrenze für das jüngste Anfalljahr.

(f) [3 Punkte] Dieser Sachverhalt kann das Problem erklären. Die über die Anfalljahre 7 bis 13 hinweg steigende Prämienlücke betrifft die richtigen Anfalljahre und passt sowohl in der Richtung, als auch in der Größenordnung zu dem gezeigten Schadenquotenanstieg. Die Größenordnung kann natürlich aus der Grafik heraus nur grob geschätzt werden, aber die um ein Drittel der Prämie berichtigte Anfangsschadenquote des Anfalljahres 13 liegt bei $\frac{2}{3} \cdot 17\% \approx 11\%$, was auf eine plausible Größenordnung hinweist.

(g) [2 Punkte] Die IBNR-Reserve wurde mittels B/F-Ansatz bei leicht zu niedrigen a-priori Schadenquoten (unterschätzte Schadeninflation) und deutlich zu niedriger Prämie ermittelt. Beide Effekte zusammen führen zu einer klar zu niedrigen IBNR-Schätzung. Damit ist das Unternehmen stark unterreserviert.

(h) [6 Punkte] In der gegebenen Situation müssen/sollten viele Schnittstellen informiert werden. Einige Beispiele sind:

- Der Vorstand, der die letztjährigen Reserven auf einer falschen Grundlage beschlossen hat.



- Die versicherungsmathematische Funktion, zu deren Aufgaben unter anderem die Gewährleistung bzw. Bewertung der Angemessenheit der Daten, Annahmen, Methoden und Ergebnisse der Reserveberechnungen gehört.
- Das Asset Liability Management, dessen Anlageentscheidungen auf falschen Zahlen beruhen und daher korrigiert werden müssen.
- Das interne Kontrollsystem, das nicht funktioniert hat und daher verbessert werden muss.
- Die IT-Abteilung, die den schweren Fehler im Reservierungsdatensystem beheben muss.
- ...