CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Grundlagen und quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 24. Mai 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey, E. Müller
Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Aufgabe 1. Fallstudie – Kommunikation im Zusammenhang mit einer Reserveproblematik. *[30 Punkte]* Sie sind seit kurzem Chefaktuar des weltweit tätigen, börsennotierten Versicherungskonzerns Trixia SE mit Hauptsitz in Hamburg. Sie berichten direkt dem Vorstandsvorsitzenden und sind Mitglied des Risikokomitees, in dem Ihr Chef den Vorsitz hat. Ihr Unternehmen betreibt alle Arten der Schaden- und Unfallversicherung in Deutschland und weltweit und hatte in 2018 eine verdiente Nettoprämie von etwa € 20 Mrd Euro, von denen etwa die Hälfte aus verschiedenen Haftpflichtsparten stammt. Das amerikanische Haftpflichtgeschäft (zu je etwa einem Drittel bestehend aus General Liability, Professional Liability und Workmen‘s Compensation) hatte in 2018 ein Netto-Prämienvolumen von etwa 2 Mrd US Dollar und wird von Ihrer in den USA zugelassenen Tochtergesellschaft Trixia US mit Sitz in Los Angeles betrieben.

Eine Ihrer ersten Aufgaben ist die Überprüfung der US-Reserven für den Jahresabschluß 2018. Hierfür kommen erstmals aktuarielle Methoden - insbesondere Chain Ladder - zum Einsatz. Anfang September 2018 zeigen Ihre Hochrechnungsergebnisse, dass per Ende 2018 ca. 1 Mrd US Dollar in den Bruttoreserven fehlen werden, von denen nur die Hälfte von den bestehenden Rückversicherungsprogrammen aufgefangen wird. Und auch hier besteht für ca. die Hälfte der Forderungen ein nicht unerhebliches Ausfallrisiko seitens der Rückversicherer.

(a) *[6 Punkte]* Welche Möglichkeiten sehen Sie, Ihre Ergebnisse zu kommunizieren?

(b) *[6 Punkte]* Angenommen, Ihr direkter Vorgesetzter kommentiert diesen Vorgang wie folgt: „Unsere Reserven waren immer in Ordnung. Das hat unser Aktuar in den USA jedes Jahr bestätigt. Sie müssen sich irren.“ Wie reagieren Sie?

(c) *[6 Punkte]* Mitte Oktober findet traditionell der Analystentag der Trixia SE statt. Hier werden Wertpapieranalysten über aktuelle Entwicklungen informiert. Sie haben die Aufgabe, die Reserveadäquanz darzustellen. Die Vorgabe Ihres Chefs lautet: „Sie werden die Analysten ja sicherlich davon überzeugen, dass mit unseren Reserven alles in Ordnung ist!“ Wie gehen Sie vor?

(d) *[6 Punkte]* Der Kommunikationschef Ihres Unternehmens, der den Analystentag vorbereitet, weiß von seinem ehemaligen Arbeitgeber, wie verheerend sich ein Vertrauensverlust auf den Aktienkurs auswirken kann. Dort hatte das Reserveloch zwar nur etwa 250 Mio Euro betragen, war aber in „Scheibchen“ über eine Periode von etwa einem halben Jahr berichtet worden, was im Kapitalmarkt verheerende Auswirkungen hatte. Dies hatte den damaligen Aktienkurs letztlich halbiert und damit etwa 1 Mrd Euro Marktwert vernichtet. Hiervon ist auch nach einer Erholungsphase nur die Hälfte wieder aufgeholt worden, so dass der Marktwertverlust incl. „Reputationverlust“ letztlich doppelt so hoch war, wie das Reserveloch allein. Ihr Kollege empfiehlt Ihnen daher, auf keinen Fall etwas zu sagen, was die Reputation der Trixia gefährden könnte. Wie gehen Sie damit um?

(e) *[6 Punkte]* Am Tag vor Ihrem „großen Auftritt“ ruft Sie ein Mitarbeiter der deutschen Aufsichtsbehörde BaFin an und fragt, inwieweit Ihr Unternehmen von den im Markt zu beobachtenden Abwicklungsverschlechterungen im US-Haftpflichtgeschäft betroffen ist. Wie antworten Sie?

Aufgabe 2. Fallstudie: Szenario-Betrachtungen – Änderungen Geschäftsmodell eines Lebensversicherers. Externe Beratung. *[30 Punkte]* Ein Lebensversicherungsunternehmen zieht in Erwägung, angesichts des andauernden Niedrigzinses sein Geschäftsmodell zu überarbeiten. In dem Zuge sollen auch Managementstrukturen verschlankt und Kosten gespart werden. Außerdem soll die Kapitalanlage auf nachhaltige Anlagen umgestellt werden.

Sie werden als externer Berater gebeten, das aktuell von der Geschäftsführung präferierte Szenario zu analysieren. Dabei sollen Sie Auswirkungen auf das Risikoprofil sowie die vorgeschlagene neue Ressort-Struktur des Unternehmens analysieren und dabei evtl. Schwachstellen und Risiken identifizieren. Außerdem werden Sie gebeten, Vorschläge zu entwickeln, wie diesen Risiken begegnet werden kann.

Zur aktuellen Position des Lebensversicherers: Die Versicherungstechnischen Rückstellungen betragen 20 Mrd. € und entfallen zu 14 Mrd. € auf klassische kapitalbildende Lebensversicherungen und Rentenversicherungen. 3 Mrd. € entfallen auf Risikolebensversicherungen und Berufsunfähigkeitsversicherungen. 3 Mrd. € entfallen auf fondsgebundene Versicherungen, bei den das Kapitalanlagerisiko von den Versicherungsnehmern getragen wird; die Erträge des Unternehmens aus diesem Geschäft speisen sich insbesondere aus Gebühren, die weitestgehend proportional zum Fondsguthaben erhoben werden. Die Brutto-Beiträge in Gesamthöhe von 2 Mrd. € entfallen zu 0,4 Mrd. € auf die fondgebundenen Versicherungen und zu 0,3 Mrd. € auf die Risikolebensversicherungen und Berufsunfähigkeitsversicherungen; 1,3 Mrd. € entfallen auf die klassischen Versicherungen: Die Kapitalanlagen in Gesamthöhe von 21 Mrd. € außer den Kapitalanlagen für die fondsgebundenen Versicherungen, die von den Versicherungsnehmern festgelegt werden, bestehen zu 15 Mrd. € aus festverzinslichen Wertpapieren, zu 2 Mrd. € aus Immobilien und 1 Mrd. € aus Aktien:

Aktiva		Passiva	
Zinspapiere	15	1	Eigenkapital
Aktien	1	14	Klassische LV und RV
Immobilien	2	3	Risikoversicherungen
FLV	3	3	FLV
Gesamt	21	21	Gesamt

Umbau des Portfolios: Dem Unternehmen liegt ein Angebot vor, nach dem es den Bestand an klassischen Versicherungen verkaufen kann. Als Kapitalanlagen würden ausschließlich festverzinsliche Wertpapiere übertragen. Auch Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter würden übernommen. Nach dem Verkauf hätte das Unternehmen eine Bilanzsumme von 7 Mrd. €, mit 6 Mrd. € versicherungstechnischen Rückstellungen sowie Kapitalanlagen, die zu 3 Mrd. € auf fondsgebundene Versicherungen entfallen, zu 2 Mrd. € auf Immobilien, zu 1 Mrd. € auf Aktien und zu 1 Mrd. € auf festverzinsliche Wertpapiere:

Aktiva		Passiva	
Zinspapiere	1	1	Eigenkapital
Aktien	1		
Immobilien	2	3	Risikoversicherungen
FLV	3	3	FLV
Gesamt	7	7	Gesamt

Die Bruttobeiträge lägen bei 0,7 Mrd. €. 1 Mrd. € soll in nachhaltige Kapitalanlagen investiert werden.

Umbau der Unternehmens- und Managementstruktur: Die Ressort- und Vorstandsstruktur soll deutlich verschlankt werden:

- Ressort 1: Vorsitz, Rechnungslegung, Revision
- Ressort 2: Versicherungstechnik (Verwaltung, Risikoprüfung, Produktentwicklung), versicherungsmathematische Funktion, Risikomanagement
- Ressort 3: Investmentmanagement, IT, Personal, Compliance

Bisher wurden die Kapitalanlagen von einer Kapitalanlagegesellschaft verwaltet. Dies soll nun im Unternehmen selbst geschehen. Expertise zu nachhaltigen Kapitalanlagen ist im Unternehmen bisher nicht vorhanden.

Für die fondsgebundenen Versicherungen soll angeboten werden, dass die Kapitalanlage einmal monatlich ohne Kosten geändert werden kann. Für Anlagen in nachhaltige Kapitalanlagen sollen zukünftig keine Gebühren anfallen. Um Verwaltungskosten einzusparen, sollen die Kunden in einem Online-Portal wesentliche Eingaben wie die Kapitalanlage aber auch Änderungen des Versicherungsschutzes selbst vornehmen können.

Mit dem Umbau möchte sich das Unternehmen als schlanker und schneller Versicherer mit stabilen Erträgen und niedrigen Kapitalmarktrisiken etablieren, der sich auf Schutz der Versicherungsnehmer und der Umwelt profiliert. Wachstum würde begrüßt ist aber nicht unbedingtes Ziel, da dem Unternehmen bekannt ist, dass der Markt eng ist.

Der bisher gemischte Bestand soll sukzessive umgebaut werden und es sollen vor allem umwelt- und gesundheitsbewusste Kunden gewonnen werden mit niedrigen Todesfall- und Berufsunfähigkeitsrisiken.

(a) *[15 Punkte]*) Analysieren Sie die Auswirkungen des Umbaus des Portfolios auf das Risikoprofil des Unternehmens. Bitte nennen Sie dazu alle Elemente eines üblichen Risikomanagement-Zyklus. Bitte nennen Sie Ziele, Chancen und Risiken sowie Maßnahmen im konkreten Kontext. Welche Risiken sind mit einem solchen Umbau für die Stabilität des Unternehmens verbunden? Welchen typischen neuartigen Risiken ist das Unternehmen – insbesondere durch die neuartigen Angebote an die Kunden – ausgesetzt?

(b) *[15 Punkte]* Analysieren Sie zunächst die vorgeschlagene Ressortverteilung auf mögliche Interessenkonflikte und schlagen Sie ggf. Lösungsansätze vor. Wie bewerten Sie das Ziel, die Kapitalanlage im Unternehmen selbst zu verwalten? Welche Herausforderungen für die Governance sehen Sie?

Aufgabe 3. Risikomaße und Extremwerttheorie. *[20 Punkte]* Die Schadengröße X sei Pareto(a, b)-verteilt mit den Parametern a und b, $a > 0$, $b > 1$, d.h. habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^b, \quad x \geq 0.$$

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie Value at Risk und Expected Shortfall von X zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, wobei $a > 0$ und $b > 1$ gilt.

(b) *[5 Punkte]* Berechnen Sie das asymptotische Verhältnis von ES zu VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

und setzen Sie das Ergebnis in Beziehung zu allgemeinen Aussagen aus der Extremwerttheorie.

(c) *[10 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen hat bisher seine jährlichen Verluste X aus operationalen Risiken mit Hilfe der Paretoverteilung mit den Parametern $a = 10$ und $b = 2.5$ modelliert. Analysen des Risikomanagements haben ergeben, dass diese Verteilung im Bereich der Schadenhöhen normaler Jahre angemessen ist, aber Zweifel aufgeworfen, ob extreme Verluste, wie sie in selten auftretenden Krisenjahren auftreten, durch den Verlauf des Tails der Verteilungsfunktion hinreichend erfasst werden.

Ein Workshop mit den Risk Ownern gelangt zu der Einschätzung, dass ein Krisenjahr durch das Überschreiten des Schadens über die Schwelle $u = 15.12$ charakterisiert wird. Gemäß der bisher verwendeten Verteilung tritt ein solches Krisenjahr mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(K) = 0.1$ ein. Die Experten halten diese Eintrittswahrscheinlichkeit für vernünftig und schätzen, dass der mittlere Verlust in einem Krisenjahr 40 beträgt. Der Risikomanager verfolgt zwei Ansätze, das Ergebnis des Workshops in die Verteilung von X mit einzubinden.

A) Anpassung einer neuen Pareto-Verteilung $F_1(x) = 1 - \left(\frac{a_1}{a_1+x}\right)^{b_1}$, die $F_1(15.12) = 0.9$ erfüllt und die Experteneinschätzung über den mittleren Verlust in einem Krisenjahr mit einbezieht. Es ergeben sich $a_1 = 6.1039$ und $b_1 = 1.8530$.

B) $F_2(x) = 0.9 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right)$, wobei die Parameter a_2 und b_2 mit Hilfe der Workshopergebnisse kalibriert werden sollen.

Ihnen sind die folgenden Eigenschaften der Pareto-Verteilung bekannt:

- $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a+u)^b}{(a+u+y)^b}$, $y \geq 0$
- $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a+u}{b-1}$

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Motivation der beiden Ansätze A) und B).

(ii) *[6 Punkte]* Vergleichen und beurteilen Sie die beiden Ansätze A) und B). Entwerfen Sie einen Vorschlag, wie Vorschlag B) umgesetzt werden kann. Gehen Sie dabei auch darauf ein, ob und, wenn ja, welche Informationen Sie von den Workshopteilnehmern für die Umsetzung benötigen.

Aufgabe 4. Risikomaße und Parameterrisiko. *[15 Punkte]* Die Schadengröße X sei exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter θ. Es soll der Einfluss des Parameterrisikos auf die Risikokapitalberechnung untersucht werden.

Hinweis.

- Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ lautet

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

- Der Erwartungswert beträgt $\frac{\alpha}{\beta}$, die Varianz $\frac{\alpha}{\beta^2}$.
- Der Zusammenhang mit der Exponentialverteilung lautet $\text{Exp}(\beta) = \text{Gamma}(1, \beta)$.
- Faltungsregel: Sind $X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$-verteilt, $i = 1, 2$, und unabhängig, so ist $X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$-verteilt.

(a) *[5 Punkte]* Zunächst wird ein Bayesianischer Modellierungsansatz gewählt. Der unbekannte Parameter Θ wird als $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$-verteilt modelliert. Die Bayesianische Analyse auf Basis der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ ergibt die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung von X:

$$F(x|x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n x_i}{\beta + \sum_{i=1}^n x_i + x} \right)^{\alpha+n}, \quad x \geq 0.$$

Die Analyse des asymptotischen Verhaltens der Vorhersageverteilung für $n \to \infty$ führt auf folgende Ergebnisse:

1) Die Varianz der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen 0. Die Grenzverteilung ordnet einem Wert $\bar{\theta}$ die Wahrscheinlichkeit 1 zu.

2) Für den Value at Risk $\text{VaR}_\lambda^{(n)}$ der Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \text{VaR}_\lambda^{(n)} = -\frac{1}{\bar{\theta}} \cdot \ln(1 - \lambda)$$

Geben Sie eine ökonomische Erklärung für die Eigenschaften 1) und 2) an und interpretieren Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \text{VaR}_\lambda^{(n)}$ darstellt.

Tipp. Welches Risikomaß welcher Größe stellt $-\frac{1}{\bar{\theta}} \cdot \ln(1 - \lambda)$ dar?

(b) Alternativ soll das Residualrisiko bei Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers untersucht werden.

(i) *[5 Punkte]* Quantifizieren Sie mit Hilfe des Risikomaßes VaR_α das Residualrisiko, wenn der Value-at-Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ unter Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ für den Parameter θ auf Basis von n Beobachtungsdaten bestimmt wird. Analysieren Sie das Verhalten des Residualrisikos für $n \to \infty$ und erklären es aus ökonomischer Sicht.

(ii) *[5 Punkte]* Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Bestimmung des Residualrisikos aus (i) per Simulation, wenn Ihnen ein Zufallszahlengenerator für gammaverteilte Zufallszahlen zur Verfügung steht.

Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten. *[19 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen verfüge über Schadendaten der Form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, wobei X_i die Schadenhöhe und Y_i die sogenannten *allocated loss adjustment expenses* (ALAE) beschreibt. (Die ALAE umfassen beispielsweise Anwalts- und Gutachterkosten im Zusammenhang mit der Schadensabwicklung). Ein scatter Plot der losses findet sich in Bild 1.

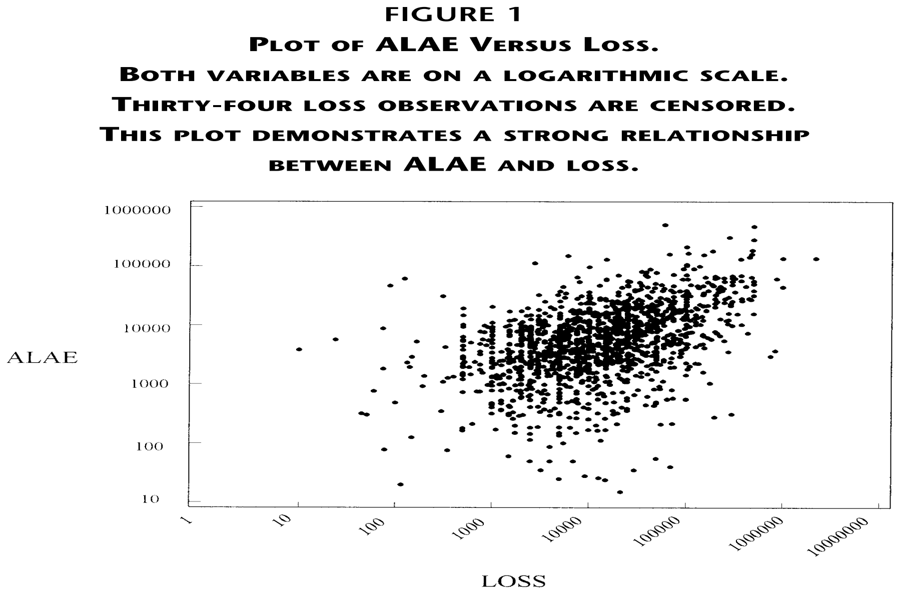

Abbildung 1: Scatter plot der Schadendaten; (aus Frees-Valdez (97)).

(a) *[2 Punkte]* Erläutern Sie kurz, warum man Abhängigkeiten zwischen Schadenshöhe X und ALAE Y erwarten sollte.

(b) *[7 Punkte]* Zur Modellierung der gemeinsamen Verteilung von X und Y wird eine Gumbel copula mit Parameter θ verwendet; es gilt

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \leq \theta < \infty .$$

Zur Modellierung der Verteilung von X und Y werde eine Pareto Verteilung mit Parametern λ_X, α_X bzw. λ_Y, α_Y verwendet mit $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, d.h.

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \geq 0,$$

und analog für Y. Begründen Sie qualitativ, warum die Gumbel copula gut zur Beschreibung der in Bild 1 dargestellten Daten geeignet ist, und geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ an.

(c) (i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie zwei Methoden zur Schätzung von θ.

(ii) *[6 Punkte]* Sie haben die folgenden 4 Beobachtungen von X und Y.

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für θ. Hinweis: Für die Gumbel copula gilt $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$.

Aufgabe 6. Counterparty Risk. *[18 Punkte]* Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt t aus Sicht von B sei mit V_t bezeichnet; die Fälligkeit sei T. (Beispiele für einen derartigen Vertrag sind credit default swaps und Rückversicherungsverträge).

(a) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, was man in diesem Zusammenhang unter counterparty risk versteht, und diskutieren Sie kurz zwei verschiedene Techniken zum Management dieser Risikokategorie.

(b) In der oben skizzierten Situation ist die Bewertungskorrektur für den Vertrag aus Sicht des protection buyers B durch

$$\mathrm{CVA} = \delta_S\, \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S < T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\big)$$

gegeben. Hier ist $r \geq 0$ der risikofreie Zinssatz, τ_S die Ausfallzeit und und δ_S der loss given default von S.

(i) *[4 Punkte]* Nehmen Sie an, dass δ_S deterministisch ist und dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen das CVA durch

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei f_S die Dichte der Ausfallzeit τ_S bezeichnet.

(ii) *[4 Punkte]* Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $E^Q(V_t^+)$ konstant gleich 100 und τ_S unter Q exponentialverteilt mit Parameter γ_S ist. Kann der Parameter γ_S aus am Markt beobachteteten CDS spreads auf S kalibriert werden?

(iii) *[4 Punkte]* Bei der Herleitung der Formel für das $\text{CVA}^{\text{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Diskutieren Sie am Beispiel eines Rückversicherungsvertrags, warum die bei der Herleitung von der Formel für $\text{CVA}^{\text{indep}}$ gemachte Unabhängigkeitsannahme in der Praxis problematisch sein kann.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. *[29 Punkte]* Die Short Rate $r(t)$ werde unter dem realen Maß im Vasicek-Modell mit den Parametern $a = 0.36$, $b = 0.06$ und $\sigma = 0.03$ beschrieben:

$$dr(t) = a(b - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t \quad \text{(RW)}$$

Es ist $r(0) = 0.02$. Sei ferner $\lambda = 0.2$ der Marktpreis des Risikos. Dann folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q dem Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\,dt + \sigma\,dW_t^Q \quad \text{(RN)}$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Ein Versicherungsunternehmen hat zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Bedeckung der Zahlungsverpflichtungen, die aus Zahlungen der Höhe 100 zu den Zeitpunkten $t = 2$ und $t = 3$ bestehen, eine Rückstellung in Höhe des Marktwerts der Verpflichtungen gebildet und in einen Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ investiert.

Hinweis. Der Erwartungswert des stochastischen Diskontierungsfaktors $D(t,T)$ ist im Vasicek-Modell gegeben durch

$$\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$$

- Unter dem **realen Maß** ist

$$\begin{aligned} A(t,T) &= 0.565278\cdot(T-t-B(t,T)) + 0.000625\cdot B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= 2.777778\cdot\left(1-e^{-0.36\cdot(T-t)}\right), \end{aligned}$$

  und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(0.06 + (r(0)-0.06)e^{-0.36t},\, 0.00125\cdot\left(1-e^{-0.72t}\right)\right).$$

- Unter dem **risikoneutralen Maß** ist

$$\begin{aligned} A(t,T) &= 0.039861\cdot(T-t-B(t,T)) + 0.000625\cdot B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= 2.777778\cdot\left(1-e^{-0.36\cdot(T-t)}\right), \end{aligned}$$

  und es gilt

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(0.06 + (r(0)-0.043333)e^{-0.36t},\, 0.00125\cdot\left(1-e^{-0.72t}\right)\right).$$

- Es gilt $\Phi^{-1}(0.95) = 1.6449$.

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie den Betrag L der Rückstellung.

(b) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Swap-Rate S für den Zeitraum $[1, 3]$, wenn die Zahlungszeitpunkte $t = 2, 3$ vereinbart sind.

(c) *[18 Punkte]* **Gehen Sie im Folgenden ungeachtet Ihrer Ergebnisse unter a) und b) von $L = 186.70$ und $S = 0.03127$ aus.**

Das Versicherungsunternehmen erwägt, zur Reduktion des Zinsänderungsrisikos einen Receiver-Swap für den Zeitraum $[1, 3]$ mit Swap-Rate S, Nominal $N = 100$ und Zahlungszeitpunkten $t = 2, 3$ abzuschließen.

Ermitteln Sie zum Zeitpunkt 0 in den beiden Fällen, dass

A) kein Receiver-Swap abgeschlossen wird,

B) der obige Receiver-Swap abgeschlossen wird,

das benötigte Risikokapital, das mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ausreicht, um zum Zeitpunkt 1 mögliche Marktwertsteigerungen der Verpflichtungen infolge des Zinsrisikos auszugleichen.

(d) *[4 Punkte]* Beurteilen Sie die Strategie, Risiko durch Abschluss des Receiver-Swaps aus Teil (c) zu reduzieren, aus Sicht der Unternehmenssteuerung, indem Sie auf die Kosten der Absicherung, die Kapitalkosten für das benötigte Risikokapital und die Ertragschancen eingehen.

Aufgabe 8. Kreditrisiko im 1-Faktor Modell und CDOs. *[19 Punkte]* Betrachten Sie für festes $m \in \mathbb{N}$ und einen Korrelationsparameter $\rho \in [0, 1]$ unabhängige $N(0, 1)$ verteilte Zufallsvariablen $V, \epsilon_1, \dots \epsilon_m$ und setzen $X_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i$, $1 \le i \le m$.

(a) *[3 Punkte]* Begründen Sie, warum die copula des Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ durch C_R^{Ga}, die Gauss copula mit Korrelationsmatrix $R_{ij} = \rho$, $1 \le i, j \le m, i \neq j$, gegeben ist.

(b) Betrachten Sie ein Portfolio von m homogenen Firmen mit Ausfallzeiten $\tau_1, \dots, \tau_m$. Es gelte $P(\tau_i \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$; die copula von $\tau_1, \dots, \tau_m$ sei durch C_R^{Ga} gegeben.

(i) *[1 Punkt]* Geben Sie die Verteilungsfunktion F von $\tau_1, \dots, \tau_m$ an.

(ii) *[7 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der es Ihnen erlaubt, eine Realisation von $\tau_1, \dots, \tau_m$ zu generieren, die gemäß F verteilt ist.

(c) *[4 Punkte]* Erläutern Sie mindestens einen Grund, warum CDOs als Instrumente zur Verbriefung von Kreditrisiken eingesetzt werden und diskutieren Sie zwei mit diesen Finanzinstrumenten verbundene Probleme.

(d) *[4 Punkte]* Es bezeichne $\overline{L}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{\{\tau_i \leq T\}}$ den prozentualen Verlust eines Kreditportfolios, das aus den Firmen 1 bis m besteht, und $\overline{N}_T = 1 - \overline{L}_T$ sei der Nennwert des Portfolios in T (der Anteil des Portfolios, der nicht ausgefallen ist). Wir betrachten eine stilisierte CDO mit zwei Tranchen (equity und senior). Gegeben einen Attachment Point $\kappa \in [0,1]$, beispielsweise $\kappa = 10\%$, sei die Auszahlung der Equity Tranche gegeben durch $E_T = [\kappa - L_T]^+$; die Auszahlung der Senior Tranche beträgt $S_T = \min\{\overline{N}_T, 1-\kappa\} = 1-\kappa-[\overline{L}_T-\kappa]^+$. Diskutieren Sie, wie sich die erwartete Auszahlung $E(E_T)$ und $E(S_T)$ verändert, falls der Korrelationsparameter ρ wächst. Gehen Sie in diesem Zusammenhang auch kurz auf das Modellrisiko im Zusammenhang mit der Bewertung von CDO Kontrakten ein.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Fallstudie: Kommunikation im Zusammenhang mit einer Reserveproblematik.

(a) Sie fertigen eine detaillierte Ausarbeitung an und legen diese zeitnah Ihrem Vorgesetzten vor mit der Empfehlung, Ihre Ergebnisse in der nächsten Sitzung des Risikokomitees im Detail vorzustellen. Für die anstehenden Jahresabschlussarbeiten schlagen Sie vor, bei der Reservierung Ihre Ergebnisse zu berücksichtigen.

(b) Sie erläutern Ihrem Vorgesetzten, dass Sie anerkannte aktuarielle Methoden angewendet haben, mit denen Sie zu Ihren Ergebnissen gekommen sind. Sie bitten darum, die bisherigen Berechnungen des US-Aktuars einsehen zu dürfen. Sie schlagen vor, kurzfristig eine Drittmeinung durch Einschaltung eines externen aktuariellen Beratungsunternehmens einzuholen.

(c) Sie sehen sich die bisherigen (insbesondere die letztjährigen) Verlautbarungen den Analysten gegenüber an und versuchen herauszufinden, ob diese die Realität angemessen widergespiegelt haben. Sie schlagen notwendige Anpassungen mit dem Hinweis vor, dass Sie öffentliche Stellungnahmen nur zu Zahlen abgeben können, die Sie als Aktuar vertreten können. Hierbei gibt es sicherlich einen Spielraum, innerhalb dessen Sie sich bewegen können. Sie haben aber die Aufgabe, klarzustellen, welche Zahlen Sie (ggf. gerade noch) als „in Ordnung" gegenüber den Analysten vertreten können.

(d) Sie bitten um einen gemeinsamen Termin mit dem Kommunikationschef und Ihrem Vorgesetzten, in dem Sie zusammen mit den Kollegen eine Kommunikationsstrategie entwickeln, die sich an einer realistischen Reserveeinschätzung orientiert. Dabei versuchen Sie, in Ihrer Analystenpräsentation hervorzuheben, an welchen Stellen Ihr Unternehmen von einer Marktentwicklung betroffen wurde, unter der auch andere Marktteilnehmer zu leiden haben.

(e) Sie antworten, dass Sie als Aktuar an dieser Problematik arbeiten und es erste Ergebnisse gibt, die in die Richtung eines Abwicklungsverlustes deuten. Sie erläutern, dass es bei Analysen dieser Art immer einen erheblichen Spielraum bei den Ergebnissen gibt. Sie bitten darum, erst die interne Festlegung der Ergebnisse abzuwarten und dann zeitnah eine Rückmeldung zu geben. Intern stimmen Sie mit Ihrem Vorgesetzten und dem Kommunikationschef die finalen (realistischen) Zahlen ab, die letztlich sowohl an die Analysten als auch an die BaFin weitergegeben werden.

Aufgabe 2. Fallstudie: Szenario-Betrachtungen – Änderungen Geschäftsmodell eines Lebensversicherers. Externe Beratung.

(a) Ein üblicher Risikomanagement-Zyklus umfasst folgende Elemente:

1. Ziele setzen.
2. Identifikation von Chancen und Risiken / Gefahren für die Ziele.
3. Risiken bewerten und messen.
4. Umgang mit Risiken und Kontrollen.
5. Information und Kommunikation (zu Risiken).
6. Monitoring / kontinuierliche Verbesserung

Es sollten alle sechs Elemente in etwa der Form genannt werden [3 Punkte].

Ziele des Unternehmens werden in der Aufgabenstellung genannt:

- Stabile Erträge
- Reduktion der Kosten für Unternehmen und Kunden
- Reduktion der Kapitalmarktrisiken
- Neuartige, flexible Angebote an die Kunden
- Etablierung als Versicherer bei umwelt- und gesundheitsbewussten Kunden

Es sollten mindestens drei der genannten Ziele identifiziert werden [3 Punkte].

Auswirkungen auf das Risikoprofil sowie Chancen und Risiken für die Erreichung der Ziele:

- Chancen und Risiken für stabile Erträge:
  - Risikoversicherungen weisen bei einem mittelgroßen Bestand Schwankungen auf.
  - Die Erträge aus den fondsgebundene Versicherungen hängen vom Wert der Kapitalanlagen ab und sind daher den Kapitalmarktrisiken unterworfen.
  - Würde das Ziel erreicht, dass die Kunden der fondsgebundenen Versicherung fast ausschließlich in nachhaltige Kapitalanlagen investieren, verschwinden die Erträge aus diesem Portfolio.

   - Nach dem Umbau hat das Unternehmen einen hohen Anteil an Aktien im Portfolio.
   - Durch die Konzentration auf Geschäft mit kurzen Laufzeiten und auf fondsgebundenes Geschäft können Zinsrisiken reduziert und Kapitalanlagerisiken auf Kunden verlagert werden.
   - Hohe Fluktuationen in der Belegschaft in der Umbauphase.
   - Nachhaltige Kapitalanlagen haben langfristigen und eingeschränkt liquiden Charakter, Risikoversicherungen eher kurzfristigen Charakter.
   - Durch niedrige Beiträge und langfristige nachhaltige Kapitalanlagen könnten Liquiditätsrisiken entstehen.
   - Das Verständnis dessen, was eine nachhaltige Kapitalanlage ist, ist (noch) nicht vollständig etabliert. Insofern könnten aus unterschiedlichen Einschätzungen von Kunden und Unternehmen Reputationsrisiken entstehen.

- Chancen und Risiken für die Reduktion der Kosten für Unternehmen und Kunden:
   - Hohe Anfangsinvestitionen in neue IT-Infrastruktur.
   - Hohe Kosten für den Aufbau einer eigenen Kapitalanlageverwaltung
   - Das Ziel-Segment der Kunden hat mutmaßlich eine hohe Bereitschaft einen Teil der Verwaltung der Verträge selbst zu übernehmen.
   - Neuartige Risiken: Cyber-Risiken wegen starker Online-Angebote.

Es sollten mindestens 6 der genannten Chancen und Risiken genannt werden und dabei nicht ausschließlich Risiken [6 Punkte].

Mögliche Maßnahmen zu Umgang und Kontrolle der Risiken:

- Rückversicherung für die biometrischen Risiken
- Absicherungsinstrumente für das Aktienportfolio
- Umbau der Kapitalanlage auf liquide Anlagen
- Einführung eines Staffelsystems von Gebühren für die fondsgebundenen Versicherungen, in dem nachhaltige Kapitalanlagen nicht vollständig befreit werden.

Es sollten mindestens 3 der genannten Maßnahmen genannt werden [3 Punkte].

(b) In der Ressortverteilung fällt auf, dass in den Ressorts 2 und 3 die Zeichnung von Risikopositionen mit Funktionen der Risikokontrolle auf der „second line of defense" kombiniert werden.

- In Ressort 2 wird die Festlegung der Preise für die Versicherungen und die Risikoprüfung mit der versicherungsmathematischen Funktion kombiniert, die u.a. eine Stellungnahme zu der Zeichnungspolitik abgegeben soll.
- In Ressort 2 wird außerdem die Risikomanagementfunktion angesiedelt, die u.a. die versicherungstechnischen Risiken bewerten soll.
- In Ressort 3 wird die Compliance-Funktion angesiedelt, die insbesondere auch der Kapitalanlage die Einhaltung der gesetzlichen Vorgaben kontrollieren soll. Angesichts der Orientierung des Unternehmens auf umweltbewusste Kunden und Profilierung als nachhaltiges Unternehmen, kommt der Einhaltung der Vorgaben eine hohe Bedeutung zu.
- In Ressort 1 ist neben der Revision auch die Rechnungslegung angesiedelt. Insbesondere unter SOX kommt einer einwandfreien Finanzberichterstattung eine zentrale Bedeutung zu. Insofern ist die Kombination nicht ideal.

Es sollten mindestens die ersten drei Punkte identifiziert und die Konflikte benannt werden. [6 Punkte]

Mögliche Maßnahmen wären:

- Etablierung von Komitee-Lösungen, in denen die alleinige Ressortzuständigkeit aufgelöst wird.
- Änderung der Zuordnung zu den Ressorts:
  - Zuordnung der Compliance-Funktion und der Risikomanagementfunktion zu Ressort 1.
  - Zuordnung der versicherungsmathematischen Funktion zu Ressort 3.
  - Zuordnung der Rechnungslegung zu Ressort 3.
- Outsourcing einzelner Kontroll-Funktionen.

Es sollten mindestens zwei dieser Maßnahmen genannt werden. [4 Punkte]

Herausforderungen bei der Übernahme der Kapitalanlage-Verwaltung in das Unternehmen:

- Kapitalanlage erfordert eine hohe Expertise und schnelle Systeme, die hohe Basiskosten mit sich bringen und bei der Größe des Unternehmens nach dem Umbau des Portfolios gegen das Ziel eines schlanken Versicherers mit niedrigen Kosten abgewogen werden müssen.

- Nachhaltige Kapitalanlagen erfordern in der Regel eine Bewertung auf Expertenbasis, da die Märkte (noch) nur eingeschränkt tief und liquide sind.
- Expertise für nachhaltige Kapitalanlagen ist rar und damit nicht günstig einzukaufen.
- Die angebotene monatliche Umschichtung in der fondsgebundenen Versicherung erfordern schnelle Systeme und gute Marktzugänge.
- Front- und Back-Office sowie Kapitalanlage-Risiko-Controlling sind angemessen zu trennen.

Mindestens die Spiegelstriche 1, 2 und 5 sind zu benennen. [5 Punkte]

Aufgabe 3. Risikomaße und Extremwerttheorie.

(a) Auflösen der Gleichung $1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^b = \alpha$ nach x führt auf den Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - a.$$

Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(a(1-z)^{-\frac{1}{b}} - a\right) dz \\
&= -\frac{a}{1-\alpha}\left[\frac{b}{b-1}(1-z)^{1-\frac{1}{b}}\right]_\alpha^1 - a \\
&= \frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - a.
\end{aligned}$$

(b) Da $(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}$ für $\alpha \to 1$ gegen unendlich konvergiert, gilt

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}{a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}} = \frac{b}{b-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{b}}.$$

Da die Überlebensfunktion der Pareto Verteilung polynomial mit Parameter $\xi = 1/b$ abfällt, ist dies ein Spezialfall der in der Extremwerttheorie hergeleiteten Asymptotik für das Verhältnis $\mathrm{ES}_\alpha(X)/\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

(c) Wir zeigen zunächst außerhalb der Aufgabenstellung die angegebenen Eigenschaften der Verteilung der Überschreitung einer Schwelle. Wir berechnen

$$\mathbb{P}(X > u+y \mid X > u) = \frac{\mathbb{P}(X > u+y)}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{(a/(a+u+y))^b}{(a/(a+u))^b} = \frac{(a+u)^b}{(a+u+y)^b}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-u \mid X>u) &= \int_0^\infty y \cdot b(a+u)^b(a+u+y)^{-b-1}\,dy \\
&= \int_0^\infty b(a+u)^b(a+u+y)^{-b}\,dy-(a+u) \\
&= -\frac{b}{b-1}(a+u)^b(a+u+y)^{-b+1}\Big|_0^\infty-(a+u) \\
&= \frac{b}{b-1}(a+u)-(a+u)=\frac{a+u}{b-1}.
\end{aligned}$$

(i) In Ansatz A) wird die Paretoverteilung beibehalten, da sie eine geeignete Verteilung für heavy-tailed Schäden aus operationellen Risiken darstellt. Sie wird jedoch mit den Ergebnissen des Workshops rekalibriert, indem die beiden Parameter a_1 und b_1 so gewählt werden, dass die Schwelle $u=15.12$ wie bisher mit Wahrscheinlichkeit 0.1 überschritten wird und die mittlere Überschreitung $\mathbb{E}(X-15.12 \mid X>15.12)=24.88=40-15.12$ beträgt.

Ansatz B) stellt eine Mischung der Verteilungsfunktionen für ein normales Jahr und für ein Krisenjahr dar:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X\le x) &= (1-\mathbb{P}(K))\cdot\mathbb{P}(X\le x \mid \bar{K})+\mathbb{P}(K)\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K) \\
&= 0.9\cdot\left(1-\left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right)+0.1\cdot\mathbb{P}(X\le x\mid K),
\end{aligned}$$

wobei ein normales Jahr durch die bisherige Pareto-Verteilung mit den Parametern 10 und 2.5 beschrieben wird, die sich in Normaljahren bewährt hat, während ein Krisenjahr durch eine neu zu kalibrierende Paretoverteilung auf Basis der Workshopergebnisse modelliert wird.

(ii) Ansatz A) kalibriert die Paretoverteilung allein auf Basis der Experteneinschätzungen über Eigenschaften des Tails, nämlich der Überschreitungswahrscheinlichkeit einer Schwelle und der mittleren Überschreitung dieser Schwelle. Damit wird nur Information über Extremschäden einbezogen. Ansatz A) ignoriert die Analyse des Risikomanagements, dass Schäden in Normaljahren durch die bisher verwendete Verteilung gut beschrieben wurden.

Ansatz B) hingegen übernimmt die bisherige Verteilung für die Modellierung der Normaljahre und verwendet die Expertenenschätzungen ausschließlich für die Modellierung der Krisenjahre. Um die beiden Parameter der Paretoverteilung für Krisenjahre zu kalibrieren, wird neben der vorhandenen Information $e(15.12)=40-15.22=24.88$ eine weitere Bedingung benötigt. Die Teilnehmer könnten beispielsweise gefragt werden, für wie wahrscheinlich sie die Überschreitung der Schwelle $2\cdot 15.12=30.24$ in einem Krisenjahr halten. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $\left(\frac{a_2+15.12}{a_2+30.24}\right)^{b_2}$.

Aufgabe 4. Risikomaße und Parameterrisiko. Wir führen zunächst die Bayesianische Analyse durch, die nicht Bestandteil der Aufgabenstellung ist.

Die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_1, ergibt sich modulo konstanter Terme zu

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta)\\ &\propto \theta\exp(-\theta x_1)\cdot\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)\\ &= \theta^{\alpha}\cdot\exp(-(\beta+x_1)\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).\end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von Gamma$(\alpha+1,\beta+x_1)$. Folglich gilt

$$\pi(\theta|x_1)=\frac{(\beta+x_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\theta^{\alpha}\cdot\exp(-(\beta+x_1)\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Die Randdichte $m(x)$ von X erhalten wir als Quotient von gemeinsamer Dichte und a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned}m(x) &= \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)}\\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\Big/\frac{(\beta+x_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\\ &= \alpha\beta^{\alpha}\cdot(\beta+x)^{-(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Die Randverteilungsfunktion F von X ergibt sich durch Integration der Dichte m aus a):

$$F(x)=1-\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha}.$$

Wie die Randverteilungsdichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a priori Dichte entsteht, so entsteht die Vorhersagedichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned}m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta,\\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta.\end{aligned}$$

Daher erhalten wir die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung, indem wir in der Randverteilungsfunktion die Parameter der a priori Verteilung durch diejenigen der a posteriori Verteilung ersetzen:

$$F(x|x_1)=1-\left(\frac{\beta+x_1}{\beta+x_1+x}\right)^{\alpha+1}.$$

Iterativ ergibt sich die Vorhersageverteilung auf Basis von n Beobachtungen

$$F(x|x_1,\dots,x_n)=1-\left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{\beta+\sum_{i=1}^n x_i+x}\right)^{\alpha+n}.$$

(a) Der Grenzwert $\mathrm{VaR}_\lambda^{(\infty)} := -\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\lambda)$ ist der Value at Risk der Beobachtungsverteilung zum Niveau λ unter der Voraussetzung, dass θ der richtige Parameterwert ist. Dies überprüft man leicht durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Beobachtungsverteilung

$$F(x|\theta)=1-\exp(-\theta x).$$

Mit jeder Beobachtung wächst die Information über den Parameter Θ an. Im Grenzübergang $n\to\infty$ verschwindet die Varianz der a posteriori Verteilung, d.h. es besteht keine Parameterunsicherheit mehr. Der Wert θ ist bekannt. Daher konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung $\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$ gegen den Value at Risk $\mathrm{VaR}_\lambda^{(\infty)}$ der Beobachtungsverteilung, gegeben θ.

Wir führen noch den Nachweis der angegebenen Resultate, der **nicht** Bestandteil der Aufgabenstellung ist.

Mit dem Gesetz der großen Zahl beobachten wir die Konvergenz der Erwartungswerte der a posteriori Verteilung

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\Theta|x_1,\ldots,x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{n}+1}{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

und die Konvergenz der Varianzen

$$\lim_{n\to\infty}Var(\Theta|x_1,\ldots,x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+n}{\left(\beta+\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}=\frac{0}{(\mathbb{E}(X))^2}=0.$$

Folglich konvergieren die a posteriori Verteilungen von $\Theta|x_1,\ldots,x_n$ gegen das Dirac-Maß im Punkt $\theta=\frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

Der Value at Risk der Vorhersageverteilung aus b) zum Niveau $\lambda\in(0,1)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}:=\mathrm{VaR}_\lambda(X|x_1,\ldots,x_n)=\frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha+n}}}-\beta-\sum_{i=1}^n x_i,$$

wie man durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung unter b) überprüft. Im Grenzübergang $n\to\infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha+n}\left(\frac{(1-\lambda)^{-\frac{1}{\alpha+n}}-1}{\frac{1}{\alpha+n}}\right)\\ &= \mathbb{E}(X)\cdot(-\ln(1-\lambda))\\ &= -\frac{1}{\theta}\ln(1-\lambda).\end{aligned}$$

(b) (i) Ist θ der wahre Parameter, so ist $\mathrm{VaR}_{\alpha;\theta}(X)=-\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}$. Folglich ist der residuale Schätzfehler gegeben durch

$$RR(X)=\mathrm{VaR}_\alpha\left(X-\mathrm{VaR}_{\alpha;\hat\theta}(X;\hat\theta)\right)=VaR_\alpha\left(X+\frac{\ln(1-\alpha)}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Im Grenzübergang $n\to\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}X_i=\mathbb{E}(X_1)=\frac{1}{\theta}$ und folglich

$$\lim_{n\to\infty}RR(X)=\mathrm{VaR}_\alpha\left(X+\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)=\mathrm{VaR}_\alpha\left(X-\mathrm{VaR}_\alpha(X)\right)=0.$$

Im Grenzfall unendlich vieler Beobachtungen liefert der Maximum-Likelihood-Schätzer den wahren Parameterwert, so dass kein Parameterrisiko mehr verbleibt.

(ii) Gemäß der Faltungsregel gilt $\sum_{i=1}^n X_i\sim \mathrm{Gamma}(n,\theta)$. Sei $\hat\theta:=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$ der Schätzwert auf Basis der Beobachtungen $x_1,\ldots,x_n$.

Algorithmus:

1. Für $k = 1, \dots, r$ ziehe Zufallszahlen z_k aus $\text{Gamma}(n, \hat{\theta})$ und setze $\theta_k := \frac{n}{z_k}$.
2. Für $k = 1, \dots, r$ wiederhole:
   a) Ziehe Zufallszahlen x_{kj} aus $\text{Gamma}(1, \theta_k)$ und s_{kj} aus $\text{Gamma}(n, \theta_k)$ und setze $r_{kj} := x_{kj} + \frac{\ln(1-\alpha)}{n} s_{kj}$, $j = 1, \dots, m$.
   b) Ordne die r_{kj} der Größe nach. Wähle den $[m(1-\alpha)+1]$-größten Wert und bezeichne ihn mit v_k.
3. Schätze das Residualrisiko durch $RR := \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} v_k$.

Aufgabe 5. Anwendung von copulas auf Schadendaten.

(a) Gründe für Abhängigkeit: Gebühren sind oft proportional zum Streitwert; bei größeren Schadensummen wird man mehr Aufwand bei der Schadenhöhenermittlung treiben etc.

(b) Die Daten deuten auf eine starke obere Randabhängigkeit aber auf keine starke Abhängigkeit im unteren Rand hin; dieses Verhalten kann durch die Gumbel copula modelliert werden, da für die Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (für $\theta > 1$) und $\lambda_l = 0$ gilt. Nach Sklar gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= C_\theta^{\text{Gu}}(F_X(x), F_Y(x)) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right). \end{aligned}$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir Unabhängigkeit, für $\theta \to \infty$ Komonotonie.

(c) (i) Zwei mögliche Verfahren zur Schätzung von θ sind Maximum likelihood und ein Momentenschätzer basierend auf Kendalls τ.

(ii) Wir haben 4 Beobachtungen und somit $\binom{4}{2} = 6$ Beobachtungen. Der Schätzer für ρ_τ berechnet sich zu $\rho_\tau = \frac{1}{6}\Big(1-1+1+1+1-1\Big) = 1/3$; damit ist $\hat{\theta} = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Aufgabe 6. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk ist das Risiko, dass einer der Vertragsparteien, beispielsweise S vor Fälligkeit des Vertrags ausfällt; falls der Vertrag im Ausfallszeitpunkt τ_S aus Sicht von B einen positiven Wert hat, erleidet B einen Verlust. Mögliche Ansätze zum Management von counterparty risk: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

(b) (i) Es gilt

$$\text{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ und somit die Behauptung.

(ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\text{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100 \gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)\end{aligned}$$

Das CVA ist eine Bewertungskorrektur und somit eine risikoneutrale Größe; daher kann der Parameter γ_S an Marktpreisen (im vorliegenden Fall CDS Kontrakte) kalibriert werden.

(iii) Die Unabhängigkeitsannahme ist problematisch. Falls S ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophenereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) Der Marktwert der Verpflichtungen ist unter dem risikoneutralen Maß zu berechnen. Zum Zeitpunkt 0 beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} MV(0) &= 100 \cdot \big(\mathbb{E}_Q(D(0,2)) + \mathbb{E}_Q(D(0,3))\big) \\ &= 100 \cdot [\exp(-0.02416297 - 1.42568932 \cdot 0.02) \\ &\quad + \exp(-0.04856293 - 1.83445834 \cdot 0.02)] \\ &= 100 \cdot (0.948687 + 0.918281) \\ &= 186.70. \end{aligned}$$

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Swaprate für den Zeitraum $[1,3]$ mit den Zahlungszeitpunkten $t = 2, 3$ gegeben durch

$$S = S_{1,3}(0) = \frac{P(0,1) - P(0,3)}{P(0,2) + P(0,3)} = \frac{0.976654 - 0.918281}{0.948687 + 0.918281} = 0.03127.$$

Dabei haben wir die Preise der Zerobonds $P(0,T) = \mathbb{E}_Q(D(0,T))$ verwendet.

(c) **Fall A)** Der Marktwert der Verpflichtungen zur Zeit 1 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= 100 \cdot \left(\mathbb{E}_Q(D(1,2) + D(1,3) \mid r(1))\right) \\ &= 100 \cdot (P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von der Short Rate $r(1)$. Das 95%-Quantil des Marktwertes zur Zeit 1 ergibt sich für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Mit den Parametern der Normalverteilung unter dem realen Maß

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r(1)) &= 0.06 + (r(0) - 0.06) \cdot e^{-0.36} = 0.032093, \\ Var(r(1)) &= 0.00125\left(1 - e^{-0.72}\right) = 0.000642 \end{aligned}$$

erhalten wir als 5%- Quantil

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In diesem VaR-Szenario ergibt sich der Marktwert der Verbindlichkeiten

$$\begin{aligned} L_{0.95}(1) &= 100 \cdot [\exp(-0.00682696 - 0.83978865 \cdot (-0.0096)) \\ &\quad + \exp(-0.02416297 - 1.42568932 \cdot (-0.0096))] \\ &= 100 \cdot (1.001223577 + 0.98957834) \\ &= 199.08. \end{aligned}$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta L) &= L_{0.95}(1) \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,1)) - L \\ &= 199.08 \cdot 0.976654 - 186,70 \\ &= 7.733673 \end{aligned}$$

zu stellen.

Fall B) Der Marktwert des Receiver-Swaps zur Zeit 0 ist Null; zur Zeit 1 ist er gegeben durch

$$\begin{aligned} RFS(1) &= 100 \cdot (S - S_{1,3}(1)) \cdot \left(\mathbb{E}_Q(D(1,2) + D(1,3) \mid r(1)\right) \\ &= 100 \cdot (S - S_{1,3}(1)) \cdot (P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))) \\ &= 100 \cdot \left[S - \frac{1 - P(1,3)(r(1))}{P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))}\right] \cdot (P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von der Short Rate $r(1)$. Solange $|S - S_{1,3}(1)| < 1$ gilt, ist $L(1) - RFS(1)$ monoton fallend in $r(1)$. Daher ergibt sich das 95%-Quantil des Marktwertes von $L(1) - RFS(1)$ zur Zeit 1 für das 5%-Quantil der normalverteilten Short Rate $r(1)$. Wir erhalten

$$RFS_{0,95}(1) = 100 \cdot (0.03127 - 0.005235) \cdot 1.990814 = 5.18$$

Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten nach Absicherung durch den RFS mit Wahrscheinlichkeit 0.95 puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta(L-RFS)) &= (L_{0.95}(1)-RFS_{0.95}(1))\cdot\mathbb{E}_Q(D(0,1))-(L+0)\\ &= (199.08-5.18)\cdot 0.976654-186,70\\ &= 2.671568\end{aligned}$$

zu stellen.

(d) Der Kauf des Receiver-Swaps verursacht keine Kosten. Er reduziert das benötigte Risikokapital für das Zinsrisiko bei der Wiederanlage zum Zeitpunkt 1 und damit die Kapitalkosten. Andererseits reduziert die Strategie Ertragschancen bei der Wiederanlage im Falle steigender Zinsen. Diese gegenläufigen Aspekte können mit Hilfe eines risikoadjustierten Performance-Maßes gegeneinander abgewogen werden.

Aufgabe 8. Kreditrisiko und CDOs.

(a) **X** ist eine Linearkombination von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen und somit multivariat normalverteilt. Um die Kovarianzmatrix zu bestimmen betrachten wir zunächst den Fall $i \neq j$. Es gilt wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) &= E\big(\rho V^2+\rho(V\epsilon_j+V\epsilon_i)+(1-\rho)\epsilon_i\epsilon_j\big)\\ &= E(\rho V^2)=\rho\end{aligned}$$

Für $i=j$ erhalten wir

$$\mathrm{var}(X_i)=E(X_i^2)=E\big(\rho V^2+(1-\rho)\epsilon_i^2\big)=\rho+(1-\rho)=1.$$

Die Korrelationsmatrix von **X** ist also R; da **X** multivariat normalverteilt ist , ist die copula von **X** also durch C_R^{Ga} gegeben.

(b) Es gilt $F(t_1,\dots,t_m)=C_R^{\mathrm{Ga}}\big(1-e^{-\lambda t_1},\dots,1-e^{-\lambda t_m}\big)$. Zur Simulation von $\tau_1,\dots,\tau_m$ ziehen Sie zunächst Zufallszahlen r_j, $j=0,\dots,m$ aus $\mathcal{N}(0,1)$ und setzen $x_i=\sqrt{\rho}r_0+\sqrt{1-\rho}r_i$, $1\le i\le m$. Es bezeichne Φ die VF der Standardnormalverteilung; dann sind

$$(t_1,\dots,t_m):=\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\Phi(x_1)),\dots,-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\Phi(x_m))\right)$$

gemäß dem Satz von Sklar die gewünschten Realisierungen. Hierbei haben wir verwendet, dass die Quantilfunktion von $Exp(\lambda)$ durch $F^{-1}(u)=-1/\lambda\ln(1-u)$ gegeben ist.

(c) Gründe für den Einsatz von CDOs

- Reduktion von regulatorischem Kapital beim Emittenten;
- durch das repackaging werden die Tranchen für eine breitere Schicht von Investoren attraktiv (etwa Pensionsfonds, die nur in investment grade bonds investieren können).

Mögliche Probleme

- Mispricing, insbesondere durch Unterschätzung der Abhängigkeit und der Kreditqualität der underlying assets
- Anreizprobleme bei der Kreditvergabe

(d) Die erwartete Auszahlung der Equity Tranche steigt mit steigendem ρ, $E(S_T)$ sinkt. Da der Parameter ρ schwer zu schätzen ist, sollte zur Reduzierung des Modellrisikos die Auswirkung von Variationen in ρ auf den Wert einer Tranche analysiert werden.

Written exam CERA module A

Foundations and Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.0
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

24 May 2019

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 11 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.

Examination board members:

Dr. P. Brühne, Prof. Dr. R. Frey, E. Müller
Prof. Dr. J. Wolf, A. Wolfstein

Question 1. Case Study – Communication in the Context of a Reserve Issue. *[30 points]* Since recently you are the chief actuary of the publicly listed insurance group Trixia SE, headquartered in Hamburg, which is doing business worldwide. You are reporting directly to the CEO and you are a member of the risk committee, which is chaired by your boss. Your company is providing all lines of non-life business in Germany and worldwide. Net earned premiums in 2018 amounted to roughly EUR 20bn, half of this emanating from different third party liability (TPL) lines. The US based TPL business generated in 2018 net earned premiums of ca. USD 2bn (General Liability, Professional Liability and Workmen‘s Compensation contributing around one third each) and is done through the subsidiary Trixia US, located in Los Angeles and licensed in all US states.

One of your first tasks is to conduct a review of the US reserves for the accounting year 2018. For the first time this is done by using actuarial methods, especially chain ladder. Early September your results are indicating that there will be a gross reserve gap of roughly USD 1bn by yearend 2018. Only one half of this is covered by existing reinsurance programs but there is a significant default risk for one half of the reinsurance recoverables.

(a) *[6 points]* Which options do you see to communicate your results?

(b) *[6 points]* Assume that your boss is commenting as follows: „Our reserves were always fine. Every year this was confirmed by our actuary in the US. You must be wrong.“ How do you react?

(c) *[6 points]* Traditionally mid of October the analyst day of Trixia SE is taking place. This is to inform stock analysts about current developments. It is your task to demonstrate the adequacy of the reserves. The instruction of your boss is: „You will of course convince the analysts that everything is fine with our reserves!“ How do you proceed?

(d) *[6 points]* The head of communication of your company who is preparing the analyst day knows from his previous employer how seriously a loss in confidence can damage the share value. His former company had a reserve gap of „only“ EUR 250m but that was reported little by little during a period of half a year which had fatal impacts in the stock market. The share price got finally cut by one half which wiped out EUR 1bn of market value. Even after a recovery phase only one half could be regained so that the loss of market value including reputational loss was double the amount of the reserve gap only. Your colleague therefore recommends to you to avoid any statements that could lead to a loss of reputation for Trixia. How do you handle this situation?

(e) *[6 points]* On the day before the analyst day (and your important presentation), you receive a call from your German regulator. He is asking to what extent your company is effected by the claim deterioration in the market that can be seen for TPL business in the US. What do you answer?

Question 2. Case Study – Change in Business Model of a Life Insurer. Scenario Considerations. External Consultancy. *[30 points]* Given the continued low interest rate environment a life insurer considers to revise its business model. In course of this, also management structure should be streamlined and costs saved. Furthermore, investments should be moved to sustainable assets.

As external consultant you are asked to evaluate the scenario preferred by the management board. You should inter alia analyse impacts on the risk profile as well as the streamlined management and department structure and detect potential weaknesses and risks. Furthermore, you are asked to develop proposals for responses to these risks.

The life insurer's current position: The total amount of technical provisions is € 20 bn. € 14 bn. of these relate to classical endowment and annuity products, € 3 bn. relate to protection, here term and invalidity insurance. € 3 bn. of the technical provisions relate to unit-linked insurance for which the investment risk is borne by the policy holders; profits from this line of business are especially generated by fees which are calculated proportional to the unit linked asset volume. The total amount of gross premiums is € 2 bn. of which € 0.4 relate to unit-linked and € 0.3 bn. to protection business. € 1.3 bn. gross premiums relate to classical insurance products. Assets that do not relate to unit-linked business, and thus are not determined by policyholders, amount to € 21 bn. € 15 bn. of these are fixed income instruments, € 2 bn. real estate and € 1 bn. equity:

Assets		Liabilities	
Fixed Income	15	1	Shareholders' equity
Equity	1	14	Classical endowment and annuity business
Real Estate	2	3	Protection business
Unit-linked	3	3	Unit-linked
Total	21	21	Total

Revision of the portfolio: The insurer received an offer to sell the portfolio of classical insurance. Investments transferred would be fixed income only. Also employees would be taken over. After the deal the insurer would have a balance sheet length of € 7 bn. with an amount of technical provisions of € 6 bn. Assets relating to unit-linked insurance would be € 3bn., € 2 bn. would relate to real estate, € 1bn. to equity and € 1 bn. to fixed income instruments:

Assets			Liabilities
Fixed Income	1	1	Shareholders' equity
Equity	1		
Real Estate	2	3	Protection business
Unit-linked	3	3	Unit-linked
Total	7	7	Total

Gross premiums would amount to € 0.7 bn. A volume of € 1 bn. should be invested in sustainable assets.

Revision of the organisational and management structure: The department and management structure would be streamlined as follows:

- Department 1: CEO, accounting, internal audit
- Department 2: Insurance and actuarial (administration, risk assessment, product development), actuarial function, risk management
- Department 3: Investment management, IT, human resources, compliance

Currently investments are managed by an investment company. This task should be taken over by the life insurer itself now. Expertise on sustainable assets is not available in the undertaking so far.

For unit-linked insurance policyholders should be offered to change the asset allocation monthly without any charge. For sustainable investment no fees would be taken in the future. To save maintenance expenses customers should be enabled to perform relevant entries like for asset allocation but also changes to the insurance cover by themselves via an online platform.

With this conversion the undertaking would like to establish itself in the market as slim and fast insurer with stable profits and low capital market risk, focusing on protection for policyholders and environment. Growth would be appreciated but is not a primary goal as the undertaking knows that the insurance market is tight.

The currently mixed portfolio should successively be changed and mainly policyholders with consciousness about environmental and health issues should be acquired, which are expected to have lower mortality and invalidity risks.

(a) *[15 points]* Please analyse the impacts of the portfolio revision to the risk profile of the undertaking. For that purpose, please name all elements of a typical risk management cycle. Please also give targets, opportunities and risk as well as measures in the concrete context. Which risk to the stability of the undertakings are associated to such a revision? To which typical new types of risks is the undertaking exposed, especially due to the new types of offers to the policyholders?

(b) *[15 points]* Please analyse the proposed department structure with respect to potential conflicts of interest and in case of such, propose potential solutions. What is your view on the undertaking's goal to do the investment management and maintenance itself? Which challenges for the governance do you see?

Question 3. Risk Measures and Extreme Value Theory (EVT). *[20 points]* Suppose that the claim size X is Pareto(a, b)-distributed with parameters a and b, $a > 0$, $b > 1$, i.e. has the cumulative distribution function

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^b, \quad x \geq 0.$$

(a) *[5 points]* Determine Value at Risk and Expected Shortfall of X at the confidence level $\alpha \in (0, 1)$, where $a > 0$ and $b > 1$.

(b) *[5 points]* Determine the asymptotic ratio of Expected Shortfall and VaR,

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)},$$

and explain the result, referring to general results of extreme value theory.

(c) *[10 points]* An insurance company has been modeling its yearly losses X due to operational risks by means of the Pareto distribution with parameters $a = 10$ and $b = 2.5$ so far. Investigations of the risk management function have provided evidence that this distribution fits in well with normal years, but expressed the concern that extreme losses occurring in rare distressed years might not be captured adequately by the tail of this distribution.

A workshop with the risk owners leads to the conclusion that a distressed year is characterized by the losses X exceeding the threshold $u = 15.12$. According to the distribution used up to now, the probability of a year becoming distressed, i.e. $X > 15.12$, is $\mathbb{P}(K) = 0.1$. The experts agree that this probability is reasonable and estimate that the mean loss of a distressed year amounts to 40. The risk manager conceives two approaches to incorporate the results of the workshop into the distribution of X.

A) Fit of a new Pareto-distribution $F_1(x) = 1 - \left(\frac{a_1}{a_1+x}\right)^{b_1}$ satisfying $F_1(15.12) = 0.9$ and taking into account the expert opinion about the mean loss in a distressed year. This entails the parameters $a_1 = 6.1039$ and $b_1 = 1.8530$.

B) $F_2(x) = 0.9 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10+x}\right)^{2.5}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2+x}\right)^{b_2}\right)$, where the parameters a_2 and b_2 are calibrated using the results of the workshop.

You may use the following properties of the Pareto-distribution:

- $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a+u)^b}{(a+u+y)^b}$, $y \geq 0$
- $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a+u}{b-1}$

(i) *[4 points]* Explain the motivation of the two approaches A) and B).

(ii) *[6 points]* Compare and assess the two approaches A) and B). Develop a proposal how to implement approach B). Discuss whether, for implementation, you need further information from the participants of the workshop, and if so, what are the relevant aspects to be clarified.

Question 4. Risk Measures and Parameter Risk. *[15 points]* Let the claim size X be exponentially distributed with unknown parameter θ. You are asked to analyze the impact of parameter risk on the calculation of risk capital.

Hint.

- The density of the Gamma-distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$ is given by

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

- The expected value equals $\frac{\alpha}{\beta}$, the variance $\frac{\alpha}{\beta^2}$.
- The exponential distribution is the special case $\mathrm{Exp}(\beta) = \mathrm{Gamma}(1, \beta)$.
- Convolution: If X_i are independent and $\mathrm{Gamma}(\alpha_i, \beta)$-distributed, $i = 1, 2$, then $X_1 + X_2$ is $\mathrm{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$-distributed.

(a) *[5 points]* First, we adopt a Bayesian approach to modeling, where the unknown parameter Θ is modeled as $\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$-distributed. The Bayesian analysis based on the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ yields the cumulative distribution function of the predictive distribution of X:

$$F(x|x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n x_i}{\beta + \sum_{i=1}^n x_i + x} \right)^{\alpha+n}, \quad x \geq 0.$$

Analyzing the asymptotic behaviour of the predictive distribution when $n \to \infty$, we observe the following results:

1) The variance of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to 0. The limiting distribution assigns probability 1 to some value $\bar{\theta}$.

2) Given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, for the Value at Risk $\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$ of the predictive distribution of X at the confidence level $\lambda \in (0, 1)$, it holds that:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} = -\frac{1}{\bar{\theta}} \cdot \ln(1 - \lambda)$$

Explain properties 1) and 2) from an economic point of view and interpret $\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)}$.

Tip. Which risk measure of which variable represents $-\frac{1}{\theta} \cdot \ln(1-\lambda)$?

(b) Alternatively, we analyze the residual risk when using the maximum-likelihood estimator.

(i) *[5 points]* Applying the risk measure VaR_α, quantify the residual risk, when the Value-at-Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ is determined by using the maximum-likelihood estimator $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$ for the parameter θ based on n observations. Analyze the behaviour of the residual risk when $n \to \infty$ and explain the result from an economic point of view.

(ii) *[5 points]* Develop an algorithm determining the residual risk from (i) by means of simulations, when you are given a random number generator for gamma-distributed random variables.

Question 5. Applicaton of Copulas to Claim Data. *[19 points]*

An insurance company has claim data of the form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, where X_i is the claim size and Y_i measures the so-called *allocated loss adjustment expenses* (ALAE). (The ALAE comprise for instance lawyer fees or claim investigations costs). A scatter plot is given in Figure 1.

FIGURE 1
PLOT OF ALAE VERSUS LOSS.
BOTH VARIABLES ARE ON A LOGARITHMIC SCALE.
THIRTY-FOUR LOSS OBSERVATIONS ARE CENSORED.
THIS PLOT DEMONSTRATES A STRONG RELATIONSHIP
BETWEEN ALAE AND LOSS.

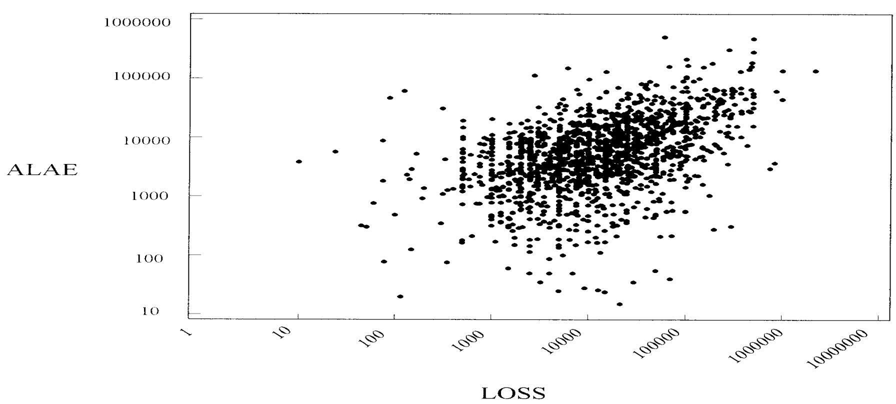

Abbildung 1: Scatter plot of claim data; (from Frees-Valdez (97)).

(a) *[2 points]* Explain briefly, why one should expect dependence between claim size X and ALAE Y.

(b) *[7 points]* A Gumbel copula with parameter θ is used to model the joint distribution of X and Y; it holds that

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty .$$

To model the marginal distribution of X and Y the company uses Pareto distributions with parameters λ_X, α_X respectively λ_Y, α_Y where $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, that is

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

and similarly for Y. Discuss qualitatively why the Gumbel copula is well-suited for modelling the data from Figure 1 and give the joint distribution function $F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$.

(c) (i) *[4 points]* Explain two methods for the statistical estimation of θ.

(ii) *[6 points]* You have the following four observations of X and Y at your disposal:

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Compute Kendalls τ and an estimator for θ. Hint: For the Gumbel one has $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$.

Question 6. Counterparty Risk. *[18 points]*

Two parties S and B have agreed on a contractual arrangement where the protection seller S offers the protection buyer B insurance against some adverse event in return for premium payments. Denote by V_t the market value of the contract at time t from the point of view of B; the maturity is denoted by T. (Examples of such an arrangement are credit default swaps and reinsurance contracts).

(a) *[6 points]* Explain what is meant by counterparty risk in this context and discuss briefly two different techniques for managing this risk category.

(b) In the above context the valuation adjustment for the protection buyer B is given by

$$\mathrm{CVA} = \delta_S\, \mathbb{E}^Q\left(1_{\{\tau_S < T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\right).$$

Here $r \ge 0$ is the risk-free interest rate, τ_S and δ_S are the default time and the loss given default of S.

(i) *[4 points]* Assume that δ_S is deterministic and that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Show that under these assumptions the CVA is equal to the simpler expression

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt\,,$$

where f_S denotes the density of τ_S.

(ii) *[4 points]* Evaluate the formula for the case where $E^Q(V_t^+)$ is constant and equal to 100 and where under Q, τ_S has an exponential distribution with parameter γ_S. Can γ_S be calibrated from the spread of a traded CDS on the protection seller S?

(iii) *[4 points]* In the derivation of the formula for $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ it is assumed that V_t and the default time τ_S are independent. Discuss the appropriateness of this assumption in the context of a reinsurance contract.

Question 7. Interest rate risk and term structure models. *[29 points]* The short rate $r(t)$ is supposed to follow the Vasicek model with parameters $a = 0.36$, $b = 0.06$ and $\sigma = 0.03$ under the real world measure:

$$dr(t) = a(b - r(t))\, dt + \sigma\, dW_t \quad \text{(RW)}$$

It holds that $r(0) = 0.02$. Further, assume that $\lambda = 0.2$ is the market price of risk. Then, under the rsik neutral measure Q, $r(t)$ follows the Vasicek model

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))\, dt + \sigma\, dW_t^Q \quad \text{(RN)}$$

with $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

In order to cover the obligation to pay out 100 at the times $t = 2$ and $t = 3$, an insurance company has built a provision at time $t = 0$ that equals the market value L of the liabilities and invested L in a zero bond with maturity $T = 1$.

Hint. In the Vasicek model, the expected value of the stochastic discounting factor $D(t, T)$ is given by

$$\mathbb{E}(D(t,T)|\mathcal{F}_t) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)\cdot r(t)\right)$$

- Under the **real world measure**, we have

$$\begin{aligned} A(t,T) &= 0.565278\cdot(T-t-B(t,T)) + 0.000625\cdot B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= 2.777778\cdot\left(1-e^{-0.36\cdot(T-t)}\right), \end{aligned}$$

  and it holds that

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(0.06 + (r(0)-0.06)e^{-0.36t}, 0.00125\cdot\left(1-e^{-0.72t}\right)\right).$$

- Under the **risk neutral measure**, we have

$$\begin{aligned} A(t,T) &= 0.039861 \cdot (T-t-B(t,T)) + 0.000625 \cdot B(t,T)^2 \\ B(t,T) &= 2.777778 \cdot \left(1-e^{-0.36\cdot(T-t)}\right), \end{aligned}$$

  and it holds that

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(0.06 + (r(0) - 0.043333)e^{-0.36t}, 0.00125 \cdot \left(1-e^{-0.72t}\right)\right).$$

- Es gilt $\Phi^{-1}(0.95) = 1.6449$.

(a) *[4 points]* Determine the amount L of the provision.

(b) *[3 points]* Determine the swap rate S for the period $[1,3]$, when the payment dates are fixed to be $t=2$ and $t=3$.

(c) *[18 points]* **Regardless of your results from part a) and part b), in the following suppose that $L = 186.70$ and $S = 0.03127$ hold.**

In order to reduce interest rate risk, the insurance company intends to enter a receiver swap for the period $[1,3]$ with swap rate S, nominal $N = 100$ and payment dates $t = 2, 3$.

In the two cases that

A) no receiver swap is entered,

B) the above receiver swap is entered,

determine the risk capital that is needed at time 0 to compensate an increase in market value of the liabilities due to interest rate risk at time 1 with probability 0.95.

(d) *[4 points]* Analyze the strategy of reducing risk by entering the receiver swap from part (c) taking the point of view of management and, in particular, discussing the following dimensions: cost of the strategy, cost of the required risk capital and opportunities of earnings.

Question 8. A 1-Factor Model for Credit Risk and CDOs. *[19 points]* For $m \in \mathbb{N}$ and a correlation parameter $\rho \in [0,1]$, consider independent $N(0,1)$ distributed rvs $V, \epsilon_1, \dots \epsilon_m$ and let $X_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i$, $1 \le i \le m$.

(a) *[3 points]* Explain, why the copula of the random vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ is given by C_R^{Ga}, the Gauss copula with correlation matrix $R_{ij} = \rho$, $1 \le i, j \le m$, $i \ne j$.

(b) Consider a portfolio of m homogeneous firms with default times $\tau_1, \dots, \tau_m$. Assume that $P(\tau_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ and that the copula of $\tau_1, \dots, \tau_m$ is equal to C_R^{Ga}.

   (i) *[1 point]* Derive the distribution function (df) F of $\tau_1, \dots, \tau_m$.

   (ii) *[7 points]* You have a random number generator at your disposal that generates independent realisations from a one-dimensional standard normal distribution. Develop an algorithm for sampling one realisation of $\tau_1, \dots, \tau_m$.

(c) *[4 points]* Explain why CDOs are used for the securitization of credit risk (at least one reason) and discuss two problems related to this asset class.

(d) *[4 points]* The variable $\overline{L}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m 1_{\{\tau_i \leq T\}}$ represents the percentage loss of a credit portfolio consisting of firms $1, \dots, m$, and $\overline{N}_T = 1 - \overline{L}_T$ is the nominal value of the portfolio in T (the proportion of firms that is not in default). We consider a stilized CDO with two tranches (equity and senior). Given an attachment point $\kappa \in [0, 1]$, e.g. $\kappa = 10\%$, the payoff of the equity tranche is given by $E_T = [\kappa - L_T]^+$; the payoff of the senior tranche is $S_T = \min\{\overline{N}_T, 1 - \kappa\} = 1 - \kappa - [\overline{L}_T - \kappa]^+$.

   Discuss how the expected payoff $E(E_T)$ and $E(S_T)$ reacts to an increase in ρ. Consider in this context also the issue of model risk in the valuation of CDO contracts.

Proposal for solution

Question 1. Case study – Communication in the Context of a Reserve Issue.

(a) You are preparing a detailed written analysis and present this to your boss immediately after completion, recommending to discuss these results in detail in the next meeting of the risk committee. For the yearend accounting for 2018 you strongly suggest to take into account your results.

(b) You are explaining to your boss that you were using well-accepted actuarial methods which led to your results. You are asking to get insight into the former calculations of the US actuary. You suggest to get an independent further review from an external actuarial consulting company.

(c) You check the information provided to analysts so far (especially those from previous years) and try to find out whether these are adequately reflecting reality. You suggest necessary adjustments, clarifying that you can only deliver public statements on numbers that you can support as an actuary. Usually there is a floor in which you can move. But it´s your task to make absolutely clear which figures you can support as being (just) „ok“ towards analysts and from where you can‘t.

(d) You ask for a meeting with your boss and the head of communication to develop a common communication strategy, which will be founded on a realistic reserve estimate. In your analyst day presentation you will highlight where your company was subject to general market developments that also effected other market participants.

(e) You are confirming that you as an actuary are working on that issue and that you have first results indicating that your company might be effected. You are explaining that this kind of analysis usually leaves room for a certain range of results. You are promising that you will give a feedback immediately after the internal finalisation of results. Internally you are agreeing on the final (realistic) figures with your boss and the head of communication, which will be given consistently to analysts as well as regulators.

Question 2. Case study – Change in Business Model of a Life Insurer. Scenario Considerations. External Consultancy.

(a) A usual risk management cycle comprises the following elements:

1. Determine targets / goals.
2. Identify opportunities and risks (for the targets).

3. Assess and measure risk.
4. Risk response and controls.
5. Information and communication (about risks).
6. Monitoring and continuous improvement.

All six elements should be named in essentially this form [3 points].

Targets / goals named in the setup of the case study are:

- Stable profits
- Reduction of costs for undertaking and policyholders
- Reduction of capital market risk
- New types of offers to the policyholders
- Establish as insurer for policyholders conscious about environmental and health issues

At minimum three of these goals should be identified [3 points].

Impacts on the risk profile, opportunities and risks for the achievement of the goals:

- Opportunities and risks for stable profits:
  - Term insurance in medium sized portfolios shows fluctuations.
  - Profits from unit-linked policies relate to the value of the investments and consequently are subject to capital market risks.
  - In case the goal would be reached, that policyholders would more or less exclusively invest in sustainable assets, the profits from this part of the portfolio would vanish.
  - After the revision the undertaking would have a high portion of equity in the investment portfolio.
  - By concentration on rather short term business and to unit-linked business, interest rate risks could be reduced and capital market risks can be transferred to policyholders.
  - Potentially high employee fluctuations in the revision phase.
  - Sustainable assets typically have a long term character and restricted liquidity, while term insurance rather has a short term character.

  - By low premiums and long-term sustainable investments liquidity risks might come up.
  - There not (yet) is common understanding established of what a sustainable investment is. Consequently, reputational risk could be caused by different views by costumers and undertaking.
- Opportunities and risks for the reduction of costs for undertaking and policyholders:
  - High initial investment costs for new IT infra-structure inter alia to offer online-functionalities.
  - High costs for setting up an own investment management and maintenance.
  - The target segment of policyholders can be expected to really have a high willingness to take over a part of the maintenance of the policies themselves.
  - New types of risks: Cyber risks due to relevant online-offers.

At least six opportunities and risks from the list above should be mentioned and not only risks [6 points].

Potential measure to respond and control risks:

- Reinsurance for the biometric risks
- Hedging instruments for the equity portfolio
- Revision of the investment portfolio to liquid assets
- Introduce a system of stagger fees for unit-linked policies in which sustainable investments would not be completely free of charge.

At least three measures of the list should be mentioned [3 points].

(b) Remarkable about the department structure is, that in departments 2 and 3 taking risks and functions of risk control on the „second line of defence“ are combined.

- In Department 2 pricing of insurance policies and operational risk assessment would be combined with the actuarial function which inter alia has to give an opinion on the overall underwriting policy.
- Department 2 would furthermore also include the risk management function which is expected to inter alia assess the underwriting risks.

- Department 3 would include the compliance function, which especially also regarding investment management would have to control the compliance with legal requirements. Given that the undertaking aims to focus on customers conscious of environmental issues, the compliance to legal requirements will be of high importance.
- Department 1 comprises not only internal audit but also accounting. Especially under SOX a proper financial reporting is of central importance. Consequently, this combination is not perfect.

At least the first three issues should be identified and the conflicts named. [6 points]

Potential measures could be:

- Establish committees which would resolve the responsibility by one department only.
- Change the setup of departments:
  - Move compliance function and risk management function to Department 1.
  - Move actuarial function to Department 3.
  - Move accounting to Department 3.
- Outsourcing of assurance functions.

At least two of these measures should be given. [4 points]

Challenges for taking over the investment management and maintenance by the undertaking:

- Investment management requires a high expertise and fast systems, which imply high basic costs, which given the size of the undertaking after the revision would have to be evaluated against the goal of being a slim insurer with low expenses.
- Sustainable assets typically require a valuation based on expert knowledge as the markets (still) are only to a limited extend are deep and liquid.
- Expertise for sustainable assets is tight and consequently not cheap to acquire.
- The monthly asset shifting for unit-linked insurance requires fast systems and good access to the capital markets.

- Front- and back-office as well as investment risk controlling have to kept independent appropriately.

At least items 1, 2 and 5 should be mentioned. [5 points]

Question 3. Risk Measures and Extreme Value Theory (EVT).

(a) Solving the equation $1-\left(\frac{a}{a+x}\right)^b = \alpha$, we obtain the Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - a.$$

By definition, we compute the Expected Shortfall

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_z(X)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(a(1-z)^{-\frac{1}{b}} - a\right) dz \\
&= -\frac{a}{1-\alpha}\left[\frac{b}{b-1}(1-z)^{1-\frac{1}{b}}\right]_\alpha^1 - a \\
&= \frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - a.
\end{aligned}$$

(b) Since $(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}$ tends to infinity when $\alpha \to 1$, it holds that

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{ab}{b-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}}{a(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}}} = \frac{b}{b-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{b}}.$$

Since the survival function of the Pareto-distribution decreases polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{b}$, the result from b) turns out to be a special case of the general result of EVT on the asymptotic ratio $\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)}$.

(c) First, we show the given properties of the excess distribution. This is *not* required in the exercise. We compute

$$\mathbb{P}(X > u+y \mid X > u) = \frac{\mathbb{P}(X > u+y)}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{(a/(a+u+y))^b}{(a/(a+u))^b} = \frac{(a+u)^b}{(a+u+y)^b}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-u \mid X > u) &= \int_0^\infty y\cdot b(a+u)^b(a+u+y)^{-b-1}\,dy \\
&= \int_0^\infty b(a+u)^b(a+u+y)^{-b}\,dy - (a+u) \\
&= -\frac{b}{b-1}(a+u)^b(a+u+y)^{-b+1}\Big|_0^\infty - (a+u) \\
&= \frac{b}{b-1}(a+u) - (a+u) = \frac{a+u}{b-1}.
\end{aligned}$$

(i) Approach A) keeps the Pareto-distribution used so far, since it proves to be an adequate distribution for heavy-tailed claims resulting from operational risks. However, the distribution is re-calibrated to the results of the workshop by choosing the parameters a_1 and b_1 such that the threshold $u = 15.12$ is exceeded with probability 0.1 as before and the mean excess equals $\mathbb{E}(X - 15.12 \mid X > 15.12) = 24.88 = 40 - 15.12$.

Approach B) relies on a mixture of the distribution functions for a normal year and for a distressed year:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \le x) &= (1 - \mathbb{P}(K)) \cdot \mathbb{P}(X \le x \mid \bar{K}) + \mathbb{P}(K) \cdot \mathbb{P}(X \le x \mid K) \\ &= 0.9 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{10 + x}\right)^{2.5}\right) + 0.1 \cdot \mathbb{P}(X \le x \mid K),\end{aligned}$$

where a normal year is described by the Pareto-distribution with parameters 10 and 2.5, which proved to be adequate in normal years, while a distressed year is modeled by a new Pareto-distribution which is calibrated to the results of the workshop.

(ii) In approach A), the Pareto-distribution is exclusively calibrated to the expert judgement about the properties of the tail, which are the probability of excess over some given threshold and the mean excess over that threshold. Thus, only information on extreme losses are taken into account. Approach A) ignores the conclusion of the risk management function that claims of normal years are adequately modeled by the distribution used so far.

However, approach B) keeps the distribution used so far for modeling normal years and uses the expert opinions exclusively for modeling distressed years. In order to calibrate the two parameters of the Pareto-distribution for distressed years, in addition to the given information $e(15.12) = 40 - 15.22 = 24.88$, we need a further condition. For example, the participants might be asked what probability they deem reasonable for the threshold $2 \cdot 15.12 = 30.24$ to be exceeded in a distressed year. This probability is given by $\left(\frac{a_2 + 15.12}{a_2 + 30.24}\right)^{b_2}$.

Question 4. Risk Measures and Parameter Risk. First, we carry through the Bayesian analysis, which is *not required* in this exercise.

When calculating the posterior density of Θ, given the observation x_1, we may introduce and delete constants as convenient:

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta) \cdot \pi(\theta) \\ &\propto \theta \exp(-\theta x_1) \cdot \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta^{\alpha} \cdot \exp(-(\beta + x_1)\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).\end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of the Gamma$(\alpha+1, \beta+x_1)$distribution. Therefore, it holds that

$$\pi(\theta|x_1) = \frac{(\beta+x_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \theta^{\alpha} \cdot \exp\left(-(\beta+x_1)\theta\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

The marginal density $m(x)$ of X is given by the quotient of the joint density and the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Big/ \frac{(\beta+x_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \alpha\beta^{\alpha} \cdot (\beta+x)^{-(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

The marginal distribution function F of X is obtained by integrating the density m from a):

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha}.$$

In the same way as the marginal density is obtained by averaging the sample density over the prior density, the predictive density is obtained by averaging the sample density over the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta)\, d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta) \cdot \pi(\theta|x_1)\, d\theta. \end{aligned}$$

Therefore, we get the cumulative distribution function of the predictive distribution by replacing the parameters of the prior distribution in the marginal distribution function by those of the posterior distribution:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta+x_1}{\beta+x_1+x}\right)^{\alpha+1}.$$

By iteration, we get the predictive distribution based on n observations

$$F(x|x_1,\dots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{\beta+\sum_{i=1}^n x_i + x}\right)^{\alpha+n}.$$

(a) The limit $\mathrm{VaR}_{\lambda}^{(\infty)} := -\frac{1}{\theta} \cdot \ln(1-\lambda)$ is the value at risk of the sample distribution at confidence level λ provided that θ is the true parameter. This is easily verified by inserting $VaR_{\lambda}^{(\infty)}$ into the cumulative distribution function of the sample distribution

$$F(x|\theta) = 1 - \exp(-\theta x).$$

Each observation increases the available information on the parameter Θ. In the limit $n \to \infty$, the variance of the posterior distribution vanishes, i.e. there is no longer any uncertainty of the parameter. Its value θ is known. Therefore, the value at risk of the predictive distribution $VaR_{\lambda}^{(n)}$ converges to the value at risk $VaR_{\lambda}^{(\infty)}$ of the sample distribution, given θ.

We now prove the results stated in this exercise. This proof is *not required* in this exercise.

By the law of large numbers, we observe the following convergence of the expected values of the posterior distribution

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\dots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^n x_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n}+1}{\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

and the following convergence of the variances

$$\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\ldots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha+n}{\left(\beta+\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{n^2}+\frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{0}{(\mathbb{E}(X))^2} = 0.$$

Consequently, the posterior distributions of $\Theta|x_1,\ldots,x_n$ converge to the Dirac measure in the point$\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

The value at risk of the predictive distribution from part b) at confidence level $\lambda \in (0,1)$ is given by

$$\mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} := \mathrm{VaR}_\lambda(X|x_1,\ldots,x_n) = \frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{(1-\lambda)^{\frac{1}{\alpha+n}}} - \beta - \sum_{i=1}^n x_i,$$

as can be easily verified by inserting into the cumulative distribution function of the predictive distribution from part b). Letting tend $n\to\infty$, we obtain

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{VaR}_\lambda^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\beta+\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha+n}\left(\frac{(1-\lambda)^{-\frac{1}{\alpha+n}}-1}{\frac{1}{\alpha+n}}\right)\\
&= \mathbb{E}(X)\cdot(-\ln(1-\lambda))\\
&= -\frac{1}{\theta}\ln(1-\lambda).
\end{aligned}$$

(b) (i) If θ is the true parameter, then we have $\mathrm{VaR}_{\alpha;\theta}(X) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}$. Therefore, the residual estimation error is given by

$$RR(X) = \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - \mathrm{VaR}_{\alpha;\hat\theta}(X;\hat\theta)\right) = VaR_\alpha\left(X + \frac{\ln(1-\alpha)}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Letting tend $n\to\infty$, we observe $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}X_i = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\theta}$ and consequently,

$$\lim_{n\to\infty} RR(X) = \mathrm{VaR}_\alpha\left(X + \frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right) = \mathrm{VaR}_\alpha\left(X - \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right) = 0.$$

In the limiting case of infinitely many observations, the maximum-likelihood estimator yields the true value of the parameter such that there is no parameter risk remaining.

(ii) By convolution, it holds that $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n,\theta)$. Let $\hat\theta := \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$ be the estimated value based on the observations $x_1,\ldots,x_n$.

algorithm:

1. For $k = 1,\ldots,r$ draw random numbers z_k from $\mathrm{Gamma}(n,\hat\theta)$ and set $\theta_k := \frac{n}{z_k}$.
2. For $k = 1,\ldots,r$ repeat:
   a) Draw random numbers x_{kj} from $\mathrm{Gamma}(1,\theta_k)$ and s_{kj} from $\mathrm{Gamma}(n,\theta_k)$ and set $r_{kj} := x_{kj} + \frac{\ln(1-\alpha)}{n}s_{kj}$, $j = 1,\ldots,m$.
   b) Arrange the r_{kj} in descending order. Choose the $[m(1-\alpha)+1]$-largest value and denote it by v_k.

3. Estimate the residual risk by $RR := \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} v_k$.

Question 5. Application of Copulas to Claim Data.

(a) Reasons for dependence: fees proportional to the value of the underlying claim; more intense investigations for large claims etc.

(b) The data point to a pronounced upper tail dependence but no lower tail dependence; this can be modelled with a Gumbel copula, since for the Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (for $\theta > 1$) and $\lambda_l = 0$. Sklar's theorem gives that

$$F(x,y) = C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_Y(x))$$
$$= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right).$$

For $\theta = 1$ one has independence, for $\theta \to \infty$ comomotonicity.

(c) (i) Two possible approaches for estimating θ are Maximum likelihood and a moment estimator based on Kendalls τ.

(ii) We have 4 observations and hence $\binom{4}{2} = 6$ pairs. The estimator for ρ_τ computes to $\rho_\tau = \frac{1}{6}\Big(1-1+1+1+1-1\Big) = 1/3$; hence $\hat{\theta} = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Question 6. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk is the risk that one of the contracting parties such as S defaults prior to maturity; if the contract has a positive value for B at τ_S is positive B suffers a loss.
Approaches for managing counterparty risk: collateralization netting, hedging with CDS contracts; (provide a brief explanation for each).

(b) (i) It holds that

$$\mathrm{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t)\,dt$$

Using the independence assumption gives $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ and hence the claim.

(ii) We get

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100\gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\
&= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\
&= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1-e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)
\end{aligned}$$

The CVA is a valuation adjustment and hence a risk neutral quantity; hence γ_S can be calibrated to market prices such as CDS spreads.

(iii) The independence assumption is problematic. If S is a big reinsurer one would expect that $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$: a default of S could be caused by a major catastrophic event, that affects the payoff of the insurance contract, and a default of S reduces the supply of reinsurance, leading to an increase in the premia for reinsurance contracts (other scenarios possible).

Question 7. Interest rate risk and term structure models.

(a) The market value is determined under the risk neutral measure. At time 0, the market value of the liabilities equals

$$\begin{aligned}
MV(0) &= 100\cdot\big(\mathbb{E}_Q(D(0,2)) + \mathbb{E}_Q(D(0,3))\big) \\
&= 100\cdot[\exp(-0.02416297 - 1.42568932\cdot 0.02) \\
&\quad + \exp(-0.04856293 - 1.83445834\cdot 0.02)] \\
&= 100\cdot(0.948687 + 0.918281) \\
&= 186.70.
\end{aligned}$$

(b) At time $t=0$, the swap rate for the period $[1,3]$ with payment dates $t=2,3$ is given by

$$S = S_{1,3}(0) = \frac{P(0,1)-P(0,3)}{P(0,2)+P(0,3)} = \frac{0.976654-0.918281}{0.948687+0.918281} = 0.03127,$$

where we have used the prices of the zero bonds $P(0,T) = \mathbb{E}_Q(D(0,T))$.

(c) **Case A)** The market value of the liabilities at time 1 is given by

$$\begin{aligned}
L &= 100\cdot\big(\mathbb{E}_Q(D(1,2)+D(1,3)\mid r(1))\big) \\
&= 100\cdot(P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))),
\end{aligned}$$

depending on the short rate $r(1)$. The 95%-quantile of the market value at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. With the parameters of the normal distribution under the real-world measure

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r(1)) &= 0.06 + (r(0) - 0.06) \cdot e^{-0.36} = 0.032093,\\ Var(r(1)) &= 0.00125\left(1 - e^{-0.72}\right) = 0.000642,\end{aligned}$$

we obtain the 5%- quantile

$$r_{0.05}(1) = \mathbb{E}(r(1)) + \sqrt{Var(r(1))} \cdot \Phi^{-1}(0.05) = -0.0096.$$

In this VaR-scenario, the market value of liabilities is given by

$$\begin{aligned}L_{0.95}(1) &= 100 \cdot [\exp(-0.00682696 - 0.83978865 \cdot (-0.0096))\\ &\quad + \exp(-0.02416297 - 1.42568932 \cdot (-0.0096))]\\ &= 100 \cdot (1.001223577 + 0.98957834)\\ &= 199.08.\end{aligned}$$

In order to compensate an increase in market value of the liabilities with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta L) &= L_{0.95}(1) \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,1)) - L\\ &= 199.08 \cdot 0.976654 - 186,70\\ &= 7.733673.\end{aligned}$$

Case B) The market value of the receiver swap at time 0 is equal to 0; at time 1, it is given by

$$\begin{aligned}RFS(1) &= 100 \cdot (S - S_{1,3}(1)) \cdot \left(\mathbb{E}_Q(D(1,2) + D(1,3) \mid r(1)\right)\\ &= 100 \cdot (S - S_{1,3}(1)) \cdot (P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1)))\\ &= 100 \cdot \left[S - \frac{1 - P(1,3)(r(1))}{P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))}\right] \cdot (P(1,2)(r(1)) + P(1,3)(r(1))),\end{aligned}$$

depending on the short rate $r(1)$. As long as $|S - S_{1,3}(1)| < 1$ holds, $L(1) - RFS(1)$ is monotone decreasing in $r(1)$. Therefore, the 95%-quantile of the market value of $L(1) - RFS(1)$ at time 1 derives from the 5%-quantile of the normally distributed short rate $r(1)$. We obtain

$$RFS_{0,95}(1) = 100 \cdot (0.03127 - 0.005235) \cdot 1.990814 = 5.18.$$

In order to compensate an increase in market value of the portfolio consisting of the liabilities and the RFS with probability 0.95, at time 0, we need the risk capital

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.95}(\Delta(L - RFS)) &= (L_{0.95}(1) - RFS_{0.95}(1)) \cdot \mathbb{E}_Q(D(0,1)) - (L + 0)\\ &= (199.08 - 5.18) \cdot 0.976654 - 186,70\\ &= 2.671568.\end{aligned}$$

(d) Buying the receiver swap does not incur any costs. Due to the receiver swap the risk capital that is needed to buffer against interest rate risk when reinvesting at time 1 is reduced and consequently, so is the cost of capital. On the other hand, this strategy reduces opportunities earn a higher yield when reinvesting at time 1 in the case of rising interest rates. These competing aspects may be weighed up by means of a risk adjusted performance measure.

Question 8. A 1-Factor Model for Credit Risk and CDOs.

(a) **X** is a linear combination of independent normally distributed random variables and hence multivariate normal. In order to determine the covariance matrix we consider first the case $i \neq j$. Due to the assumed independence it holds that

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) = E\big(\rho V^2 + \rho(V\epsilon_j + V\epsilon_i) + (1-\rho)\epsilon_i\epsilon_j\big) \\ &= E(\rho V^2) = \rho \end{aligned}$$

For $i = j$ we get

$$\operatorname{var}(X_i) = E(X_i^2) = E\big(\rho V^2 + (1-\rho)\epsilon_i^2\big) = \rho + (1-\rho) = 1.$$

The correlation matrix of **X** is hence R; the copula of **X** is thus C_R^{Ga}, as **X** is multivariate normal.

(b) It holds that $F(t_1, \dots, t_m) = C_R^{\text{Ga}}\big(1 - e^{-\lambda t_1}, \dots, 1 - e^{-\lambda t_m}\big)$. In order to simulate $\tau_1, \dots, \tau_m$ one draws first random numbers r_j, $j = 0, \dots, m$ from $\mathcal{N}(0,1)$ and one lets $x_i = \sqrt{\rho} r_0 + \sqrt{1-\rho} r_i$, $1 \leq i \leq m$. Denote by Φ the df of standard normal; then

$$(t_1, \dots, t_m) := \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-\Phi(x_1)), \dots, -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\Phi(x_m))\right)$$

are by Sklar the desired realisations (using that the quantile function of $Exp(\lambda)$ is $F^{-1}(u) = -1/\lambda \ln(1-u)$).

(c) Reasons for the use of CDOs

- reduction of regulatory capital of the issuer;
- the repackaging makes the tranches attractive for a larger class of investors such as pension funds that may invest only in investment grade securities.

Potential problems

- Mispricing, in particular if dependence and credit quality of the underlying assets is misjudged

- Incentive problems

(d) The expected payoff of the equity tranche is increasing in ρ, $E(S_T)$ is decreasing. Since ρ is hard to determine, one should study the impact of variations in ρ on the value of a tranche in order to assess the model risk involved.