DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Mai 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 29 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* [Sensitivitäten]

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei Vor- und drei Nachteile bei der Verwendung von Sensitivitäten im Rahmen der approximativen Berechnung von Marktwertänderungen von Finanztiteln.

(ii) *[4 Punkte]* Geben Sie ein Beispiel zur approximativen Bewertung eines Finanztitels an, bei dem die Verwendung einer Sensitivität versagt:

- Nennen Sie den von Ihnen gewählten Finanztitel sowie den Parameter bezüglich dessen Sie die Sensitivität verwenden.
- Beschreiben Sie, wie Sie die gewählte Sensitivität berechnen.
- Erklären Sie, in welchem Fall die Sensitivität versagt.

(b) *[10 Punkte]* Gegeben seien die folgenden fiktiven Marktdaten für eine Zinskurve mit Restlaufzeiten von bis zu 20 Jahren:

Zeit	1	2	3	4	5
Kuponkurve in %	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%
Zerokurve in %	0,10%	0,20%	0,30%	0,40%	0,50%
Diskontfaktoren	0,999001	0,996010	0,991042	0,984119	0,975273
Kumulierte Diskontfaktoren	0,999001	1,995011	2,986053	3,970172	4,945445

Zeit	6	7	8	9	10
Kuponkurve in %	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%	?
Zerokurve in %	0,60%	0,71%	0,81%	0,91%	?
Diskontfaktoren	0,964540	0,951966	0,937604	0,921510	0,903752
Kumulierte Diskontfaktoren	5,909985	6,861951	7,799555	8,721065	9,624817

Zeit	11	12	13	14	15
Kuponkurve in %	1,08%	1,16%	1,24%	1,32%	1,40%
Zerokurve in %	1,10%	1,19%	1,27%	1,36%	1,45%
Diskontfaktoren	0,886478	0,868000	0,848377	0,827669	0,805942
Kumulierte Diskontfaktoren	10,511295	11,379295	12,227672	13,055342	13,861284

Zeit	16	17	18	19	20
Kuponkurve in %	1,48%	1,56%	1,64%	1,72%	1,80%
Zerokurve in %	1,54%	1,63%	1,72%	1,82%	1,91%
Diskontfaktoren	0,783261	0,759694	0,735311	0,710185	0,684386
Kumulierte Diskontfaktoren	14,644544	15,404238	16,139550	16,849734	17,534120

(i) *[3 Punkte]* Berechnen Sie mit den angegebenen Diskontfaktoren und kumulierten Diskontfaktoren die Marktwerte für drei Bonds mit 20 Jahren Restlaufzeit und jährlichen Kupons in Höhe von

- $1,80\%$
- $1,00\%$
- $2,60\%$

Geben Sie die Ergebnisse in Prozent des Nominals mit 6 Nachkommastellen an.

(ii) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die fehlenden Werte für den Kuponsatz und den Zerosatz für die Laufzeit 10 Jahre. Geben Sie die Ergebnisse in Prozent mit 6 Nachkommastellen an.

(iii) *[2 Punkte]* Sie haben vor, einen Betrag von EUR 10 Mio. in einen Bond zu investieren. Die Laufzeit von 15 Jahren ist vorgegeben, des weiteren soll das Investment „zu par" erfolgen, d. h. das Nominal soll EUR 10 Mio. betragen. Mit dem Ziel der Ertragsvermehrung überlegen Sie, in ein geeignetes strukturiertes Zinsprodukt zu investieren. Zum Erwerb der Zinsoptionen, sind Sie bereit, auf 0,5% des jährlichen Kupons zu verzichten.

- Welchen festen Kupon können Sie erzielen?

  Geben Sie das Ergebnis in Prozent an.

- Welcher Betrag steht Ihnen zum Erwerb von Zinsoptionen zur Verfügung? (Hinweis: Barwert der Differenz zwischen Par-Kupon und reduziertem Kupon) Geben Sie das Ergebnis in EUR mit zwei Nachkommastellen an.

(iv) *[3 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die Zinskurve im langen Bereich invertiert ist, bei gleichzeitig hohen Volatilitäten für Zinsoptionen. Diskutieren Sie Pros und Cons für den Erwerb eines Steepeners.

(c) *[8 Punkte]* [Robustheit, Stabilität und Finanzrisiken]

(i) *[6 Punkte]* Nennen Sie drei Algorithmen oder Modelle aus der Finanzlandschaft, die robust sind, und drei Algorithmen oder Modelle, die nicht stabil sind. Benennen Sie dabei bezüglich welcher Veränderung die Algorithmen/Modelle robust bzw. instabil sind.

(ii) *[2 Punkte]* Nennen Sie sechs typische Finanzrisiken eines Versicherers.

Lösungsskizze:

(a) (i) Vorteile: Erhöhte Rechengeschwindigkeit, einfach zu verstehen, einfach zu berechnen, Vergleichbarkeit unterschiedlicher Finanztitel bezüglich des Parameters der Sensitivität [weitere Nennungen möglich]

Nachteile: Approximation in der Regel nur durch Linearisierung, keine Berücksichtigung von Wechselwirkungen mit anderen Parametern, Sensitivität kann sich ändern, wenn sich der Startparameter ändert [weitere Nennungen möglich]

(ii) Beispiel:

- *Finanztitel:* CMS-Floater, Referenzrate 10 Jahres Swap Rate mit Multiplikator 2, Floor 1%, 10 Jahre Laufzeit

- *Sensitivität:* Effektive Duration (Zins)
- *Berechnung der Sensitivität:* Approximation der effektiven Duration als (momentaner Marktwert - Marktwert bei 1 Basispunkt Verringerung des Zinses) / 0,01%
- *Versagen der Sensitivität:* Wenn der momentane Marktwert ein lokales Minimum bezüglich einer parallelen Verschiebung der Zinskurve darstellt, ist die effektive Duration Null. Bei einer stärkeren parallelen Änderung der Zinskurve profitiert der Marktwert. Bei Zinsrückgang: Anstieg des Marktwertes durch Floor des Kupons, bei Zinsanstieg: Anstieg des Marktwertes durch Multiplikator des Kupons.

Weitere Beispiele sind möglich: Z. B. Effektive Duration für Steepener zur Approximation von Änderungen von Zinskurvensteigungen; CMS-Floater mit Cap & Multiplikator & Marktwert ist lokales Maximum bezüglich paralleler Zinsverschiebung: Effektive Duration= 0, aber Marktwertrückgang bei steigenden Zinsen wäre korrekt

(b) (i) Kupon 1,8%:

$$\begin{aligned} 0,684386 \cdot 100\% + 17,534120 \cdot 1,8\% &= 68,438600\% + 31,561416\% \\ &= 100,000016\% \end{aligned}$$

Kupon 1,0%:

$$\begin{aligned} 0,684386 \cdot 100\% + 17,534120 \cdot 1,0\% &= 68,438600\% + 17,534120\% \\ &= 85,972720\% \end{aligned}$$

Kupon 2,6%:

$$\begin{aligned} 0,684386 \cdot 100\% + 17,534120 \cdot 2,6\% &= 68,438600\% + 45,588712\% \\ &= 114,027312\% \end{aligned}$$

(ii) Zerosatz:

$$(1/0,903752)^{1/10} - 1 = 1,017141\%$$

Kuponsatz:

$$1 = c \cdot 9,624817 + 1 \cdot 0,903752 = c \cdot 9,624817 + 0,903752$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{1-0,903752}{9,624817} = 0,999998\%$$

(iii) Der Par-Kupon für eine Laufzeit von 15 Jahren beträgt $1,4\%$. Somit wird ein Kupon von $0,9\% (= 1,4\% - 0,5\%)$ erzielt.

Für den Erwerb von Optionen steht eine Summe von

$$\begin{aligned} 10.000.000\,\mathrm{EUR} \cdot 0,5\% \cdot 13,861284 &= 50.000\,\mathrm{EUR} \cdot 13,861284 \\ &= 693.064,20\,\mathrm{EUR} \end{aligned}$$

zur Verfügung.

(iv) Mögliche Antworten:

- Hohe Volatilität macht den Kauf von Option grundsätzlich teuer. (−)
- Die Inversion der Zinskurve führt dazu, dass die Zinsdifferenzen am langen Ende auf Forward-Basis niedrig oder invertiert sind. Geht man davon aus, dass die aktuelle Zinskurve häufig ansteigend ist, so ist die Form der Zinskurve grds. positiv für den Erwerb eines Steepeners. (+)
- Abzuwägen sind die Kosten der Volatilität mit dem erwarteten Unterschied zwischen der heute in der risikoneutralen Welt implizierten zukünftigen Form der Zinskurve und der Erwartung an die zukünftige Form der Zinskurve in der realen Welt.

(c) (i) Robuste Beispiele:

- Smith-Wilson-Extrapolation funktioniert auch weiterhin bei negativen Zinsen
- Hauptkomponentenanalyse anwendbar auch bei nicht normalverteilten Daten
- Schätzung des Medians (Hinzunahme eines Ausreißers verändert den Median bei hinreichend vielen Daten nicht)
- Mittelwertregression, auch wenn die Residuen nicht normalverteilt sind
- Robuste Mittelwertregression, robust gegen Ausreißer
- Durationskonzept bei kleiner Zinsänderung eines Kuponbonds mit fester Zahlung, robust beispielsweise bei Änderung des Kupons oder Nominals

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Beispiele; alternative Nennungen sind dabei möglich.]

Nichtstabile Beispiele:

- Bewertung mithilfe eines Economic Scenario Generators (real-world/ risikoneutral): wenn Anzahl der Szenarien zu klein (noch keine Konvergenz erreicht)
- Regression/Curve Fitting:
  - wenn Anzahl der Fitting-Szenarien zu klein ist
  - Generell problematisch, wenn nicht-stetige Funktionen (beispielsweise diskrete nicht-stetige Verteilungen mit extremen Wertunterschieden) durch eine stetige Funktion approximiert werden sollen
- Black-Scholes-Formel für Swaptions: negative Zinsen (keine Lösung für negative Zinsen als Input)
- Real-world Zinsmodell: kalibriert auf relative Änderungen von positiven Zinsen, angewendet auf negative Zinsen
- Bewertung: Simulation von Spreadänderungen und Bewertung von Bonds mit negativem Spread$< -(1 + \text{Zins})$

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Beispiele; alternative Nennungen sind dabei möglich.]

(ii) Beispiele: Zinsänderungsrisiko, Aktienrisiko, Immobilienrisiko, Spreadrisiko, Ausfallrisiko, Zinsvolatilitätsrisiko, Aktienvolatilitätsrisiko, Währungsrisiko

[Bemerkung: Zu nennen sind nur sechs Beispiele; weitere Nennungen sind möglich.]

Aufgabe 2. *[Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, nach welchen Dimensionen sich derivative Instrumente strukturieren lassen?

(b) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie qualitativ die gegenwärtige Anlagestruktur deutscher Versicherer. Nennen Sie einen Grund, warum trotz der anhaltenden Niedrigzinsphase eine geringe Aktienquote vorherrschend ist.

(c) *[4 Punkte]* Stellen Sie die Funktionsweise eines „Plain-Vanilla“-Zinsswaps dar. Gehen Sie dabei insbesondere auf die an dem Geschäft beteiligten Vertragspartner ein.

(d) *[10 Punkte]* Betrachten Sie auf einem arbitragefreien Kapitalmarkt folgenden Plain-Vanilla-Payer-Swap mit einer Laufzeit von einem Jahr, wobei die Zahlungen halbjährig getauscht werden: Nominalvolumen 100 Mio. €, variabler Zins: 6-Monats-EURIBOR, fixer Zins: x% p. a. Der aktuelle 6-Monats-EURIBOR liegt bei 2% p. a. und der 12-Monats-EURIBOR bei 2,4% p. a..

  (i) *[8 Punkte]* Wie hoch ist der arbitragefreie Swapsatz in % p. a.? Geben Sie dazu aus Sicht des Payers die Zahlungsreihe des Swaps auf Basis der Terminzinssätze an!

  Hinweis: Verwenden Sie die einfache Verzinsung.

  (ii) *[2 Punkte]* Der Receiver des Swaps bittet den Payer des Swaps aufgrund eines Liquiditätsengpasses im Zeitpunkt 0 um eine zusätzliche Einmalzahlung in Höhe von 1 Mio. €. Die zusätzliche Zahlung soll über den Verlauf des Swaps mit der Festzinszahlung verrechnet werden. Wie lautet der neue arbitragefreie Swapsatz in % p. a.?

(e) *[5 Punkte]* Eine Abwandlung des Swaps aus Aufgabenteil d) (ohne die zusätzliche Einmalzahlung!) unterscheide sich von diesem nur durch ein Kündigungsrecht, welches dem Receiver ermöglicht, den Swap nach 6 Monaten vorzeitig zu beenden.

  (i) *[3 Punkte]* Geben Sie ein Finanzinstrument und dessen Ausstattungsmerkmale an, durch welches dieses Kündigungsrecht abgebildet werden kann.

  (ii) *[2 Punkte]* Vergleichen Sie die Swapsätze des Swaps mit Kündigungsrecht und des Swaps aus Aufgabenteil d) miteinander.

Lösungsskizze:

(a) Die Dimensionierung kann nach den vertraglichen Vereinbarungen über die Erfüllung des Geschäfts in bedingte und unbedingte Termingeschäfte, nach den allgemeinen Rahmenbedingungen des Handelsplatzes in börsengehandelte und außerbörslich gehandelte Derivate sowie anhand der Eigenschaften des Basisobjekts in Finanz-, Waren- und sonstige Derivate unterscheiden.

(b) Der Großteil der Kapitalanlagen ist in Renten (Hypotheken, Darlehen, Pfandbriefe, Staatsanleihen, etc.) angelegt (ca. 85% im Jahr 2017). Die Anteile, die in Aktien, Beteiligungen und Immobilien angelegt sind, bewegen sich jeweils in der Größenordnung von ca. 4-5% (in 2017: Aktien (5,1%), Beteiligungen (3,8%), Immobilien (3,9%)). Der Rest kann als „sonstige Anlagen" subsummiert werden; hierunter sind z. B. auch Alternative Investments erfasst.

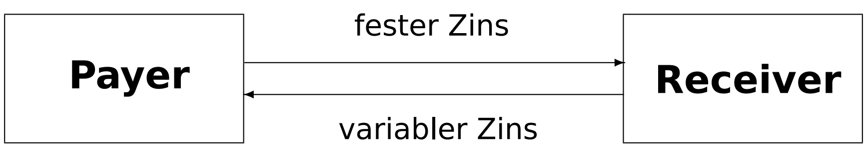
Gründe für die niedrige Aktienquote sind u. a.:

- (Komparativ) hohe Kapitalanforderungen unter Solvency II für Aktieninvestments (Basisschocks gemäß Standardformel: 39% (Typ 1-Aktien) und 49% (Typ 2-Aktien))
- Prägende negative Erfahrungen durch Kurseinbrüche am Aktienmarkt

[Bemerkung: Zu nennen ist nur ein Grund.]

(c) Ein Vertragspartner verpflichtet sich, einen festen Zins (Swapsatz) bezogen auf einen Nominalbetrag zu bestimmten Terminen an den anderen Vertragspartner zu zahlen. Im Gegenzug zahlt der andere Vertragspartner an den gleichen Terminen einen variablen Zins, der sich auf denselben Nominalbetrag bezieht.

- Der Vertragspartner, der sich zur Festzinszahlung verpflichtet, wird „Payer", „Zahler" oder „Swapkäufer" genannt.
- Der Vertragspartner, der den variablen Zins leistet bzw. den festen Zins erhält, heißt „Receiver", „Empfänger" oder „Swapverkäufer".



Die Höhe des variablen Zinses, der im Zeitpunkt t gezahlt werden muss, ist bei Vertragsabschluss nicht bekannt und wird einen Zahlungszeitpunkt vorher festgestellt.

(d) (i) Für den Zahlungsstrom des Plain-Vanilla-Swaps aus Sicht des Festzinszahlers auf Basis von Terminzinssätzen gilt (in Mio. €):

	$t=0$	$t=6$ Monate	$t=12$ Monate
fester Zins	–	$-\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{100}\right)\cdot 100$	$-\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{100}\right)\cdot 100$
variabler Zins	–	$\left(\frac{1}{2}\cdot 0,02\right)\cdot 100$	$\left(\frac{1}{2}\cdot r_6^e(12)\right)\cdot 100$

Hierbei berechnet sich der Zins $r_6^e(12)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} 1,024 &= (1+\tfrac{1}{2}\cdot 0,02)\cdot(1+\tfrac{1}{2}\cdot r_6^e(12)) \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1,024}{1,01}-1 &= \tfrac{1}{2}\cdot r_6^e(12) \\ \Rightarrow \quad r_6^e(12) &= 2,77\%\ \text{p. a.} \end{aligned}$$

Bei Arbitragefreiheit gilt (in Mio. €):

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \left(0,01-\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{100}\right)\cdot 100\cdot\frac{1}{1,01}+\left(\frac{1}{2}\cdot 0,0277-\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{100}\right)\cdot 100\cdot\frac{1}{1,024} \\ \Leftrightarrow &\quad x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,01}+\frac{1}{1,024}\right)=\frac{1}{1,01}+\frac{0,5\cdot 2,7723}{1,024} \\ \Leftrightarrow &\quad x = 2,3834\%\text{p. a.} \end{aligned}$$

Der arbitragefreie Swapsatz beträgt 2,3834% p. a..

(ii) Aufgrund der zusätzlichen Zahlung des Payers an den Receiver muss der Swapsatz sinken. Für den neuen arbitragefreien Swapsatz gilt (in Mio. €):

$$\begin{aligned} x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,01}+\frac{1}{1,024}\right) &= -1+\frac{1}{1,01}+\frac{0,5\cdot 2,7723}{1,024} \\ \Leftrightarrow &\quad x = 1,3664\%\text{p. a.} \end{aligned}$$

Der arbitragefreie Swapsatz beträgt 1,3664% p. a..

(e) (i) Ein zusätzliches Instrument zur Abbildung des Kündigungsrechts (aus Sicht des Payers) ist eine Short European Payer-Swaption (Variabler Eurozahler ist Käufer der Option und Festzinszahler der Verkäufer) mit folgenden Ausstattungsmerkmalen:

- Optionslaufzeit: 0,5 Jahre
- Abwicklung: effektiver Swap (bzw. Glattstellung)
- Preis: Verrechnung über Festzins im zugrunde liegenden Swap
- (Verkäufer)
- Swap:
  - Laufzeit: 0,5 Jahre
  - Nominalvolumen: 100 Mio. €
  - Festzins: y% p.a.
  - variabler Zins: 6-Monats-EURIBOR in €

- halbjährliche Zinszahlung

(ii) Die feste Zinszahlung ist im Rahmen des neuen Swaps mit Kündigungsrecht geringer als die Fixed-Rate des Swaps aus Aufgabenteil d), weil die Kündigungsmöglichkeit dem Receiver (Zahler des variablen Zinses) im Vergleich zum Plain-Vanilla-Swap ein zusätzliches Recht gewährt. Dafür muss der Festzinszahler kompensiert werden. Da dies hier nur über den Festzins geregelt ist, muss dieser sinken.

Aufgabe 3. *[Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Stylized Facts in Bezug auf die Volatilität, die typische Finanzmarktzeitreihen aufweisen.

(ii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie die mathematische Struktur des ARCH-Modells. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Abbildung der Volatilität der Zeitreihe ein.

(b) *[6 Punkte]* Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen eines Immobilienindex ergibt die mittlere erwartete Rendite $\mu(R) = 5\,\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 2\,\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $0,6$.

(i) *[3 Punkte]* Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem Blundell-Ward-Verfahren durch.

(ii) *[3 Punkte]* Unterstellen Sie normalverteilte i. i. d. Renditen mit adjustierter Volatilität nach dem Blundell-Ward-Verfahren. Berechnen Sie die Mindestrendite des Investments in den Immobilienfonds, die nach zehn Jahren mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% nicht unterschritten wird.

Hinweis: Bezeichnet Φ^{-1} die Quantilfunktion der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung, so gilt $\Phi^{-1}(0,1) \approx -1,2816$.

(c) *[10 Punkte]*

(i) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, warum es - im Gegensatz zum klassischen Black-Scholes-Modell - für praktische Anwendungen erforderlich sein kann, stochastische Volatilitätsmodelle im Aktienbereich zu betrachten. Gehen Sie dabei auf den Begriff der impliziten Volatilität ein.

(ii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie mithilfe Stochastischer Differentialgleichungen die Dynamik des Aktienkurses im Heston-Modell. Gehen Sie dabei *kurz* auf die Interpretation der Parameter im Heston-Modell ein.

(d) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, wie das Heston-Modell erweitert werden kann, um verschiedene Volatilitätsregime zu modellieren.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Volatilität ändert sich über die Zeit. Extreme Returns treten in Clustern auf. Insbesondere sind Phasen niedriger und hoher Volatilität möglich.

(ii) Es sei $(Z_t)_{t\in T}$ ein striktes Weißes Rauschen SWN(0, 1). Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2$$

mit Konstanten $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$.

Für die Volatilität gilt:

- Volatilität/bedingte Varianz $\sqrt{\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1})} = \sigma_t$ variieren im Zeitverlauf.
- Volatilitätscluster: $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|$ groß $\Rightarrow \sigma_t$ groß

(b) (i) Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen R_t, $t = 1, 2, \dots$, gemäß $\text{Var}(R_t^*) = \text{Var}(R_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 0,02 \cdot \frac{\sqrt{1-0,6^2}}{1-0,6} = 0,04 \quad (4\,\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 5\,\%$.

(ii) Für die bereinigte Gesamtrendite nach zehn Jahren gilt

$$R^*(10) = \sum_{i=1}^{10} R_i^* \sim \mathcal{N}(10\mu(R^*); 10\sigma^2(R^*)) = \mathcal{N}(0,5; 0,016).$$

Die gesuchte Mindestrendite $r^{\min}$ ist bestimmt durch

$$0,1 = P[R^*(10) \leq r^{\min}] = \Phi\left(\frac{r^{\min}-0,5}{\sqrt{0,016}}\right),$$

d. h. $r^{\min} = \sqrt{0,016}\Phi^{-1}(0,1) + 0,5 = 0,3379$ (33,79%).

(c) (i) Aus der Analyse von Zeitreihen von Aktienreturns ist erstens erkennbar, dass sich die Volatilität im Zeitverlauf ändert. Insbesondere sind Phasen mit niedriger und hoher Volatilität zu beobachten. Dies steht im Widerspruch zu einer konstanten Volatilität.

Zweitens werden Europäische Call- und Put-Optionen für viele Aktien liquide gehandelt; Preise sind beobachtbar. Unter der impliziten Volatilität einer Option versteht man (gegeben die Parameter „Ausübungspreis“, „Maturität“, „gegenwärtiger Aktienpreis“,„Zins“) die Volatilität, unter der das Black-Scholes-Modell denselben Preis liefert wie der Markt. Man beobachtet dabei eine Abhängigkeit der impliziten Volatilität von der Maturität und vom Ausübungspreis, während im Black-Scholes-Modell die Volatilität eine Konstante ist. Dies zeigt wiederum, dass das Black-Scholes-Modell die Realität der Finanzmärkte nicht korrekt beschreibt.

Alternative Ansätze sind lokale Volatilitätsmodelle, die jedoch teilweise nicht hinreichend flexibel für die Modellierung sind, und stochastische Volatilitätsmodelle.

(ii) Für zwei korrelierte Wiener-Prozesse B, W mit Kovariation $\langle W, B\rangle_t = \rho t$ sind der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dB_t \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t} \end{aligned}$$

Der Prozess v heißt „variance“ und ist definiert durch die SDE

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t}\, dW_t$$

Hierbei handelt es sich um den Cox-Ingersoll-Ross-Prozess. Die Parameter haben folgende Bedeutung:

- $\kappa \geq 0$ „speed of mean reversion“
- $\theta > 0$ long vol (Erwartungswert von v_t strebt gegen θ für $t \uparrow \infty$.)
- ξ „Vol of Vol“ (Volatilität der Volatilität)
- Die implizite Variable „short vol“ σ_0 ist nicht beobachtbar und wird daher wie ein Parameter behandelt.

(d) Eine Erweiterung des Heston-Modells im Kontext von Regime-Switching-Modellen ist gegeben durch folgende Modellierung des diskontierten Aktienpreisprozesses unter einem Martingalmaß Q:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \sqrt{Y_t}\, dB_t \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t)\, dt + X_t \xi \sqrt{Y_t}\, dW_t \end{aligned}$$

Hierbei sind B, W korrelierte Wiener-Prozesse unter Q mit $\langle B, W\rangle_t = \rho t$, $\rho \in (-1, 1)$, und $(X_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet einen (zeitlich homogenen) Markov-Prozess mit z. B. zwei Zuständen $\{z_1, z_2\}$, $0 < z_1 < 1 < z_2$. In diesem Fall hängt die „Vol of Vol“ vom Zustand des exogenen Faktors ab. Die zwei Zustände spiegeln eine Verringerung oder Verstärkung der Volatilität wider.

Aufgabe 4. *[Verallgemeinerte Zinskurven- und Durationsmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[15 Punkte]* [Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA)]

(i) *[5 Punkte]* Es sei eine aus einer Beobachtung stammende zentrierte Datenmatrix (d. h. der empirische Erwartungswert jeder Spalte ist Null) $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ gegeben, mit n Beobachtungszeitpunkten und p Parametern. Formulieren Sie das generell zu lösende Optimierungsproblem der Hauptkomponentenanalyse (PCA), um die Richtungen $\mathrm{EV}_1, \ldots, \mathrm{EV}_p \in \mathbb{R}^p$ der Principal Components (PCs) zu finden.

(ii) *[4 Punkte]* Es seien die ersten zwei Richtungen aus (i) berechnet. Formulieren Sie das zu lösende Optimierungsproblem, um die ersten zwei Faktorladungen zu einem beliebigen $z \in \mathbb{R}^p$ zu bestimmen.

(iii) *[1 Punkt]* Geben Sie (ohne Begründung) die analytische Lösung von (ii) an.

(iv) *[4 Punkte]* Es seien die empirische Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(X)$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathrm{EV}_1, \ldots, \mathrm{EV}_k$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Faktorladungen der empirischen Daten unkorreliert sind.

(v) *[1 Punkt]* Sind die Faktorladungen der empirischen Daten auch unabhängig und warum/warum nicht?

(b) *[10 Punkte]* [Zinsmodelle]

(i) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie die Kernidee des Modells von Nelson-Siegel in Stichpunkten. Gehen Sie dabei darauf ein, welche Rolle die Parameter des Modells spielen.

(ii) *[1 Punkt]* Es sei eine diskretisierte Zinskurve gegeben. Angenommen, Sie möchten die Nelson-Siegel-Parameter bestimmen und verwenden dazu einen numerischen Algorithmus der nicht-linearen Optimierung. Welche generelle Problematik ergibt sich bezüglich der Startwerte?

(iii) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede bei der Erklärung historischer Zinskurven zwischen der Verwendung der Hauptkomponentenanalyse (PCA) und dem Nelson-Siegel-Modell.

(iv) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Anwendungsgebiete der Hauptkomponentenanalyse (PCA) und zwei typische andere Anwendungsgebiete des Nelson-Siegel-Modells.

(v) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie die Kernidee des Modells von Diebold/Li in Stichpunkten. Nennen Sie dabei das Grundmodell und den Zweck des Modells.

Lösungsskizze:

(a) (i) Es sei X_i der i-te Zeilenvektor von X. Dann müssen zur Bestimmung der Richtungen $v_k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \ldots, p$, iterativ die folgenden Maximierungsprobleme gelöst werden.

- Um die 1. Richtung v_1 (Basisfunktion) zu erhalten:

$$\max_{v_1 : \|v_1\|=1} \sum_{i=1}^{n} ((X_i)^T v_1)^2$$

- Um die 2. Richtung v_2 (Basisfunktion) zu erhalten:

$$\max_{v_2 : \|v_2\|=1, v_2 \perp v_1} \sum_{i=1}^{n} ((X_i)^T v_2)^2$$

- Um die p-te Richtung v_p (Basisfunktion) zu erhalten:

$$\max_{v_p : \|v_p\|=1, v_p \perp v_1, \ldots, v_{p-1}} \sum_{i=1}^{n} ((X_i)^T v_p)^2$$

(ii) Bei gegebenen Eigenvektoren $\mathrm{EV}_1(t)$, $\mathrm{EV}_2(t)$ können die Faktoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ so gewählt werden, dass für bestimmte vorgegebene Laufzeiten t und eine bekannte Zinsstrukturkurve z das folgende Minimierungsproblem gelöst wird:

$$\arg\min_{a_1, a_2} \sqrt{\sum_t (a_1 \,\mathrm{EV}_1(t) + a_2 \,\mathrm{EV}_2(t) - z(t))^2} =: [\bar{a}_1, \bar{a}_2].$$

Hierbei bezeichnen $\mathrm{EV}_i(t)$ den i-ten Eigenvektor zur Laufzeit t und $\bar{a}_i = \mathrm{PC}_i(z)$ die i-te Faktorladung (Koeffizient) zum i-ten Eigenvektor, um z zu approximieren. Es handelt sich um eine „Kleinste-Quadrate-Minimierung“ zwischen der Approximation und der zu approximierenden Zinskurve.

(iii) Für $z \in \mathbb{R}^p$ ist die Lösung gegeben durch

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2]^T = [\mathrm{EV}_1, \mathrm{EV}_2]^T z.$$

(iv) Es seien EV_i der i-te Eigenvektor der Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(X)$ und λ_i der zugehörige Eigenwert. Setze $\mathrm{PC}_i = X\,\mathrm{EV}_i$, d. h. PC_i stellt den Vektor der historischen Faktorladungen zum Eigenvektor EV_i dar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{PC}_i, \mathrm{PC}_j) &:= \tfrac{1}{n-1} \mathrm{PC}_i \,\mathrm{PC}_j = \mathrm{EV}_i^T \left(\tfrac{1}{n-1} X^T X\right) \mathrm{EV}_j \\
&= \mathrm{EV}_i^T \,\mathrm{Cov}(X)\, \mathrm{EV}_j = \lambda_j \,\mathrm{EV}_i^T \,\mathrm{EV}_j \\
&= \begin{cases} \lambda_j, & i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

(v) Für beliebige Zufallsvariablen folgt aus der Unkorreliertheit nicht die Unabhängigkeit. Hinweis: Falls die Daten mehrdimensional normalverteilt sind, sind die Faktorladungen unabhängig, da für die mehrdimensionale Normalverteilung aus Unkorreliertheit auch die Unabhängigkeit folgt.

(b) (i) Idee: Beschreibung von (historischen) Zinskurven mit wenigen Parametern (Dimensionsreduktion), Inter- und Extrapolation wird ermöglicht

Die Parameter lassen sich interpretieren als kurzfristiger Zins, langfristiger Zins, Anteil der Steigung der Zinskurve, Anteil der Krümmung der Zinskurve, Laufzeit des Hochpunkts der Krümmung der Zinskurve.

(ii) Werden unterschiedliche Startwerte verwendet, kann der Algorithmus zu unterschiedlichen Lösungen kommen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn auch über den Parameter λ optimiert wird und dieser Parameter in den Startwerten abweicht.

(iii) Gemeinsamkeiten:

- Erklärung der Zinskurve mit wenigen Basisfunktionen möglich
- „Kleinste-Quadrate"-Minimierung zur Bestimmung der Faktorladungen bzw. Parameter
- Erste drei Basisfunktionen entsprechen in der Regel „Level", „Steigung" und Krümmung der Zinskurve

Unterschiede:

- Faktorladungen bei PCA einfach über Matrixmultiplikation zu bestimmen → Analytische Lösung möglich & einfach zu berechnen
- Faktorladungen bei Nelson-Siegel erfordern Lösung eines nicht-linearen Minimierungsproblems → Numerische Lösung erforderlich
- Faktorladungen PCA nach Konstruktion unkorreliert, bei Nelson-Siegel korreliert
- Faktorladungen PCA können unabhängig von einander bestimmt werden + Lösung eindeutig
- Faktorladungen Nelson-Siegel sind abhängig + Lösung nicht eindeutig
- Bei der PCA können die ersten drei Eigenvektoren (=Basisfunktionen) je nach Datensatz unterschiedlich ausgestaltet sein (muss nicht „Level", „Steigung" und Krümmung entsprechen)
- Bei Nelson-Siegel ist die Struktur der Basisfunktionen vorgegeben (lediglich der Parameter λ hat Einfluss auf die Gestalt)

- PCA kann auch zur Dimensionsreduktion von Daten, die nicht aus dem Zinsbereich stammen verwendet werden, Nelson-Siegel eher beschränkt auf Zinskurven

- Erklärungsmodell der PCA für Zinskurven kann beliebig ausgestaltet werden: PCA direkt auf Zinskurven, auf absoluten Änderungen, auf relativen Änderungen, auf relativen geshifteten Änderungen, auf logarithmischen Änderungen, ...

[Bemerkung: Zu nennen sind nur drei Unterschiede.]

(iv) Anwendungsgebiete PCA:

- Erklärung von Zinskurven oder Zinskurvenänderungen mit wenigen Parametern

- Modellierung von Zinskurven in real-world Szenariogeneratoren

- (Schätzung zukünftiger Zinskurven im Kontext von Diebold/Li mit PCA anstatt Nelson-Siegel als Grundmodell)

Anwendungsgebiete Nelson-Siegel:

- Erklärung von Zinskurven mit wenigen Parametern

- Möglichkeit der Nutzung zur Interpolation/Extrapolation von Zinskurven

- Modellierung von Zinskurven in in real-world Szenariogeneratoren

- Schätzung zukünftiger Zinskurven im Kontext von Diebold/Li

(v) Grundmodell: Nelson-Siegel

- Beschreibung historischer Zinskurven

- Verwendung eines autoregressiven Modells AR(1) zur Beschreibung der historischen Zinskurvenentwicklung mithilfe der Parameter von Nelson-Siegel

- Nutzung des Modells, um eine Prognose der zukünftigen Zinskurve nach der Zeit T zu ermöglichen

Aufgabe 5. *[Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [35 Punkte]*

Der Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ sei ein Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzeugt. Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell mit Zeithorizont $T > 0$:

- Die Wertentwicklung des Sparbuchs ist bei stetiger Verzinsung mit Rate r gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \in [0, T]$.
- Der Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ der Aktie besitzt unter dem Maß P die Dynamik

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s > 0.$$

(a) *[8 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe der Itô-Formel formal die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\widetilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, $t \in [0, T]$, unter P.

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie das eindeutige äquivalente Martingalmaß Q mithilfe einer geeigneten Girsanov-Transformation. Erläutern Sie dabei *kurz* Ihr Vorgehen. Welche Dynamik besitzt der Aktienpreis unter Q?

(iii) *[2 Punkte]* Erläutern Sie *kurz*, welche Implikationen die Existenz des eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes Q auf die Arbitragefreiheit und die arbitragefreie Bewertung von Contingent Claims hat.

(b) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass der arbitragefreie Preis einer Europäischen Call-Option $C_T^{\text{call}} = (S_T - K)^+$ mit Maturität T und Strike $K > 0$ zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch $C_0^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_0, 0)$ für die Funktion

$$v^{\text{call}}(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t)).$$

Hierbei gilt

$$d_\pm(x,t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und Φ bezeichnet die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Hinweis: Es gilt $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) *[12 Punkte]*

(i) *[6 Punkte]* Beschreiben Sie formal, wie im Black-Scholes-Modell eine dynamische Replikationsstrategie für einen Contingent Claim der Form $f(S_T)$ für eine Funktion f hergeleitet werden kann. Geben Sie die Kosten der Replikation an.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie startend zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Replikationsstrategie für die Europäische Call-Option $C_T^{\text{call}} = (S_T - K)^+$ mit Maturität T und Strike $K > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis

$$x \tfrac{\partial}{\partial x}\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K \tfrac{\partial}{\partial x}\Phi(d_-(x,t)) = 0.$$

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie *kurz*, wie mit den Ergebnissen aus zeitstetigen Finanzmarktmodellen Hedging in der Praxis implementiert werden kann.

(d) *[5 Punkte]* Im Merton-Sprungdiffusionsmodell ist in Erweiterung des Black-Scholes-Modells der Preisprozess der Aktie $(S_t)_{t\geq 0}$ unter einem äquivalenten Martingalmaß $\widetilde{Q}$ modelliert durch

$$S_t^M = S_0^M \exp(\sigma W_t^{\widetilde{Q}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i) \quad (t \geq 0)$$

mit:

- Unter Q ist $(W_t^{\widetilde{Q}})_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und $(N_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Beide Prozesse sind stochastisch unabhängig.
- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind i. i. d. normalverteilte Zufallsvariablen.
- Die Parameter genügen der Bedingung $\mu - r + \lambda(\mathrm{E}_{\widetilde{Q}}[\exp(X_1)] - 1) = 0$, die äquivalent zu $\mathrm{E}_{\widetilde{Q}}[e^{-rt}S_t^M] = S_0^M$ ist.

(i) *[3 Punkte]* Erläutern Sie *kurz* die Motivation für diese Modellerweiterung. Wie sind die Komponenten des Preisprozesses zu interpretieren? Gehen Sie dabei insbesondere auf das Verhalten zwischen den Sprüngen ein.

(ii) *[2 Punkte]* Erläutern Sie *kurz* (ohne Berechnungen) die Grundidee, mit der im Merton-Sprungdiffusionsmodell die Ergebnisse des Black-Scholes-Modells zur Bewertung der Europäischen Call-Option $C_T^{\text{call}} = (S_T^M - K)^+$ mit Maturität T und Strike $K > 0$ genutzt werden können.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Funktion $f(x,t) = e^{-rt}x$ erlaubt die Darstellung der diskontierten Aktienpreise $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \in [0,T]$, in der Form $\widetilde{S}_t = f(S_t, t)$. Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des Prozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$

$$d\widetilde{S}_t = df(S_t,t) = \tfrac{\partial}{\partial x}f(S_t,t)\,dS_t + \tfrac{\partial}{\partial t}f(S_t,t)\,dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{(\partial x)^2}f(S_t,t)\,d\langle S\rangle_t.$$

Da die Ableitung $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}f$ verschwindet, erhält man somit

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}S_t\,dt = \widetilde{S}_t\sigma(dW_t + \tfrac{\mu - r}{\sigma}\,dt).$$

(ii) $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist demnach ein Martingal bezüglich eines Maßes Q (Martingalmaß), falls

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \frac{\mu-r}{\sigma}\, du, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

ein Wiener-Prozess unter Q ist. Zur Konstruktion des (eindeutig bestimmten!) äquivalenten Martingalmaßes Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ wird der Satz von Girsanov verwendet: Definiert man Q durch die Dichte

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_0^T \frac{\mu-r}{\sigma}\, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 du} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T},$$

d. h. $\mathrm{E}_Q[X] = \mathrm{E}_P[\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_T} X]$, so ist der Prozess $(W_t^Q)_{\in[0,T]}$ ein Q-Wiener-Prozess bis zur Zeit T. Für die Dynamik von $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ unter Q gilt

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma\, dW_t^Q,$$

d. h. der diskontierte Preisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist in der Tat ein Q-Martingal.

Für die Dynamik des Aktienpreises $(S_t)_{t\in[0,T]}$ unter Q erhält man via (1)

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t^Q),$$

d. h. $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist unter Q eine Geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilität σ.

(iii) Aus der Existenz des äquivalenten Martingalmaßes folgt die Arbitragefreiheit des Black-Scholes-Modells. Der arbitragefreie Preis eines Contingent Claims C_T mit Maturität T in t ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung:

$$B_t\, \mathrm{E}_Q[\tfrac{C_T}{B_T}|\mathcal{F}_t] = e^{rt}\, \mathrm{E}_Q[e^{-rT} C_T|\mathcal{F}_t].$$

(b) Mit risikoneutraler Bewertung gilt zunächst

$$\begin{aligned} C_0^{\mathrm{call}} &= e^{-rT} \cdot \mathrm{E}_Q\left[(S_T - K)^+\right] \\ &= e^{-rT} \cdot \mathrm{E}_Q\left[\left(S_0 e^{\sigma W_T^Q + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right)^+\right] \\ &= e^{-rT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Elementare Rechnungen liefern dann

$$
\begin{aligned}
C_0^{\text{call}} =& e^{-rT} \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} (S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} - K) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
=& S_0 \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}x-\frac{1}{2}\sigma^2 T} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - Ke^{-rT} \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
=& S_0 \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}\, dx - Ke^{-rT} \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
\overbrace{=}^{y=x-\sigma\sqrt{T}}& S_0 \int_{-d_-(S_0,0)-\sigma\sqrt{T}}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy - Ke^{-rT} \int_{-d_-(S_0,0)}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
=& S_0(1-\Phi(-d_+(S_0,0))) - Ke^{-rT}(1-\Phi(-d_-(S_0,0))) \\
=& S_0\Phi(d_+(S_0,0)) - Ke^{-rT}\Phi(d_-(S_0,0)) = v^{\text{call}}(S_0,0).
\end{aligned}
$$

(c) (i) Für den Preis C_t des Contingent Claims $C_T = f(S_T)$ in $t \in [0,T]$ gilt bei risikoneutraler Bewertung

$$C_t = e^{-r(T-t)}\, \mathrm{E}_Q[f(S_T)|\mathcal{F}_t] =: v(S_t,t),$$

da der Diffusionsprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ein Markov-Prozess ist. Das Differential des Preisprozesses ist gegeben durch

$$dC_t = dv(S_t,t) = v_x(S_t,t)\, dS_t + (\dots)\, dt = v_x(S_t,t)\sigma\, dW_t + (\dots)\, dt.$$

Weiterhin gilt für das Differential des Wertprozesses $(V_t^\vartheta)_{t\in[0,T]}$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\vartheta = (\vartheta_t^0, \vartheta_t^1)_{t\in[0,T]}$ (ϑ_t^0 Einheiten im Sparbuch, ϑ_t^1 Einheiten in der Aktie zum Zeitpunkt t)

$$
\begin{aligned}
dV_t^\vartheta &= \vartheta_t^1\, dS_t + \vartheta_t^0\, dB_t = \vartheta_t^1\, dS_t + \vartheta_t^0 r B_t\, dt \\
&= \vartheta_t^1\, dS_t + (\dots)\, dt = \vartheta_t^1 \sigma\, dW_t + (\dots)\, dt.
\end{aligned}
$$

Eine replizierende Handelsstrategie ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϑ mit $V_T^\vartheta = C_T$, deren Wertprozess V_t^ϑ, $t \in [0,T]$, in Abwesenheit von Arbitrage mit dem Optionspreisprozess $C_t = v(S_t,t)$, $t \in [0,T]$, übereinstimmen muss. Durch Vergleich der Differentiale ergibt sich die Replikationsstrategie:

$$dV_t^\vartheta = dv(S_t,t) \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_t^1 = \tfrac{\partial}{\partial x} v(S_t,t)$$

Somit ist die Anzahl der Aktien im replizierenden Portfolio das Delta der Option und die Anzahl im Sparbuch berechnet sich gemäß:

$$\vartheta_t^0 = \tfrac{V_t^\vartheta - \vartheta_t^1 S_t}{B_t}.$$

Die Kosten der Replikation betragen $V_0^\vartheta = C_0$, d. h. der arbitragefreie Preis entspricht den Kosten der perfekten Replikation.

(ii) Für den Wertprozess der replizierenden Handelsstrategie gilt $V_t^\vartheta = C_t^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_t, t)$ mit

$$v^{\text{call}}(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t)).$$

Mit den Ergebnissen aus (i) folgt:

- Einheiten Aktie: $\vartheta_t^1 = \frac{\partial}{\partial x} v^{\text{call}}(S_t, t) = \Phi(d_+(S_t, t))$ (Delta der Option)
- Einheiten Sparbuch: $\vartheta_t^0 = \frac{V_t^\vartheta - \vartheta_t^1 S_t}{B_t} = -e^{-rT}K\Phi(d_-(S_t, t))$

(iii) In der Praxis können Portfolios nicht zeitstetig adjustiert werden; Replikations-/Hedgingstrategien sind semistatisch. Eine Möglichkeit ist das Delta-Hedging auf Basis des Optionsdeltas $\Delta(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x,t)$ (Sensitivität).

Approximativ gilt für die Wertänderung des Optionspreises in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$v(S_{t+h}, t+h) - v(S_t, t) \approx \Delta(S_t, t)(S_{t+h} - S_t).$$

Dies erlaubt, die Optionsposition gegen Preisänderungen des Basiswertes im Zeitintervall $[t, t+h]$ abzusichern, indem eine Position im Basiswert aufgebaut wird, deren Wertänderungen bei Preisbewegung den Wertänderungen der Optionsposition genau entgegengesetzt sind.

(d) (i) Im Black-Scholes-Modell (und anderen Diffusionsmodellen) sind die Pfade der Preisprozesse stetig, sodass abrupte, sprunghafte Kursänderungen (Kursanstieg, Kursverfall) nicht abgebildet werden. Das Merton-Sprungdiffusionsmodell modelliert Kurssprünge durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$, $t \geq 0$, wobei die Anzahl der Sprünge bis t durch einen Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ beschrieben wird und X_i bzw. $\exp(X_i)$ die Höhe des i-ten Kurssprungs darstellt. Zwischen den Sprüngen verhält sich der Preisprozess wie eine Geometrische Brownsche Bewegung.

(ii) Bedingt auf $\{N_T = n\}$ besitzt S_T^M dieselbe Verteilung wie der terminale Wert einer Geometrischen Brownschen Bewegung (mit entsprechend modifizierten Parametern). Im Merton-Sprungdiffusionsmodell gilt bei risikoneutraler Bewertung der Call-Option:

$$\mathrm{E}_{\tilde{Q}}[e^{-rT}(S_T^M - K)^+] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\,\mathrm{E}_{\tilde{Q}}[e^{-rT}(S_T^M - K)^+ | N_T = n]$$

Damit reduziert sich die Bewertung auf die Bewertung im Black-Scholes-Modell.

Aufgabe 6. *[Bewertung im Zinsbereich] [35 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Grenzen Sie die drei Klassen von Zinsmodellen, die im Seminar besprochen wurden, voneinander ab. Geben Sie dabei jeweils den Gegenstand der Modellierung an und zählen Sie je Modellklasse einen Vor- und Nachteil auf.

(b) *[15 Punkte]* Im Vasicek-Modell sei die Dynamik der Short Rate $(r_t)_{t\geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß Q bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u\,du\right), \quad t \geq 0,$$

gegeben durch die SDE

$$dr_t = (b - \beta r_t)dt + \sigma dW_t \quad \Leftrightarrow \quad r_t = r_0 e^{-\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + \sigma e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s}\,dW_s,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter Q bezeichnet, $b \in \mathbb{R}$, $\beta, \sigma > 0$ gilt und r_0 ein deterministischer Startwert ist.

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie explizit die Verteilung der Zufallsvariable r_t für $t > 0$.

(ii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie eine Herangehensweise, um eine Formel zur Berechnung des Preises $P(0,T)$ einer ausfallfreien Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T und Nennwert 1 im Zeitpunkt 0 herzuleiten. Geben Sie die Struktur des Bondpreises $P(0,T)$ an.

Hinweis: Beachten Sie, dass eine explizite Preisberechnung nicht erforderlich ist.

(iii) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Vorteile, die sich im Anwendungskontext aus der allgemeinen Struktur der Preise $P(t,T)$, $t \leq T$, für eine Nullkuponanleihe mit Nennwert 1 und Maturität T im affinen Vasicek-Short-Rate-Modell ergeben.

(iv) *[2 Punkte]* Verdeutlichen Sie anhand der allgemeinen Struktur der Bondpreise $P(t,T)$ und der in (i) ermittelten Verteilung der Short-Rate r_t, dass das Vasicek-Modell insbesondere negative Spot Rates $r_t^s(T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$ bei stetiger Verzinsung generiert.

(v) *[5 Punkte]* Diskutieren Sie für das Vasicek-Modell die Angemessenheit im Niedrigzinsumfeld. Gehen Sie dabei sowohl auf Probleme bezüglich der Simulation von negativen Zinsen als auch auf mögliche Anpassungen/Erweiterungen ein.

(c) *[14 Punkte]* Nehmen Sie an, Ihnen liegt ein risikoneutraler Szenariensatz vor mit

- Projektionshorizont $0 < t < t_{max}$
- Diskontfaktor B_t (Geldmarktfonds)
- Spot Rates $r_t^z(T)$ zu den Maturitäten $M = 1, \ldots, M_{max}$ (vernachlässige im Folgenden den Index z)

Der Szenariensatz sei marktkonsistent zur aktuellen Zinskurve $r_0(T) = r_0^M(T)$, und das zugrunde liegende Zinsmodell sei das Hull-White-Modell.

(i) *[2 Punkte]* Begründen Sie, wie lange die Startzinskurve für eine wohldefinierte, vollständige Projektion mindestens sein muss.

Hinweis: Betrachten Sie, wie die simulierten Bondpreise von der Startzinskurve abhängen.

(ii) *[5 Punkte]* Für eine Sensitivitätsanalyse wird nun ein Szenariensatz benötigt, der einer gestressten Anfangszinskurve $\widetilde{r}_0(T)$ entspricht. Wie können Sie die gestressten Spot Rates $\widetilde{r}_t(T)$ ohne erneute Simulation aus dem vorliegenden Szenariensatz bestimmen?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie die Formel der Zerobondpreise zu transformieren ist.

(iii) *[7 Punkte]* Die Anpassungen in Aufgabenteil (ii) stellen eine Manipulation des Short-Rate-Prozesses $(r_t)_{t\geq 0}$ dar. Dies wirkt sich auch auf den Geldmarktfonds aus. Leiten Sie aus der generellen Form des Geldmarktfonds die entsprechend notwendigen Anpassungen her.

Hinweis: Betrachten Sie die folgende Darstellung der Short Rate im Hull-White-Modell

$$r_t = x_s e^{-\alpha(t-s)} + \varphi(t) + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}\, dW_u,$$

und überlegen Sie, ob und wie die einzelnen Terme von der Zinskurve abhängen.

Lösungsskizze:

(a) Die drei Klassen und Beispiele für Vor- und Nachteile sind:

- Short-Rate-Modelle: Modellierung der Short Rate
  - **+** Einfach handhabbare Modelle
  - **+** Short Rate ist Markov-Prozess

- Short Rate ist nicht am Markt beobachtbar
- Marktkonsistente Zinskurve nur über Kalibrierung von Modellparametern replizierbar

- Heath-Jarrow-Morton-Ansatz (HJM): Modellierung der instantanen Forward Rates
  + Startzinskurve ist direkter Startwert des Modells
  + Beschreibt die volle Forward Kurve statt nur einen Punkt (die Short Rate)
  - Instantane Forward Rate ist nicht am Markt beobachtbar
  - Modell kann nicht-Markov'sche Prozesse liefern

- Marktmodelle: Modellierung von einfachen Forward Rates oder Swap Rates
  + Startzinskurve ist direkter Startwert des Modells
  + Gegenstand der Modellierung sind beobachtbare Marktgrößen
  - Komplexität des Modells
  - Hohe Zahl an Freiheitsgraden

[Bemerkung: Zu nennen war jeweils nur ein Vor- und Nachteil.]

(b) (i) Es gilt $\int_0^t e^{\beta s}\, dW_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t (e^{\beta s})^2\, ds) = \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\beta}(e^{2\beta t} - 1)$ und folglich

$$r_t \sim \mathcal{N}(r_0 e^{-\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \tfrac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})).$$

(ii) Die Nullkuponanleihe liefert zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1. Gemäß risikoneutraler Bewertungsformel beträgt der Wert dieser Auszahlung im Zeitpunkt 0

$$P(0,T) = B_0\, \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{B_T}\right] = \mathrm{E}_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u\, du\right)\right],$$

sodass man für die Bewertung die Verteilung von $\int_0^T r_u\, du$ unter Q benötigt.

Da die Zufallsvariablen r_u, $u \le T$, normalverteilt sind, ist auch $\int_0^T r_u\, du$ normalverteilt. Damit folgt mit den üblichen Rechenregeln für die Normalverteilung

$$\begin{aligned} P(0,T) &= \mathrm{E}_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u\, du\right)\right] \\ &= \exp\left(-\mathrm{E}_Q\left[\int_0^T r_u\, du\right] + \tfrac{1}{2}\mathrm{Var}\left(\int_0^T r_u\, du\right)\right) \end{aligned}$$

Explizite Rechnungen zeigen, dass der Preis der Nullkuponanleihe die Form

$$P(0,T) = \exp(-A(0,T) - B(0,T)r_0)$$

für deterministische Funktionen A, B besitzt. Dies ist die allgemeine Struktur der Preise von Nullkuponanleihen in affinen Short-Rate-Modellen.

Der Bondpreis kann allternativ über die Feynman-Kac-Methode hergeleitet werden.

(iii) Die Modellpreise $P(t,T)$ von Zerobonds können in geschlossenen Formeln in Abhängigkeit der Parameter des Short-Rate-Modells angeben werden:

$$P(t,T) = \exp\left(-A(t,T) - B(t,T)r_t\right)$$

für deterministische Funktionen $A(\cdot,T)$ und $B(\cdot,T)$.

- Dies ist in $t = 0$ vorteilhaft bei der Kalibrierung des Short-Rate-Modells an Marktpreise von Zerobonds.
- Für Zeitpunkte $t > 0$ ergeben sich Zerobondpreise $P(t,T)$ direkt aus dem Zustand r_t der Short Rate. In Simulationsmodellen ergeben sich damit unmittelbar Bondpreise in den Szenarien, die in Spot Rates und Forward Rates umgerechnet werden können.

(iv) Die Spot Rates sind von der Form

$$r_t^s(T) = \tfrac{1}{T-t}(A(t,T) + B(t,T)r_t).$$

Da r_t normalverteilt ist, können negative Spot Rates in beliebiger Höhe generiert werden, und zwar für jede Maturität T.

(v) Im Niedrigzinsumfeld sind auch negative Zinsen für bestimmte Laufzeiten zu beobachten. Das Vasicek-Modell führt (siehe (iv)) zu normalverteilten Short Rates, daher sind negative Zinsen im Modell möglich, jedoch für alle Laufzeiten. Allerdings ist das Modell gleichzeitig unbeschränkt und kann somit beliebig tiefe Zinsen generieren. Dies steht im Widerspruch zur Bargeldhaltungsoption, die das Zinslevel nach unten beschränkt.

Eine mögliche Lösung besteht in der ex-post Zinskappung solcher Pfade, die ein gegebenes Level unterschreiten. Dabei stellen die Bestimmung der unteren Schranke sowie die Sicherstellung der Risikoneutralität (Martingaltest) weitergehende Herausforderungen dar.

(c) (i) Die Bondpreise sind im Hull-White-Modell gegeben als

$$P(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} \exp\left(-B(t,T)x_t + \frac{1}{2}\left(V(t,T) - V(0,T) + V(0,t)\right)\right).$$

Somit muss die maximale Laufzeit der Startzinskurve mindestens dem maximalen Wert für $T = t_{max} + M_{max}$ entsprechen.

(ii) In der Formel für Teil (i) sind sowohl der stochastische Prozess x_t als auch die Funktionen $B(t,T)$ und $V(t,T)$ unabhängig von der Startzinskurve. Somit können die Bondpreise einfach transformiert werden als

$$\widetilde{P}(t,T) = P(t,T)\frac{P^M(0,t)}{P^M(0,T)}\frac{\widetilde{P}^M(0,T)}{\widetilde{P}^M(0,t)}.$$

Mit der Bestimmungsgleichung für die Spot Rate $P(t,T) = (1+r_t(T))^{-(T-t)}$ folgt

$$\widetilde{r}_t(T) = \left(\frac{1+r_0(t)}{1+\widetilde{r}_0(t)}\right)^{\frac{t}{T-t}}\left(\frac{1+\widetilde{r}_0(T)}{1+r_0(T)}\right)^{\frac{T}{T-t}} - 1.$$

(iii) Die allgemeine Form für den Geldmarktfonds ist durch $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$ gegeben. Einsetzen der Hull-White-Lösung r_t in der Darstellung durch den Prozess x_t mit $x_0 = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} B_t &= \exp\left(\int_0^t \left(\varphi(s) + \sigma\int_0^s e^{\alpha(s-u)}\,dW_u\right)ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)\cdot\exp\left(\int_0^t \sigma\int_0^s e^{\alpha(s-u)}\,dW_u\,ds\right). \end{aligned}$$

Nur die Funktion $\varphi(t)$ ist hier abhängig von der Startzinskurve und ist gegeben vermöge der Gleichung

$$P(0,T) = \exp\left(-\int_0^T \varphi(s)\,ds + \frac{1}{2}V(0,T)\right).$$

Somit folgt der Diskontfaktor für die gestresste Zinskurve durch Elimination des ersten Exponentialfaktors als

$$\widetilde{B}_t = B_t\frac{P(0,t)e^{-\frac{1}{2}V(0,t)}}{\widetilde{P}(0,t)e^{-\frac{1}{2}V(0,t)}} = B_t\left(\frac{1+\widetilde{r}_0(t)}{1+r_0(t)}\right)^t.$$

Aufgabe 7. *[Numerik und Praktikabilität] [10 Punkte]*

Der stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ im Cox-Ingersoll-Ross-Modell folgt der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t, \quad X_0 = x(0) > 0,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess bezeichnet. Dieser Prozess soll für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ mit $t_{i+1} - t_i = h$ simuliert werden.

(a) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie das Vorgehen des Euler-Verfahrens zur Diskretisierung und Simulation des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ durch die Markov-Kette $(Y_{t_i})_{i=1\ldots,n}$ inklusive der konkreten Herleitung der Diskretisierung Y_{t_i} und einer kurzen Beschreibung, wie Sie basierend darauf die Realisierungen von $(Y_{t_i})_{i=1,\ldots,n}$ simulieren können.

(b) *[4 Punkte]* Wenden Sie das Milstein-Verfahren zur Diskretisierung und Simulation eines stochastischen Prozesses durch die Markov-Kette $(Z_{t_i})_{i=1,\ldots,n}$ auf den Cox-Ingersoll-Ross-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ an, d. h. leiten Sie die konkrete Diskretisierungsvorschrift für Z_{t_i} her.

(c) *[2 Punkte]* Diskutieren Sie *kurz*, auf was bei der Simulation durch die Diskretisierung in (a) und (b) zu achten ist, um mögliche Diskretisierungsfehler klein zu halten bzw. zu vermeiden.

Lösungsskizze:

(a) Folgt ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ der SDE

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t, \quad X_0 = x(0),$$

so liefert das Euler-Verfahren für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ mit $t_{i+1} - t_i = h$ eine Diskretisierung in Form einer Markov-Kette $(Y_{t_i})_{i=1,\ldots,n}$ durch die Rekursion

$$Y_0 = x(0), \quad Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(t_i, Y_{t_i})h + \sigma(t_i, Y_{t_i})\Delta W_i,$$

wobei $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ ein normalverteilter Noiseterm mit Mittelwert Null und Varianz h ist. Durch Simulation von (voneinander unabhängigen) Zufallsvariablen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \sim \mathcal{N}(0, h)$ kann basierend darauf rekursiv eine Realisierung von $Y_{t_{i+1}}$ simuliert werden, indem man $Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(t_i, Y_{t_i})h + \sigma(t_i, Y_{t_i})\epsilon_{i+1}$ setzt.

Für den Cox-Ingersoll-Ross-Prozess ergibt sich wegen $\mu(t, X_t) = \alpha(\theta - X_t)$ und $\sigma(t, X_t) = \sigma\sqrt{X_t}$ konkret die Rekursion

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \alpha(\theta - Y_{t_i})h + \sigma\sqrt{Y_{t_i}}\Delta W_i \quad \text{mit } Y_{t_0} = Y_0 = x(0).$$

[Bemerkung: Vollständigerweise muss in der letzten Formel der Term $\sqrt{Y_{t_i}}$ durch $\sqrt{\max\{Y_{t_i}, 0\}}$ ersetzt werden, um die Wohldefiniertheit der Formel im Simulationskontext zu gewährleisten.]

(b) Folgt ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ der SDE

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t, \quad X_0 = x(0),$$

so liefert das Milstein-Verfahren für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ mit $t_{i+1} - t_i = h$ eine Diskretisierung in Form einer Markov-Kette $(Z_{t_i})_{i=1,\ldots,n}$ durch die Rekursion

$$Z_0 = x(0), \quad Z_{t_{i+1}} = Z_{t_i} + \mu(t_i, Z_{t_i})h + \sigma(t_i, Z_{t_i})\Delta W_i + \tfrac{1}{2}\sigma(t_i, Z_{t_i})\sigma_x(t_i, Y_{t_i})((\Delta W_i)^2 - h),$$

wobei $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ ein normalverteilter Noiseterm mit Mittelwert Null und Varianz h ist und σ_x die Ableitung der Volatilitätsfunktion im zweiten Argument bezeichnet.

Für den Cox-Ingersoll-Ross-Prozess ergibt sich wegen $\mu(t, X_t) = \alpha(\theta - X_t)$, $\sigma(t, X_t) = \sigma\sqrt{X_t}$ und $\sigma_x(t, X_t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{X_t}}$ konkret die Rekursion

$$\begin{aligned}
Z_{t_{i+1}} &= Z_{t_i} + \alpha(\theta - Z_{t_i})h + \sigma\sqrt{Z_{t_i}}\Delta W_i + \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{Z_{t_i}}\tfrac{\sigma}{2\sqrt{Z_{t_i}}}((\Delta W_i)^2 - h) \\
&= Z_{t_i} + \alpha(\theta - Z_{t_i})h + \sigma\sqrt{Z_{t_i}}\Delta W_i + \tfrac{1}{4}\sigma^2((\Delta W_i)^2 - h) \\
&= Z_{t_i} + \alpha(\theta - Z_{t_i} - \tfrac{1}{4}\sigma^2)h + \sigma\sqrt{Z_{t_i}}\Delta W_i + \tfrac{1}{4}\sigma^2(\Delta W_i)^2.
\end{aligned}$$

[Bemerkung: Vollständigerweise muss in der letzten Formel der Term $\sqrt{Z_{t_i}}$ durch $\sqrt{\max\{Z_{t_i}, 0\}}$ ersetzt werden, um die Wohldefiniertheit der Formel im Simulationskontext zu gewährleisten.]

(c) Generell sollte der Wert von h möglichst klein gehalten werden, um die Approximationsfehler durch die hier vorliegenden Diskretisierungen erster bzw. zweiter Ordnung der beiden Verfahren entsprechend gering zu halten.

Im speziellen Fall ist bei der Ermittlung der Terme $\sqrt{Y_{t_i}}$ bzw. $\sqrt{Z_{t_i}}$ darauf zu achten, dass die Werte von Y_{t_i} bzw. Z_{t_i} durch die Diskretisierung (konkret durch entsprechende Realisierungen ΔW_{i-1}) negativ werden können, sodass diese Terme korrekterweise durch $\sqrt{\max\{Y_{t_i}, 0\}}$ bzw. $\sqrt{\max\{Z_{t_i}, 0\}}$ ersetzt werden müssen. Dieser Aspekt bietet eine weitere Motivation den Wert von h klein zu halten, da mit steigenden Wert von h die Varianz des Noiseterms ΔW_i und damit auch die Möglichkeit, dass dessen Realisierung den Wert von Y_{t_i} bzw. Z_{t_i} ins Negative treibt, ansteigt.