



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Pensionen I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12.10.2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Unterlagen bestehen aus 9 Seiten (inkl. Deckblatt).
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Wie in den Seminaren Versicherungsmathematik und Spezialwissen Pensionen I wird im Folgenden die Bezeichnung \ddot{a} für einen vorschüssigen Barwert verwendet. Es kann jedoch auch die Bezeichnung a verwendet werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Daniel Fröhn, Korbinian Meindl,
Prof. Dr. Oskar Goecke, Mark Walddörfer



Aufgabe 1. [24 Punkte]

Wir betrachten im Rahmen des allgemeinen Bevölkerungsmodell der Pensionsversicherungsmathematik das Modell einer zusammengesetzten Ausscheideordnung mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Es bedeuten auf der Basis eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) bei einem Aktiven des Alters x und mit Geburtsjahrgang G die folgenden Zufallsvariablen:

X_1 : Alter bei Eintritt der Invalidität

X_2 : Alter bei Eintritt des Todes

Bekanntlich werden im Rahmen dieses Bevölkerungsmodells neben der Hauptgesamtheit der Aktiven auch die Nebengesamtheit der Invaliden sowie der Gesamtbestand betrachtet.

Wir betrachten die folgenden Wahrscheinlichkeiten

- q_x^a : Wahrscheinlichkeit eines Aktiven des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- q_x^g : Wahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person des Gesamtbestandes innerhalb eines Jahres zu sterben
- q_x^i : Wahrscheinlichkeit eines Invaliden des Alters x innerhalb eines Jahres zu sterben
- l_x^a : Wahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person zum Aktivenbestand zu gehören
- l_x^g : Wahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person zum Gesamtbestand zu gehören

(a) [8 Punkte] Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus.

(b) [8 Punkte] Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung aus (a) die erste Konsistenzgleichung:

$$q_x^g = \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^a + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i$$



- (c) [8 Punkte] Zeigen Sie, dass sich die erste Konsistenzgleichung in der üblichen Darstellung der Richttafeln 2018 G von Klaus Heubeck auch wie folgt formulieren lässt:

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot \left(q_x^i - q_x^{aa} - i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i \right)$$

Erläutern Sie kurz, welche Auswirkung die 1. Konsistenzgleichung auf das Vorgehen bei der Modifikation von Ausscheidewahrscheinlichkeiten eines Aktiven in den Richttafeln 2018 G hat.

Erläutern Sie ferner, welche in den Richttafeln 2018 G getroffene Zusatzannahme in dieser Darstellung verwendet wird.



Aufgabe 2. (Fortsetzung von Aufgabe 1) [20 Punkte]

Wir betrachten innerhalb des in **Aufgabe 1** beschriebenen Bevölkerungsmodells nun eine x -jährige Person des Gesamtbestandes. Weiter seien für diese Person die folgenden Zufallsvariablen definiert:

$N :=$ Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod und

$B := v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{N-m+1}|} \cdot 1_{\{N \geq m\}}$ für ein vorgegebenes $m \in \mathbb{N}_0$

- (a) [7 Punkte] Drücken Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N \geq m)$ und $\mathbb{P}(N = m)$ mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 aus Aufgabe 1 aus und leiten Sie hieraus die übliche versicherungsmathematische Notation für diese Wahrscheinlichkeiten ab.
- (b) [3 Punkte] B stellt den Erfüllungsbetrag einer ungewissen Verpflichtung dar. Beschreiben Sie genau, um welche Art Verpflichtung es sich bei B handelt (insbesondere unter Angabe welche Zahlungen zu leisten sind und wann diese beginnen).
- (c) [10 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert von B und stellen Sie diesen in der üblichen versicherungsmathematischen Notation dar.



Aufgabe 3. [28 Punkte]

Bekanntlich besteht im Rahmen eines Versicherungsvertrages nach m Jahren seit Beginn ($m = 0, 1, \dots, n-1$ mit n : Laufzeit des Versicherungsvertrages) ein Zusammenhang zwischen dem Barwert der im Jahr m verursachten Leistungen ${}_m\hat{L}_x$, der Prämie ${}_m\hat{P}_x$, den Reserven ${}_mV_x$ und ${}_{m+1}V_x$, der Sparprämie ${}_mP_x^S$ und der Risikoprämie ${}_mP_x^R$ einer Verpflichtung (wobei bei den folgenden Betrachtungen Kosten außen vor gelassen und alle Prämien als jährlich vorschüssig vorausgesetzt werden).

Hiernach gilt für die Sparprämie nach m Jahren seit Beginn ($m = 0, 1, \dots, n-1$ mit n : Laufzeit des Versicherungsvertrages)

$${}_mP_x^S = v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x$$

und für die Risikoprämie nach m Jahren seit Beginn

$${}_mP_x^R = {}_m\hat{L}_x - v \cdot q_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x.$$

(a) [4 Punkte] Beweisen Sie ${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R$, $m = 0, 1, \dots, n-1$.

(b) [3 Punkte] Der Vertrag sieht als Prämie die natürliche Prämie vor: Für jedes Jahr entspricht die "natürliche Prämie" dem Barwert der in diesem Jahr verursachten Leistungen, also

$${}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Berechnen Sie unter der Bedingung ${}_0V_x = 0$ die Reserven ${}_mV_x$, $m = 0, 1, \dots, n$, und hieraus ${}_mP_x^S$ und ${}_mP_x^R$, $m = 0, 1, \dots, n-1$.

(c) [8 Punkte] Der Vertrag sieht als Leistung für den Fall des Ausscheidens die Verrentung der Reserve zum Ende des Jahres vor, also

$${}_m\hat{L}_x = q_{x+m} \cdot v \cdot {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Berechnen Sie ${}_mP_x^S$, ${}_mP_x^R$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, und stellen Sie ${}_{m+1}V_x$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, unter der Bedingung ${}_0V_x = 0$ in Abhängigkeit der Prämien ${}_k\hat{P}_x$, $k = 0, 1, \dots, m$, dar.

(d) [5 Punkte] Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Sparprämie höher als die Prämie ausfallen kann, wobei Sie ${}_mV_x \geq 0 \forall m$ unterstellen können. Erläutern Sie die finanzielle Quelle dieser positiven Differenz zwischen Sparprämie und Prämie.

(e) [8 Punkte] Es liege als Vertrag die Verpflichtung zur Zahlung einer lebenslanglich laufenden, jährlich vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag R vor, also ${}_m\hat{P}_x = 0$ für $m = 0, 1, \dots$.

Geben Sie ${}_mV_x$, $m = 0, 1, \dots$, für diesen Vertrag explizit an und zeigen Sie ${}_mP_x^S = -R(1 - v \cdot q_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+m+1})$.



Aufgabe 4. [18 Punkte]

In den internationalen Bilanzierungsstandards (IFRS und US-GAAP) findet die Projected Unit Credit Methode Anwendung, nach der die Rückstellung für übliche Leistungszusagen in folgender Form dargestellt werden kann:

$${}_mV_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k \cdot {}_k p_{x+m}^a \cdot \frac{m}{m+k} \cdot {}_{m+k} \hat{L}_x \quad m = 0, 1, \dots, n$$

Wir betrachten dabei eine zum Vertragsbeginn x -jährige Person der Hauptgesamtheit der Aktiven bezüglich der die Ereignisse Fluktuation, Invalidität und Tod auftreten können, die zu Leistungsansprüchen oder Leistungsanswartschaften führen.

${}_{m+k} \hat{L}_x$ bezeichne den Erwartungswert der gesamten Leistung, die durch Erreichen des Altersintervalls $]x + m + k, x + m + k + 1]$ ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Beginn dieses Jahres.

n bezeichne die Anzahl der Jahre bis zum Pensionierungsalter z , also $n = z - x$.

- (a) [10 Punkte] Zeigen Sie mittels der versicherungsmathematischen Bilanzgleichungen, dass sich die Prämie in dieser Definition der Projected Unit Credit Methode wie folgt darstellen lässt:

$${}_m \hat{P}_x = \sum_{k=1}^{n-m} v^k \cdot {}_k p_{x+m}^a \cdot \frac{1}{m+k} \cdot {}_{m+k} \hat{L}_x \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

- (b) [8 Punkte] Wir betrachten nun eine Verpflichtung, die nur eine ab dem Pensionierungsalter z beginnende, lebenslänglich laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vorsehe. Weitere Leistungen werden nicht gewährt.

Zeigen Sie, dass für eine solche Zusage in der Projected Unit Credit Methode ein steigender Prämienverlauf angesetzt wird, d.h. es gilt:

$${}_m \hat{P}_x \leq {}_{m+1} \hat{P}_x \quad m = 0, 1, \dots, n-2$$

Aufgabe 5. [36 Punkte]

Sie betreuen als Gutachter erstmalig die Firma XYZ GmbH. Die Firma hat ihren Mitarbeitern diverse Zusatzleistungen zugesagt:

- I. Jeder Mitarbeiter erhält von der Firma bei Erreichen der Altersgrenze der gesetzlichen Rentenversicherung eine Altersrente in Höhe von 5 EUR pro Dienstjahr. Bei Invalidität wird eine Invalidenrente von 5 EUR pro Dienstjahr gezahlt, bei Tod eine Hinterbliebenenrente von 3 EUR pro Dienstjahr, wobei in beiden Fällen für die Bestimmung der Leistungshöhe die im Zeitpunkt des Versorgungsfalles tatsächlich erreichten Dienstjahre um $\frac{2}{3}$ der ggf. noch bis zur Altersgrenze fehlenden Dienstjahre erhöht werden.
- II. Ferner erhält jeder Mitarbeiter eine Einmalzahlung von 1.000 EUR nach 10 Jahren Dienstzeit, von 2.000 EUR nach 20 Jahren Dienstzeit und von 4.000 EUR nach 40 Jahren Dienstzeit.
- III. Jeder Mitarbeiter hat die Möglichkeit, ab Vollendung des 57. Lebensjahres seine Arbeitszeit um 50 % zu reduzieren. Die Firma stockt das Teilzeitgehalt um 20 % des Teilzeitgehaltes auf und zahlt zusätzliche Beiträge zur gesetzlichen Rentenversicherung.
- IV. Jeder Mitarbeiter erhält nach 20, 30 und 40 Jahren Dienstzeit jeweils einen Tag Sonderurlaub.
- V. Jeder Mitarbeiter hat die Möglichkeit, auf Teile seines Entgelts zugunsten einer Versorgungszusage durch die XYZ Unterstützungskasse e.V. zu verzichten. Der Verzichtsbetrag wird als Versicherungsbeitrag an eine Lebensversicherung gezahlt. Der Mitarbeiter erhält bei Erreichen der Altersgrenze Leistungen in Höhe der Leistung der Versicherung.

Die Firma hat in der Vergangenheit nie einen versicherungsmathematischen Gutachter beauftragt. Rückstellungen wurden in der Bilanz nicht gebildet. Der neue Geschäftsführer der Firma möchte von Ihnen wissen:

- a) [12 Punkte] Für welche der oben aufgeführten Leistungen die Firma Rückstellungen in der Handels- und Steuerbilanz bilden muss bzw. kann? Geben Sie an, um welche Art von Verpflichtungen es sich jeweils handelt, welche Bewertungsmethoden jeweils zulässig wären und mit welchen Rechnungszinssätzen die Bewertungen durchzuführen sind.
- b) [10 Punkte] Welche Parameter sind für die Bewertung noch festzulegen? Geben Sie außerdem an, welche Vorschriften oder Grundsätze bei der Festlegung der Parameter zu beachten sind.

- c) [10 Punkte] Beschreiben Sie für einen Mustermitarbeiter die Entwicklung der steuerlichen Rückstellung der Leistungen I und II, jeweils vom Diensteintritt im Alter 30 bis zum Erreichen der Altersgrenze.
- d) [4 Punkte] Welche Konsequenzen ergeben sich daraus, dass die Firma in der Vergangenheit keine Rückstellungen für die oben beschriebenen Leistungen gebildet hat?

Hinweis: Die Fragen beziehen sich ausschließlich auf die Rückstellungen und deren Berechnung. Der Pensionsversicherungsverein bzw. die Bemessungsgrundlage für den Insolvenzschutz ist bei der Beantwortung der Fragen nicht zu betrachten.

Aufgabe 6. [36 Punkte]

Sie haben einen neuen Kunden gewonnen – Glückwunsch! Die Wirmachenalles AG ist ein Mischkonzern, deren Mitarbeiter in den Genuss betrieblicher Altersversorgung kommen. Ansprüche aus den 85 verschiedenen Versorgungsordnungen (der Konzern ist vor allem mittels Firmenaufkäufen gewachsen) haben ca. 10.000 Anwarter und 20.000 Leistungsempfänger. Glücklicherweise haben Sie noch ein halbes Jahr Zeit bevor Sie die Gutachten (EStG, HGB, IFRS) über die Höhe der Pensionsverpflichtungen erstellen müssen.

Zwei Wochen nach Erhalt der Unterlagen (Vorgutachten der letzten drei Jahre, Kopien der 85 Versorgungsregelungen inkl. Nachträge zu selbigen) und noch vor Erhalt jeglicher Personendaten meldet sich ein Mitarbeiter der Finanzabteilung bei Ihnen. Er benötigt kurzfristig für Planungszwecke eine Prognose der Entwicklung der wichtigsten IFRS Aufwands- und Bilanzgrößen für die nächsten drei Jahre. Der vorherige Aktuar hat seine Tätigkeit vollständig eingestellt und kann diese Größen nicht ermitteln.

- a) [3 Punkte] Welche Aufwands- und Bilanzgrößen (der Passivseite) werden vermutlich benötigt?
- b) [9 Punkte] Erläutern Sie die beiden im Repetitorium vorgestellten Prognosemethoden, um die zukünftige Entwicklung der betrieblichen Altersversorgung im Zeitablauf zu beschreiben! Worin unterscheiden sich diese Verfahren?
- c) [6 Punkte] Welche Parameter sind für Prognoserechnungen grundsätzlich festzulegen?
- d) [12 Punkte] Eine Einrichtung der Zusagen in Ihrem Bewertungs- und Prognoseprogramm ist kurzfristig nicht machbar, außerdem könnten Ihnen auch kurzfristig keine Personendaten zur Verfügung gestellt werden. Welche Möglichkeiten haben Sie, um die vom Kunden benötigten Werte dennoch zu ermitteln? Beschreiben Sie ihr Vorgehen bei der Ermittlung der in a) gefragten Größen und gehen Sie darauf ein, um welche der in b) gesuchten Methoden es sich dabei grundsätzlich handelt und wie Sie die in c) gefragten Parameter festlegen.
- e) [6 Punkte] Wie schätzen Sie die Qualität Ihrer Berechnung ein – wären bei einer „ordentlichen“ Berechnung, unabhängig davon welche der beiden Verfahren Sie verwendeten hätten, deutlich andere Ergebnisse zu erwarten? Unter welchen Bedingungen ist Ihr Verfahren gut geeignet, unter welchen Bedingungen weniger gut?

Aufgabe 7. [18 Punkte]

Einer Ihrer Mandanten trägt sich mit dem Gedanken, erstmals betriebliche Altersversorgung für seine Belegschaft einzuführen und fragt Sie um Rat.

- a) [9 Punkte] Wie kann die Effizienz von betrieblicher Altersversorgung beurteilt werden? Welche Rolle spielt dabei die subjektive Zinserwartung der Arbeitnehmer?

- b) [9 Punkte] Erläutern Sie den Begriff des „Dotierungsrahmens“. Wie könnte dieser bei der Erteilung von Versorgungszusagen konkret bestimmt werden und was ist dabei zu beachten?



Lösungshinweise zu Aufgabe 1

(a)

$$q_x^a = \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_1 > x, X_2 > x]$$

$$q_x^g = \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_2 > x]$$

$$q_x^i = \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_1 \leq x, X_2 > x]$$

$$l_x^a = \mathbb{P}[X_1 > x, X_2 > x]$$

$$l_x^g = \mathbb{P}[X_2 > x]$$

(b)

$$\begin{aligned} q_x^g &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+1, X_1 > x | X_2 > x] + \mathbb{P}[X_2 \leq x+1, X_1 \leq x | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_1 > x, X_2 > x] \cdot \mathbb{P}[X_1 > x | X_2 > x] \\ &\quad + \mathbb{P}[X_2 \leq x+1 | X_1 \leq x, X_2 > x] \cdot \mathbb{P}[X_1 \leq x | X_2 > x] \\ &= q_x^a \cdot \frac{\mathbb{P}[X_1 > x, X_2 > x]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} + q_x^i \cdot \frac{\mathbb{P}[X_1 \leq x, X_2 > x]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} \\ &= q_x^a \cdot \frac{l_x^a}{l_x^g} + q_x^i \cdot \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \end{aligned}$$



(c) Mit $q_x^a = q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i$ folgt:

$$\begin{aligned} q_x^g &= q_x^a \cdot \frac{l_x^a}{l_x^g} + q_x^i \cdot \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \\ &= \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot (q_x^{aa} + i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i) + \frac{l_x^g - l_x^a}{l_x^g} \cdot q_x^i \\ &= q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \cdot (q_x^i - q_x^{aa} - i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i) \end{aligned}$$

Erläuterung: Durch die 1. Konsistenzgleichung besteht ein Zusammenhang zwischen q_x^{aa} , q_x^i , q_x^g und i_x . Eine isolierte Modifikation einer dieser Wahrscheinlichkeiten ist daher im Richttafelmodell nicht modellkonform, es muss mindestens eine weitere Wahrscheinlichkeit modifiziert werden, so dass die Konsistenzgleichung erfüllt bleibt.

In der Darstellung $i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i$ wird der Ansatz der RT 2018 G verwendet, dass der Übergang vom Aktivenbestand zum Invalidenbestand rechnermäßig, d.h. zur Mitte des Jahres stattfindet.



Lösungshinweise zu Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N \geq m] &= \mathbb{P}[X_2 \geq x + m | X_2 > x] \\ &= \mathbb{P}[X_2 > x + m | X_2 > x] = {}_m p_x^g \\ \\ \mathbb{P}[N = m] &= \mathbb{P}[x + m \leq X_2 < x + m + 1 | X_2 > x] \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m, X_2 \leq x + m + 1, X_2 > x]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m, X_2 \leq x + m + 1]}{\mathbb{P}[X_2 > x + m]} \cdot \frac{\mathbb{P}[X_2 > x + m]}{\mathbb{P}[X_2 > x]} \\ &= \mathbb{P}[X_2 \leq x + m + 1 | X_2 > x + m] \cdot \mathbb{P}[X_2 > x + m | X_2 > x] \\ &= q_{x+m}^g \cdot {}_m p_x^g\end{aligned}$$

(b) B stellt den Erfüllungsbetrag der Anwartschaft einer x-jährigen Person des Gesamtbestandes auf eine im Alter $x + m$ beginnende, jährlich vorschüssig zahlbare, lebenslänglich laufende Rente des Jahresbetrags 1 dar.

(c)

$$\begin{aligned}B &= v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{N-m+1}|} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k=0}^{N-m} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N-m \geq k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m\}} \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}[B] &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{N \geq m+k\}}] \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot \mathbb{P}[N \geq m+k] \\ &= v^m \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_{m+k}p_x^g \\ &= v^m \cdot {}_m p_x^g \cdot \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_{x+m}^g \\ &= v^m \cdot {}_m p_x^g \cdot \ddot{a}_{x+m}^g\end{aligned}$$



Lösungshinweise zu Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned} {}_m P_x^S + {}_m P_x^R &= v_{m+1} V_x - {}_m V_x + {}_m \hat{L}_x - v q_{x+m} {}_{m+1} V_x \\ &= {}_m \hat{L}_x + v p_{x+m} {}_{m+1} V_x - {}_m V_x \quad (\text{versicherungsmath. Bilanzgleichung}) \\ &= {}_m \hat{P}_x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} v p_{x+m} {}_{m+1} V_x &= {}_m V_x + {}_m \hat{P}_x - {}_m \hat{L}_x = {}_m V_x \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\Rightarrow {}_m V_x = 0 \quad \forall m \\ {}_m P_x^S &= v_{m+1} V_x - {}_m V_x = 0 \quad (\text{wegen } {}_0 V_x = 0) \\ {}_m P_x^R &= {}_m \hat{L}_x = {}_m \hat{P}_x \end{aligned}$$

(c) Für $m = 0, 1, \dots, n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} {}_m \hat{L}_x &= q_{x+m} v_{m+1} V_x \\ {}_m P_x^R &= q_{x+m} v_{m+1} V_x - v q_{x+m} {}_{m+1} V_x = 0 \\ \Rightarrow {}_m P_x^S &= {}_m \hat{P}_x \end{aligned}$$

Beh: ${}_{m+1} V_x = \sum_{k=0}^m r^{m+1-k} {}_k \hat{P}_x$

Beweis (vollständige Induktion):

Es gilt

$$\begin{aligned} v_{m+1} V_x - {}_m V_x &= {}_m P_x^S = {}_m \hat{P}_x \\ \Rightarrow {}_{m+1} V_x &= r ({}_m V_x + {}_m \hat{P}_x) \end{aligned}$$



$m = 0$:

$$\begin{aligned} {}_1V_x &= r ({}_0V_x + {}_0\hat{P}_x) \\ &= r {}_0\hat{P}_x \end{aligned}$$

$m \rightarrow m + 1$:

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V_x &= r \sum_{k=0}^{m-1} r^{m-k} {}_k\hat{P}_x + r {}_m\hat{P}_x \\ &= \sum_{k=0}^m r^{m+1-k} {}_k\hat{P}_x \end{aligned}$$

(d)

Beispiel: ${}_m\hat{L}_x = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}_mP_x^R &= -v q_{x+m} {}_{m+1}V_x \\ \Rightarrow {}_mP_x^R &< 0 \\ \Rightarrow {}_mP_x^S &= {}_m\hat{P}_x - {}_mP_x^R > {}_m\hat{P}_x \end{aligned}$$

Die Differenz wird durch Wegfall der Reserve finanziert (Stichwort: Vererbung).

(e) Für ${}_mV_x$, $m = 0, 1, \dots$, gilt:

$${}_mV_x = R \cdot \ddot{a}_{x+m}$$

$$\begin{aligned} {}_m\hat{P}_x^S &= v {}_{m+1}V_x - {}_mV_x = R (v \ddot{a}_{x+m+1} - \ddot{a}_{x+m}) \\ &= R \underbrace{(v p_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1} + v q_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1} - 1)}_{v \ddot{a}_{x+m+1}} \underbrace{- 1}_{-\ddot{a}_{x+m}} \\ &= R (v q_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1} - 1) \\ &= -R (1 - v q_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1}) \end{aligned}$$



Lösungshinweise zu Aufgabe 4

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 {}_m\hat{P}_x &= {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m}^a {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\
 &= {}_m\hat{L}_x + v p_{x+m}^a \sum_{k=0}^{n-m-1} v^k {}_k p_{x+m+1}^a \frac{m+1}{m+1+k} {}_{m+1+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x \\
 &= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=0}^{n-m-1} v^{k+1} {}_{k+1} p_{x+m}^a \frac{m+1}{m+k+1} {}_{m+k+1}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x \\
 &= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m+1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x - \sum_{k=0}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{m}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x \\
 &= {}_m\hat{L}_x + \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x - {}_m\hat{L}_x \\
 &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x
 \end{aligned}$$

(b) Da nur eine reine Altersrente gewährt wird, gilt:

- ${}_m\hat{L}_x = 0$ für $m < n$ und
- ${}_m\hat{L}_x = \ddot{a}_z^r$ für $m = n$.

Zusammen mit Teilaufgabe a) folgt somit:

$${}_m\hat{P}_x = \sum_{k=1}^{n-m} v^k {}_k p_{x+m}^a \frac{1}{m+k} {}_{m+k}\hat{L}_x = v^{n-m} {}_{n-m} p_{x+m}^a \frac{1}{n} {}_n\hat{L}_x = v^{n-m} {}_{n-m} p_{x+m}^a \frac{1}{n} \ddot{a}_z^r$$

Für $m = 0, 1, \dots, n-2$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
 {}_m\hat{P}_x &= v^{n-m} {}_{n-m} p_{x+m}^a \frac{1}{n} \ddot{a}_z^r = v \cdot v^{n-m-1} p_{x+m}^a \cdot {}_{n-m-1} p_{x+m+1}^a \frac{1}{n} \ddot{a}_z^r \\
 &= v \cdot p_{x+m}^a \cdot {}_{m+1}\hat{P}_x \leq {}_{m+1}\hat{P}_x
 \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 5:

a) (12 Punkte)

Bei Leistung I handelt es sich um Leistungen aus einer unmittelbaren Pensionszusage. Für diese sind in der Handels- und Steuerbilanz Pensionsrückstellungen zu bilden. Als Bewertungsmethode in der Handelsbilanz kommt das modifizierte Teilwertverfahren oder die PUC-Methode in Frage. In der Steuerbilanz ist das Teilwertverfahren als Bewertungsmethode vorgeschrieben. In der Handelsbilanz sind zwei Bewertungen durchzuführen, eine mit dem 10-Jahres-Durchschnittszins und eine mit dem 7-Jahres-Durchschnittszins. Der Zinssatz hat der Laufzeit der Verpflichtungen zu entsprechen, vereinfachend kann eine Laufzeit von 15 Jahren unterstellt werden. In der Steuerbilanz ist ein Zinssatz von 6 % vorgeschrieben.

Bei Leistungen II und IV handelt es sich um Leistungen anlässlich eines Dienstjubiläums. Für diese sind Rückstellungen zu bilden. Als Bewertungsmethode in der Handelsbilanz kommt das modifizierte Teilwertverfahren oder die PUC-Methode in Frage. In der Steuerbilanz kann ein pauschaler Ansatz oder die Bewertung mit dem Teilwertverfahren gewählt werden. In der Handelsbilanz ist ein 7-Jahres-Durchschnittszins entsprechend der Laufzeit der Verpflichtungen oder pauschal 15 Jahren Laufzeit zu verwenden. In der Steuerbilanz ist ein Zinssatz von 5,50 % vorgeschrieben.

Bei Leistung III handelt es sich um Altersteilzeitverpflichtungen im Wege des Teilzeitmodells. Für die Aufstockungszahlungen auf Gehalt und Rentenversicherungsbeiträge sind in der Handelsbilanz Rückstellungen zu bilden. Als Bewertungsverfahren in der Handelsbilanz kommen, je nach Charakter der Aufstockungszahlungen, der Barwert (Abfindungscharakter) bzw. das modifizierte Teilwertverfahren oder die PUC-Methode (Entgeltcharakter) in Frage. Da es sich um das Teilzeitmodell handelt, sind in der Steuerbilanz keine Rückstellungen zu bilden. In der Handelsbilanz ist ein 7-Jahres-Durchschnittszins entsprechend der Laufzeit der Verpflichtungen oder pauschal 15 Jahren Laufzeit zu verwenden.

Bei Leistung V handelt es sich um Pensionsverpflichtungen aus Entgeltumwandlungen, die über eine kongruent rückgedeckte Unterstützungskasse durchgeführt werden. Für diesen externen Durchführungsweg ist keine Rückstellungsbildung erforderlich (Handelsbilanz) bzw. zulässig (Steuerbilanz).

b) (10 Punkte)

Festzulegen sind:

- Biometrische Rechnungsgrundlagen: Gemäß § 6a EStG sind für die steuerliche Bewertung die „anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik anzuwenden“, was in der Praxis gleichgesetzt wird mit den vom BMF anerkannten Richttafeln 2018 G. Die Formulierung in § 253 HGB des „nach vernünftiger kaufmännischer Beurteilung notwendigen Erfüllungsbetrages“ impliziert die Verwendung unternehmensindividueller biometrischer Rechnungsgrundlagen. In der Regel sind die Bestände der Unternehmen allerdings zu klein, um verlässliche individuelle Rechnungsgrundlagen herzuleiten. Daher werden auch bei der handelsbilanziellen Bewertung in der Regel die aktuellen Richttafeln 2018 G verwendet. Es ist möglich, sowohl bei der steuerlichen als auch bei der handelsbilanziellen Bewertung an die Gegebenheiten beim Unternehmen angepasste modifizierte Richttafeln zu verwenden. Von dieser Möglichkeit wird in der Praxis nur selten Gebrauch gemacht.
- Pensionsalter: Gemäß R6a Abs. 11 EStR bestehen bei der steuerbilanziellen Bewertung von Pensionsverpflichtungen grundsätzlich drei Möglichkeiten für die Festlegung des Pensionsalters (feste Altersgrenze der Versorgungsordnung, späteres Pensionsalter, frühestmögliche Altersgrenze gRV). Aus dem in § 253 HGB verwendeten Begriff „Erfüllungsbetrag“ ergibt sich, dass sich das bei der handelsbilanziellen Bewertung angesetzte Pensionsalter an den Gegebenheiten beim Unternehmen orientieren soll.
- Trends: Aus dem in § 253 HGB verwendeten Begriff „Erfüllungsbetrag“ ergibt sich, dass bei der handelsbilanziellen Bewertung künftige Renten- und Gehaltsanpassungen entsprechend ihrer voraussichtlichen Höhe zu berücksichtigen sind. In der Steuerbilanz dürfen gemäß § 6a EStG nur bereits feststehende Anpassungen berücksichtigt werden.
- Fluktuationswahrscheinlichkeit: Aus dem in § 253 HGB verwendeten Begriff „Erfüllungsbetrag“ ergibt sich, dass die Fluktuationswahrscheinlichkeit bei der handelsbilanziellen Bewertung entsprechend der Gegebenheiten beim Unternehmen zu berücksichtigen ist. Gemäß § 6a EStG dürfen in der Steuerbilanz nur bereits feststehende Sachverhalte berücksichtigt werden. Die in § 6a EStG vorgegebenen Mindestalter für den Finanzierungsbeginn stellen eine Art pauschale Berücksichtigung der Fluktuation dar.

c) (10 Punkte)

Die Rückstellung I baut sich ab Diensteintritt langsam auf. Der jährliche Anstieg entspricht im Wesentlichen der Teilwertprämie zzgl. der Verzinsung der Rückstellung und abzüglich einer Risikoprämie für die nicht eingetretenen Risiken Tod und Invalidität. Ab Rentenbeginn bzw. ab Erreichen des rechnerischen Pensionsalters sinkt die Rückstellung um die (rechnerisch) gezahlte Rente und steigt um die Verzinsung der Rückstellung sowie um den Risikoverlust durch den nicht eingetretenen Tod.

Für das Dienstjubiläum nach 10 Jahren darf in der Steuerbilanz keine Rückstellung gebildet werden. Die Rückstellung II ist in den ersten zehn Jahren nach Diensteintritt zunächst null, macht dann einen Sprung bevor sie sich bis zum 20. Dienstjubiläum langsam aufbaut. Der jährliche Anstieg entspricht im Wesentlichen der Teilwertprämie zzgl. der Verzinsung der Rückstellung. Unmittelbar vor dem 20. Dienstjubiläum beträgt die Rückstellung 2.000 EUR zzgl. Sozialversicherungsbeiträgen des Arbeitgebers. Nach 20 Dienstjahren beträgt die Rückstellung null, da das 40 jährige Jubiläum rechnerisch nicht erreicht werden kann.

d) (4 Punkte)

Für Pensionsverpflichtungen gibt es in der Steuerbilanz ein Nachholverbot, d.h. in der Vergangenheit unterlassene Zuführungen zur Pensionsrückstellungen dürfen nicht nachgeholt werden. Erst bei Ausscheiden des Arbeitnehmers bzw. bei Eintritt des Leistungsfalls kann die unterlassene Zuführung einmalig nachgeholt werden. Für die anderen Verpflichtungen gibt es kein Nachholverbot.

Für die Handelsbilanz ergeben sich aus der Unterlassung zunächst keine Konsequenzen. Allerdings muss im ersten Jahr der Rückstellungsbildung die komplette Rückstellung zugeführt werden (-> Bilanzsprung). Damit besteht im ersten Jahr eine noch deutlichere Differenz zwischen der handelsbilanziell notwendigen und der steuerbilanziell zulässigen Zuführung zur Pensionsrückstellung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6:

a) (3 Punkte)

Bilanzgröße:

- Verpflichtungsumfang (DBO)

Aufwandsgrößen:

- Aktueller Dienstzeitaufwand (CSC)
- Zinsaufwand
- Versicherungsmathematische Gewinne und Verluste

Sonstige Größen:

- Rentenzahlungen

b) (9 Punkte)

Als Prognoseverfahren stehen die deterministische Prognose, sowie die stochastische Prognose (Monte-Carlo-Verfahren) zu Verfügung.

Bei der deterministischen Methode wird jede einzelne Person des Bestandes nach Maßgabe der aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen hergeleiteten Übergangswahrscheinlichkeiten Jahr für Jahr fortentwickelt. Auf diese Weise können unmittelbar die Erwartungswerte der interessierenden Kenngrößen im Zeitablauf ermittelt werden.

Bei der Monte-Carlo-Simulation hingegen wird das individuelle Schicksal eines jeden Berechtigten des Bestandes auf Basis der zugrunde gelegten Rechnungsgrundlagen simuliert. Als Resultat erhält man eine mögliche Realisierung der zu prognostizierenden Größen (z.B. Rentenzahlungen). Anhand einer Vielzahl von Realisierungen werden Schätzer für die zu prognostizierenden Größen gewonnen.

Im Gegensatz zu einer deterministischer können bei einer Monte-Carlo-Simulation neben Schätzern für den Erwartungswert der interessierenden Größen auch Schätzer für weitere Größen (z.B. die Varianz) ermittelt werden.

c) (6 Punkte)

Festzulegende Parameter sind z.B.:

Fortschreibung:

- Biometrische Rechnungsgrundlagen
- Altersgrenzen
- Annahmen zur Modellierung des Neuzugangs
 - abnehmender / konstanter / wachsender Aktivenbestand
 - Eintrittsaltersverteilung

➤ Gehaltsstruktur

- Zukünftige Dotierungen bei beitragsorientierten Systemen
- Trendannahmen zur Steigerung der Bemessungsgrößen
- Trendannahmen zur Steigerung der Renten
- Prognosezeitraum

Bewertung:

- Bewertungsmethode
- Rechnungszins
- Biometrische Rechnungsgrundlagen
- Altersgrenzen
- Trendannahmen zur Steigerung der Bemessungsgrößen
- Trendannahmen zur Steigerung der Renten

d) (12 Punkte)

Aufgrund der fehlenden Alternativen und der kurzfristig benötigten Ergebnislieferung bietet sich eine Prognose mittels Roll-Forward-Verfahren an. Dabei geht man wie folgt vor:

- Die DBO zum Jahresende ergibt sich jeweils als Summe aus
 - DBO zum Jahresanfang (+)
 - CSC des Jahres (+)
 - Zinsaufwand des Jahres (+)
 - Rentenzahlungen (-)
 - Versicherungsmathematische Gewinne (-) und Verluste (+)
- Zinsaufwand wird nach der üblichen Formeln ermittelt
 - $ZA = (DBO_JA + 0,5 \times \text{Rentenzahlungen}) \times \text{Zins_JA}$
- CSC des ersten Prognosejahres ist im letzten Gutachten angegeben. CSC der Folgejahre können entsprechend der durchschnittlichen Entwicklung der letzten Jahre geschätzt werden.
- Erwartete Rentenzahlungen der nächsten Jahre sind ebenfalls im letzten Gutachten angegeben. Diese müssen geringfügig erhöht werden, da in der Regel nur die zum Stichtag verdienten Rentenzahlungen im Gutachten angegeben werden.
- Als Zinssatz ist der aktuelle IFRS Zins anzusetzen. Falls abweichend zum Vorjahr, können versicherungsmathematische Gewinne /Verluste und CSC durch die Sensitivitätsangaben im letzten Gutachten geschätzt werden.
- Ansonsten gibt es keine versmath. Gewinne und Verluste. Falls sich in den letzten drei Jahren regelmäßig erfahrungsbedingte Anpassungen einer bestimmten Größenordnung beobachten lassen, wäre auch ein Ansatz in entsprechender prozentualer Größenordnung bei der Prognose denkbar.

Bei dem Roll-Forward handelt es sich um eine Approximation der deterministischen Prognose. Die DBO, CSC und erwarteten Rentenzahlungen beinhalten alle Übergangswahrscheinlichkeiten aus den biometrischen Rechnungsgrundlagen. Die Fortschreibung erfolgt auf Bestandsebene.

Die Prognoseparameter werden implizit durch die Verwendung der Werte aus dem letzten Gutachten festgelegt. Sie entsprechen damit im Wesentlichen denen des Gutachtens. Einzig der Rechnungszins ist zum Zeitpunkt der Berechnung neu zu bestimmen.

e) (6 Punkte)

Bei einem kurzen Prognosezeitraum kommt das Roll-Forward-Verfahren dem Ergebnis einer „ordentlichen“ Prognose recht nahe. Entscheidend ist dabei aber auch die Größe des betrachteten Bestandes. Bei großen Beständen bleibt die Entwicklung der geschätzten Größen, wie z.B. der CSC, sehr stabil. Bei kleinen Beständen oder langen Zeiträumen wird die Schätzung dagegen ungenau, etwa weil die Entwicklung der CSC durch eine schwankende Anzahl von Renteneintritten ihrerseits stark schwankt oder sich kleine Abweichungen (z.B. durch Zins-Umschätzung von DBO und CSC im Zeitablauf potenzieren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7:

a) (9 Punkte)

Betriebliche Altersversorgung (bAV) ist dann effizient, wenn sie insgesamt in der Wertschätzung der Arbeitnehmer höher eingeschätzt wird als die wirtschaftliche Belastung des Arbeitgebers tatsächlich ist. Letztlich ist der Lohnzuschlag maßgeblich, den der Arbeitnehmer anstelle der bAV als (mindestens) gleichwertigen Ersatz akzeptieren würde. Dieser hängt davon ab, inwieweit der Arbeitnehmer heutige Geldzuflüsse für sich höher als zukünftige Geldzuflüsse bewertet. Je höher die subjektive Zinserwartung ausfällt, desto mehr wird er heutige Geldzuflüsse bevorzugen. Insgesamt gilt die Tendenzaussage: Je mehr der für den Arbeitgeber maßgebende kalkulatorische Zins den subjektiven Zins des Arbeitnehmers übersteigt, desto effizienter ist bAV.

Hinweis: Auch andere Kriterien als die subjektive Zinserwartung können hier genannt werden. So kann z.B. auch die Risikoabdeckung (Invalidität, Todesfall) durch die bAV eine hohe Wertschätzung beim Arbeitnehmer fördern.

b) (9 Punkte)

Der Dotierungsrahmen ist ein Begriff aus dem Arbeitsrecht. Er bezeichnet die Gesamtheit der wirtschaftlichen Auswirkungen der bAV aus der Sicht des Arbeitgebers. Er unterliegt grundsätzlich der freien Wahl des Arbeitgebers, d.h. dieser entscheidet bei der Einführung von Altersversorgung, in welchem Umfang er dafür Mittel zur Verfügung stellen möchte. Der Dotierungsrahmen bildet somit die Grenze für die Gestaltungsräume im Rahmen der Mitbestimmung der Arbeitnehmer und außerdem die Geschäftsgrundlage insbesondere bei späteren Änderungen der Versorgungszusage. Der Dotierungsrahmen kann z.B. als Jahresaufwand (ohne Zinsanteil) definiert werden, d.h. in Höhe der Bruttoprämie bzw. der gezahlten Beiträge. Es empfiehlt sich, den Dotierungsrahmen in Zusammenhang mit der Einrichtung der bAV schriftlich zu dokumentieren.